АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 3 **1938** V. II, № 3

ЗАМЕТКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Т. Н. БЛИНЧИКОВ
(Ленинград)

1. В курсах теории упругости приводятся обычно уравнения теории упругости в функции напряжений в декартовой координатной системе и к ним присоединяют условия Сен-Венана. Из криволинейных координат рассматриваются лишь ортогональные системы, но, однако, уравнения равновесия даются при этом без условий Сен-Венана, уравнения же равновесия Бельтрами, вытекающие как следствие из закона Гука для изотропных однородных тел, приводятся исключительно в декартовой координатной системе.

В настоящей работе мы покажем, как можно получить все эти уравнения равновесия (включая условия Сен-Венана) в произвольной координатной системе.

Введем следующие обозначения:

σ_{ik} —	ковариантные составляющие	тензора напряжений,
F_k	„ „	объемной силы,
ε_{ik}	„ „	тензора деформаций,
u_k	„ „	вектора перемещений.

Уравнения равновесия сплошной среды будут:[1]

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \sigma_{\beta\lambda} + F_\lambda = 0, \tag{1}$$

или

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial \sigma_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\sigma_{\mu\lambda} + F_\lambda = 0,$$

где $g^{\alpha\beta}$ — контрвариантные составляющие метрического тензора,

∇_α — знак ковариантного дифференцирования,

$\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}$ — фигурные скобки Кристоффеля.

В криволинейной координатной системе компоненты тензора деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ вычисляются через вектор перемещения $\mathbf{u}$ по формулам:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha), \tag{2}$$

т. е.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}u_\lambda.$$

---

[1] Мы будем придерживаться правила индексов, данных Эйнштейном, а именно: по индексам повторяющимся следует суммировать: число уравнений равно числу неповторяющихся индексов.

Напишем закон Гука для однородной изотропной среды:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{\alpha\beta}-\frac{s}{m+1}g_{\alpha\beta}\right), \tag{3}$$

где G — модуль сдвига,

m — число Пуассона,

s — удовлетворяет соотношению

$$s=\sigma_{k\gamma}\,g^{k\gamma}. \tag{4}$$

Далее введем инвариант Θ по формуле:

$$\Theta=g^{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,u_\beta+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\,\nabla_\beta\,u_\alpha=\nabla_\alpha\,u^\alpha=\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{1}{2G}\,\frac{m-2}{m+1}. \tag{5}$$

Из (3) и (5) получаем:

$$\sigma_{\alpha\beta}=2G\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\frac{\Theta}{m-2}g_{\alpha\beta}\right). \tag{6}$$

Уравнения равновесия в перемещениях напишутся на основании (1) и (6) в виде:

$$G\nabla^k\,\nabla_k\,u_\alpha+\frac{Gm}{m-2}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x^\alpha}+F_\alpha=0. \tag{7}$$

Здесь ∇^k обозначает знак контрвариантного дифференцирования, т. е.

$$\nabla^k=g^{k\beta}\,\nabla_\beta.$$

Из (7) нетрудно получить равенство:

$$\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,s=-\frac{m+1}{m-1}\operatorname{div}\mathbf{F}. \tag{7'}$$

Все вышеприведенные формулы легко проверяются в декартовой координатной системе, вследствие же тензорного характера этих равенств формулы остаются справедливыми в произвольной криволинейной координатной системе.

2. Составим теперь уравнения Бельтрами в произвольной координатной системе. Дифференцируя два раза по индексу α равенство

$$\frac{1}{2}\nabla_k\,u_l+\frac{1}{2}\nabla_l\,u_k=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{kl}-\frac{s}{m+1}g_{kl}\right),$$

получим:

$$\frac{1}{2}\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,\nabla_k\,u_l+\frac{1}{2}\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,\nabla_l\,u_k=\frac{1}{2G}\left(\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,\sigma_{kl}-\frac{g_{kl}}{m+1}\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,s\right). \tag{8}$$

На основании (7) мы можем написать два уравнения:

$$\begin{gathered}G\,\nabla_k\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,u_l+\frac{Gm}{m-2}\nabla_k\,\nabla_l\,\Theta+\nabla_k\,F_l=0,\\ G\,\nabla_l\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,u_k+\frac{Gm}{m-2}\nabla_l\,\nabla_k\,\Theta+\nabla_l\,F_k=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя значения $\nabla_k\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,u_l$ и $\nabla_l\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,u_k$ из (9) в (8) и принимая во внимание (5) и (7'), получим уравнения Бельтрами:

$$\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha\,\sigma_{kl}+\frac{g_{kl}}{m+1}\,\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\sqrt{g}\,F^\lambda)+\nabla_k\,F_l+\nabla_l F_k+\frac{m}{m+1}\nabla_k\,\nabla_l\,s=0, \tag{10}$$

где g обозначает детерминант, составленный из компонентов ковариантного метрического тензора. В случае однородной изотропной среды, подчиняющейся закону Гука, уравнения Бельтрами заменяют уравнения Сен-Венана.

Если объемные силы постоянны, то уравнения (10) будут иметь форму:

$$\nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} \sigma_{kl} + \frac{m}{m+1} \nabla_k \nabla_l s = 0. \tag{11}$$

Умножая (11) на g^{kl} и суммируя, получим:

$$g^{kl} \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} \sigma_{kl} + \frac{m}{m+1} g^{kl} \nabla_k \nabla_l s = 0,$$

или

$$\nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} s + \frac{m}{m+1} \nabla^{l} \nabla_l s = 0,$$

т. е.

$$\nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} s = 0.$$

Далее из (11) следует:

$$\nabla^{\beta} \nabla_{\beta} \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} \sigma_{kl} + \frac{m}{m+1} \nabla_k \nabla_l \nabla^{\beta} \nabla_{\beta} s = 0;$$

откуда все σ_{kl} удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$\nabla^{\beta} \nabla_{\beta} \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} \sigma_{kl} = 0. \tag{12}$$

В декартовой координатной системе последние формулы переходят в бигармонические уравнения для σ_{kl}:

$$\Delta\Delta \sigma_{kl} = 0.$$

В развернутом виде уравнения (10) примут следующий вид:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha k} \sigma_{\mu l} - \Gamma^{\mu}_{\alpha l} \sigma_{k\mu} \right) - g^{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu k} \sigma_{\lambda l} - \Gamma^{\lambda}_{\mu l} \sigma_{k\lambda} \right) -$$

$$- g^{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta k} \left(\frac{\partial \sigma_{\mu l}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \sigma_{\lambda l} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} \sigma_{\mu\lambda} \right) - g^{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta l} \left(\frac{\partial \sigma_{k\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha k} \sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \sigma_{k\lambda} \right) +$$

$$+ \frac{g_{kl}}{m+1} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{g}\, F^{\lambda}) + \frac{\partial F_k}{\partial x^l} + \frac{\partial F_l}{\partial x^k} - 2\Gamma^{\mu}_{lk} F_{\mu} +$$

$$+ \frac{m}{m+1} \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma^{\mu}_{kl} \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} \right] = 0. \tag{13}$$

3. Условия Сен-Венана непосредственно получаются из (2):

$$\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{22} + \nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{11} = 2 \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12},$$
$$\nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{33} + \nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{22} = 2 \nabla_2 \nabla_3 \varepsilon_{23},$$
$$\nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{11} + \nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{33} = 2 \nabla_3 \nabla_1 \varepsilon_{31};$$
$$\nabla_1 (\nabla_3 \varepsilon_{12} + \nabla_2 \varepsilon_{31} - \nabla_1 \varepsilon_{23}) = \nabla_3 \nabla_2 \varepsilon_{11},$$
$$\nabla_2 (\nabla_1 \varepsilon_{23} + \nabla_3 \varepsilon_{12} - \nabla_2 \varepsilon_{31}) = \nabla_1 \nabla_3 \varepsilon_{22},$$
$$\nabla_3 (\nabla_2 \varepsilon_{31} + \nabla_1 \varepsilon_{23} - \nabla_3 \varepsilon_{12}) = \nabla_2 \nabla_1 \varepsilon_{33};$$

или в развернутом виде:

1) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{21}}{\partial x^2} \varepsilon_{1\mu} - \frac{\partial \varepsilon_{\mu 2}}{\partial x^1} \Gamma^{\mu}_{21} - \frac{\partial \varepsilon_{\mu 1}}{\partial x^2} \Gamma^{\mu}_{12} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu}_{11} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu}_{22} +$$

$$+ 2 \Gamma^{\mu}_{11} \Gamma^{\lambda}_{2\mu} \varepsilon_{\lambda 2} + 2 \Gamma^{\mu}_{22} \Gamma^{\lambda}_{1\mu} \varepsilon_{1\lambda} + 2\Gamma^{\mu}_{12} \Gamma^{\lambda}_{12} \varepsilon_{\mu\lambda} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - 2 \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{22}}{\partial x^1} \varepsilon_{1\mu} -$$

$$- 2\Gamma^{\mu}_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^{\mu}} - 2\Gamma^{\mu}_{11} \frac{\partial \varepsilon_{\mu 2}}{\partial x^2} + 2 \Gamma^{\lambda}_{\mu 2} \Gamma^{\mu}_{11} \varepsilon_{\lambda 2} + 2\Gamma^{\mu}_{11} \Gamma^{\lambda}_{22} \varepsilon_{\mu\lambda},$$

2)
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^3\,\partial x^3}-2\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{32}}{\partial x^3}\varepsilon_{2\mu}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^2}\Gamma^{\mu}_{32}-\Gamma^{\mu}_{23}\frac{\partial\varepsilon_{\mu2}}{\partial x^3}-\Gamma^{\mu}_{22}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^{\mu}}-\Gamma^{\mu}_{33}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^{\mu}}+$$
$$+2\Gamma^{\mu}_{22}\Gamma^{\lambda}_{3\mu}\varepsilon_{\lambda3}+2\Gamma^{\mu}_{33}\Gamma^{\lambda}_{2\mu}\varepsilon_{2\lambda}+2\Gamma^{\mu}_{23}\Gamma^{\lambda}_{23}\varepsilon_{\mu\lambda}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x^2\,\partial x^3}-2\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{33}}{\partial x^2}\varepsilon_{2\mu}-$$
$$-2\Gamma^{\mu}_{23}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{\mu}_{22}\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^3}+2\Gamma^{\lambda}_{\mu3}\Gamma^{\mu}_{22}\varepsilon_{\lambda3}+2\Gamma^{\mu}_{22}\Gamma^{\lambda}_{33}\varepsilon_{\mu\lambda},$$

3)
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^3\,\partial x^3}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x^1\,\partial x^1}-2\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{13}}{\partial x^1}\varepsilon_{3\mu}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu1}}{\partial x^3}\Gamma^{\mu}_{13}-\Gamma^{\mu}_{31}\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^1}-\Gamma^{\mu}_{33}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^{\mu}}-\Gamma^{\mu}_{11}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^{\mu}}+$$
$$+2\Gamma^{\mu}_{33}\Gamma^{\lambda}_{1\mu}\varepsilon_{\lambda1}+2\Gamma^{\mu}_{11}\Gamma^{\lambda}_{3\mu}\varepsilon_{3\lambda}+2\Gamma^{\mu}_{31}\Gamma^{\lambda}_{31}\varepsilon_{\mu\lambda}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial x^3\,\partial x^1}-2\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{31}}{\partial x^3}\varepsilon_{\mu3}-2\Gamma^{\mu}_{31}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x^{\mu}}+$$
$$+2\Gamma^{\mu}_{33}\Gamma^{\lambda}_{\mu1}\varepsilon_{3\lambda}-2\Gamma^{\mu}_{33}\frac{\partial\varepsilon_{\mu1}}{\partial x^1}+2\Gamma^{\mu}_{33}\Gamma^{\lambda}_{11}\varepsilon_{\mu\lambda},$$

4)
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial x^1}-2\Gamma^{\mu}_{32}\varepsilon_{1\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{11}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\mu2}}{\partial x^3}+\frac{\partial\varepsilon_{3\mu}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{32}\varepsilon_{\mu s}\right)-$$
$$-\Gamma^{\mu}_{12}\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\mu}}{\partial x^3}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\varepsilon_{3\mu}}{\partial x^1}-2\Gamma^{s}_{3\mu}\varepsilon_{1s}\right)-\Gamma^{\mu}_{13}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\mu2}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial\varepsilon_{\mu1}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu2}}{\partial x^1}-2\Gamma^{s}_{\mu2}\varepsilon_{1s}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-2\Gamma^{\mu}_{12}\varepsilon_{1\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{31}\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\mu}}{\partial x^2}-2\Gamma^{s}_{\mu2}\varepsilon_{s1}\right)-\Gamma^{\mu}_{32}\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{1\mu}\varepsilon_{1s}\right)-\Gamma^{\mu}_{31}\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\mu}}{\partial x^2}-2\Gamma^{s}_{12}\varepsilon_{\mu s}\right),$$

5)
$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-2\Gamma^{\mu}_{13}\varepsilon_{2\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{22}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^1}+\frac{\partial\varepsilon_{1\mu}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{13}\varepsilon_{\mu s}\right)-$$
$$-\Gamma^{\mu}_{23}\left(\frac{\partial\varepsilon_{2\mu}}{\partial x^1}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\varepsilon_{1\mu}}{\partial x^2}-2\Gamma^{s}_{1\mu}\varepsilon_{2s}\right)-\Gamma^{\mu}_{21}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial\varepsilon_{\mu2}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^2}-2\Gamma^{s}_{\mu3}\varepsilon_{2s}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^3}-2\Gamma^{\mu}_{23}\varepsilon_{2\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{12}\left(\frac{\partial\varepsilon_{2\mu}}{\partial x^3}-2\Gamma^{s}_{\mu3}\varepsilon_{s2}\right)-2\Gamma^{\mu}_{13}\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{2\mu}\varepsilon_{2s}\right)-$$
$$-\Gamma^{\mu}_{12}\left(\frac{\partial\varepsilon_{2\mu}}{\partial x^3}-2\Gamma^{s}_{23}\varepsilon_{\mu s}\right),$$

6)
$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-2\Gamma^{\mu}_{12}\varepsilon_{3\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{33}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\mu1}}{\partial x^2}+\frac{\partial\varepsilon_{2\mu}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{12}\varepsilon_{\mu s}\right)-$$
$$-\Gamma^{\mu}_{31}\left(\frac{\partial\varepsilon_{3\mu}}{\partial x^2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\varepsilon_{2\mu}}{\partial x^3}-2\Gamma^{s}_{2\mu}\varepsilon_{3s}\right)-\Gamma^{\mu}_{32}\left(\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial\varepsilon_{\mu3}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu1}}{\partial x^3}-2\Gamma^{s}_{\mu1}\varepsilon_{3s}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^1}-2\Gamma^{\mu}_{31}\varepsilon_{3\mu}\right)-\Gamma^{\mu}_{23}\left(\frac{\partial\varepsilon_{3\mu}}{\partial x^1}-2\Gamma^{s}_{\mu1}\varepsilon_{3s}\right)-\Gamma^{\mu}_{12}\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^{\mu}}-2\Gamma^{s}_{3\mu}\varepsilon_{3s}\right)-$$
$$-\Gamma^{\mu}_{23}\left(\frac{\partial\varepsilon_{3\mu}}{\partial x^1}-2\Gamma^{s}_{31}\varepsilon_{\mu s}\right).$$

4. В частном случае, когда координатная система является ортогональной, компоненты метрического тензора принимают нижеследующие значения:

$$g_{11}=(H_1)^2,\quad g_{22}=(H_2)^2,\quad g_{33}=(H_3)^2,\quad g_{12}=g_{23}=g_{31}=0;$$
$$g^{11}=\frac{1}{g_{11}},\quad g^{22}=\frac{1}{g_{22}},\quad g^{33}=\frac{1}{g_{33}},\quad g^{12}=g^{23}=g^{31}=0;$$

где H_1, H_2, H_3 суть коэффициенты Ламé, легко вычисляемые по формулам:

$$(H_k)^2=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^k}\right)^2=\left(\frac{\partial y_1}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial y_2}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial y_3}{\partial x^k}\right)^2$$

(y_s — декартовые координаты рассматриваемой точки пространства, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор этой точки).

Теперь легко вычисляются скобки Кристоффеля:

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^1_{32} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\partial \log H_1}{\partial x^2}, &&\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{\partial \log H_1}{\partial x^3}, &&\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\partial \log H_2}{\partial x^3},\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\partial \log H_2}{\partial x^1}, &&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{\partial \log H_3}{\partial x^1}, &&\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\partial \log H_3}{\partial x^2},\\
&\Gamma^1_{11} = H_1 \frac{\partial \log H_1}{\partial x^1}, &&\Gamma^2_{22} = H_2 \frac{\partial \log H_2}{\partial x^2}, &&\Gamma^3_{33} = H_3 \frac{\partial \log H_3}{\partial x^3},\\
&\Gamma^1_{22} = -\frac{H_2}{(H_1)^2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1}, &&\Gamma^2_{33} = -\frac{H_3}{(H_2)^2} \frac{\partial H_3}{\partial x^2}, &&\Gamma^3_{11} = -\frac{H_1}{(H_3)^2} \frac{\partial H_1}{\partial x_3},\\
&\Gamma^1_{33} = -\frac{H_3}{(H_1)^2} \frac{\partial H_3}{\partial x^1}, &&\Gamma^2_{11} = -\frac{H_1}{(H_2)^2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2}, &&\Gamma^3_{22} = -\frac{H_2}{(H_3)^2} \frac{\partial H_2}{\partial x^3}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Следует заметить, что величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ являются лишь ковариантными составляющими тензора деформации, а не его физическими компонентами. Чтобы получить физическую составляющую деформацию $\varepsilon_{\widehat{\alpha\beta}}$ в ортогональной системе, нужно писать:

$$\varepsilon_{\widehat{\alpha\beta}} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta} \qquad \text{(не суммировать по } \alpha \text{ и } \beta\text{)}.$$

То же самое относится, конечно, и к тензору напряжений.

Ортогональная проекция силы на k-ю ось пишется в ортогональной системе в виде

$$F_{\widehat{k}} = \frac{F_k}{H_k} \qquad \text{(не суммировать по } k\text{)}.$$

Для иллюстрации полученных формул рассмотрим два важных примера.

5. Цилиндрические координаты.

Полагая

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z,$$
$$y_1 = r\cos\varphi, \quad y_2 = r\sin\varphi, \quad y_3 = z,$$

имеем:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1$$

и

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r};$$

остальные скобки Кристоффеля равны нулю.

Обозначим через ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ и т. д. физические компоненты тензоров.

Уравнения равновесия (1) в рассматриваемом случае будут:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r = 0,\\
&\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + F_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

а условия Сен-Венана примут вид:

1) $$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\varepsilon_{\varphi\varphi})+\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_{\varphi\varphi})+r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r}=2\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(r\varepsilon_{r\varphi})+2\varepsilon_{rr}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\varepsilon_{r\varphi}),$$

2) $$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^2\varepsilon_{\varphi\varphi})+r\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial r}=2\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial z}(r\varepsilon_{\varphi z})+2r\frac{\partial\varepsilon_{zr}}{\partial z},$$

3) $$\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial r^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{rz}}{\partial r\,\partial z},$$

4) $$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\varphi z})\right]-\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{rz}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\varphi z})\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial\varphi}-2\varepsilon_{r\varphi}\right),$$

5) $$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\varphi z})+r\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{rz}}{\partial\varphi}\right]+r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial z}-r\frac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}(r^2\varepsilon_{\varphi\varphi})-2r\frac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z},$$

6) $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\varphi z})-r\frac{\partial\varepsilon_{z\varphi}}{\partial z}-2\varepsilon_{\varphi z}\right]=\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial\varphi}.$$

6. Сферические координаты.

Полагая

$$y_1=r\cos\varphi\sin\vartheta,\quad y_2=r\sin\varphi\sin\vartheta,\quad y_3=r\cos\vartheta,$$

имеем:

$$H_1=1,\quad H_2=r\sin\vartheta,\quad H_3=r$$

и

$$\Gamma^2_{32}=\Gamma^2_{23}=\operatorname{ctg}\vartheta,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^1_{22}=-r\sin^2\vartheta,$$

$$\Gamma^1_{33}=-r,\quad \Gamma^3_{22}=-\sin\vartheta\cos\vartheta;$$

остальные скобки Кристоффеля равны нулю.

Следовательно, уравнения равновесия (1) будут:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\vartheta\vartheta}+\sigma_{r\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta}{r}+F_r=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{3\sigma_{r\varphi}+2\sigma_{\varphi\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta}{r}+F_\varphi=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{\vartheta r}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\vartheta+3\sigma_{r\vartheta}}{r}+F_\vartheta=0,
\end{aligned}\tag{16}$$

а условия Сен-Венана примут вид:

1) $$\begin{aligned}
&r^2\sin^2\vartheta\frac{\partial^2\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r^2}+3r\sin^2\vartheta\frac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\varphi^2}-r\sin^2\vartheta\frac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r}+r\sin^2\vartheta\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r}+\\
&+\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial\vartheta}-2\varepsilon_{r\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta+2\varepsilon_{\varphi\varphi}\sin^2\vartheta=2\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(r\sin\vartheta\,\varepsilon_{r\varphi})+\\
&+2\sin^2\vartheta\,\varepsilon_{rr}-2\sin\vartheta\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial\varphi},
\end{aligned}$$

2) $$r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} (\sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi}) - r^2 \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi}) + r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) +$$
$$+ r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) = 2r^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi \, \partial \vartheta} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\vartheta}) - 2r^2 \cos \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + 2r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} +$$
$$+ 2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + 2r^2 \cos^2 \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi},$$

3) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \vartheta^2} + r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial r} + 2\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} = 2 \frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \vartheta} (r \varepsilon_{r\vartheta}) + 2r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r},$$

4) $$\frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \vartheta} (r \sin \vartheta \, \varepsilon_{r\varphi}) + \frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \varphi} (r \varepsilon_{\varphi r}) - \sin \vartheta \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \varepsilon_{\varphi\vartheta}) - \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{r\varphi}) -$$
$$- 2 \frac{\partial \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi \, \partial \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} + \sin \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\vartheta},$$

5) $$\sin \vartheta \frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \varphi} (r^2 \varepsilon_{\varphi\vartheta}) + r \frac{\partial^2}{\partial \varphi \, \partial \vartheta} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{r\varphi}) - r \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \varphi^2} - r \sin \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + r \sin^2 \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \vartheta} -$$
$$- 2r \sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{r\vartheta} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) - 2r \sin \vartheta \cos \vartheta \, \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_{\varphi\vartheta}) +$$
$$+ 2r \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \vartheta} (r^2 \sin^2 \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi}) - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2r \cos \vartheta \sin \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\varphi},$$

6) $$r \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \varphi \, \partial \vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial r \, \partial \vartheta} (r^2 \sin \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\vartheta}) - r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{r\varphi}) - 2r \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\vartheta}) + 2r \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial \varphi} + 2r \operatorname{ctg} \vartheta \, \varepsilon_{\vartheta\vartheta} -$$
$$- r \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \varepsilon_{r\vartheta}}{\partial \varphi} + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_{\varphi\vartheta}) + r \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \, \varepsilon_{r\varphi}) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi \, \partial r} (r^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + 4r \cos \vartheta \, \varepsilon_{\varphi\vartheta}.$$

В заключение заметим, что так же нетрудно составить в явном виде и уравнения Бельтрами (11) для сферической и цилиндрической координатной систем. Однако формулы получаются громоздкими, и мы их здесь приводить не будем.

Поступила 13 V 1938

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE EQUILIBRIUM OF THE THEORY OF THE ELASTICITY IN THE CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

T. N. BLINCHIKOV

(Leningrad)

(Summary)

In the present article the author shows how in arbitrary coordinate system the equations of the theory of elasticity (including the Saint-Venant's conditions) and the Beltrami's equations can be written.

Further, it is regarded in a more detailed manner the case of the cylindrical and spherical coordinates.