АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. II, в. 3

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. II, № 3

1938

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

З. Ш. БЛОХ
(Москва)

Наиболее широко используются для практических целей замкнутые кинематические цепи принужденного движения с неподвижным звеном, называемые механизмами. В последующем изложении рассматриваются более общие плоские кинематические цепи со звеньями, связанными вращательными и поступательными парами. Как будет доказано, все практически применяемые плоские механизмы с низшими парами образуются соединением (наложением) кинематических цепей с последовательным соединением звеньев при соблюдении некоторых дополнительных ограничений (условий). В связи с этим различные вопросы общей теории плоских механизмов целесообразно предварительно рассматривать в аналогичной постановке для кинематических цепей с последовательным соединением звеньев, а затем получаемые результаты применять к механизмам.

В дальнейшем, чтобы не вводить лишних фигур, мы будем обозначать кинематическую цепь с последовательным соединением звеньев символом P_m, где m — общее число звеньев цепи без ползушек.

1. Основные уравнения. Образуем из звеньев цепи замкнутой векторный контур $\mathbf{a}_{1k}, \mathbf{a}_{2k}, \ldots, \mathbf{a}_{mk}$ и напишем следующее очевидное геометрическое условие:

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_{jk} = 0, \tag{1}$$

где k — число рассматриваемых положений цепи.

При этом не имеет значения, является ли рассматриваемая цепь P_m замкнутой или открытой. В самом деле, если рассматриваемая цепь открытая, то расстояние между ее конечными точками A и B всегда можно принять за некоторое добавочное звено переменной длины и положить

$$\overline{AB} = \mathbf{a}_{j+1,k}.$$

Присоединяя это добавочное звено к действительным звеньям открытой цепи, получим замкнутую цепь, которая по своим свойствам совпадает с заданной открытой. Добавочное звено полезно представить себе в виде кулисы, в рамке которой сделана прорезь достаточной длины. Таким образом уравнение (1) и все получаемые из него следствия будут справедливы как для открытых, так и для замкнутых цепей P_m.

Пусть векторы $\mathbf{a}_{jk}$ при деформации цепи занимают на плоскости последовательно положения $1, 2 \ldots, n$.

Введя углы α_{jk} между неизменным направлением x и $\mathbf{a}_{jk}$ и воспользовавшись комплексным представлением вектора, разобьем уравнения (1) на два:

$$\sum_{j=1}^{j=r} a_j e^{i\alpha_{jk}} = -\sum_{j=r+1}^{j=m} \alpha_{jk} e^{i\alpha_{jk}}, \qquad \sum_{j=1}^{j=r} a_j e^{-i\alpha_{jk}} = -\sum_{j=r+1}^{j=m} a_{jk} e^{-i\alpha_{jk}}, \tag{2}$$

где a_j — длины некулисных звеньев ($j = 1, 2, \ldots, r$), a_{jk} — длины кулисных звеньев ($j = r+1, r+2, \ldots, m$).

Уравнения (2) линейны относительно a_j. При многократном их дифференцировании по времени[1] в левых частях соответствующих уравнений для производных окажутся выражения также линейные относительно a_j.

Отсюда следует, что зависимости между длинами звеньев цепи, углами α_{jk} и их производными по времени $\frac{d^n \alpha_{jk}}{dt^n}$ могут быть выражены двумя обобщенными уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{j=r} A_{jk} a_j e^{i\alpha_{jk}} = -A_k e^{i\alpha_k}, \qquad \sum_{j=1}^{j=r} \overline{A}_{jk} a_j e^{-i\alpha_{jk}} = -A_k e^{-i\alpha_k}, \tag{3}$$

где A_{jk} — обобщенные коэффициенты, зависящие от углов α_{jk} и их производных по времени,

$\overline{A}_{jk}$ — комплексные числа, сопряженные A_{jk},

$A_k e^{i\alpha_k}$ — комплексные числа, представляющие правые части уравнений (2) или результаты дифференцирования по времени.

Для практических целей достаточно рассмотреть уравнения (2) и их первые три производные по времени. Коэффициенты A_{jk} и A_k будут при этом иметь значения:

$$A_{jk} = 1, \qquad A_k = e^{-i\alpha_k} \sum_{j=r+1}^{j=m} a_{jk} e^{i\alpha_{jk}} \tag{4}$$

для уравнения (2),

$$A_{jk} = \omega_{jk}, \qquad A_k = e^{-i\alpha_k} \sum_{j=r+1}^{j=m} (a_{jk}\,\omega_{jk} - iv_{jk})\, e^{i\alpha_{jk}} \tag{5}$$

[1] Уравнения (2), очевидно, справедливы и для переменных α_{kj} и a_{jk}.

для их первых производных,

$$A_{jk} = \varepsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2,$$

$$A_k = e^{-i\alpha_k} \sum_{j=r+1}^{j=m} [a_{jk}\,\varepsilon_{jk} + 2v_{jk}\,\omega_{jk} + i\,(a_{jk}\,\omega_{jk}^2 - w_{jk})]\, e^{i\alpha_{jk}} \tag{6}$$

для их вторых производных и

$$A_{jk} = \dot{\varepsilon}_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk}\,\varepsilon_{jk},$$

$$A_k = e^{-i\alpha_k} \sum_{j=r+1}^{j=m} [a_{jk}\,\dot{\varepsilon}_{jk} + 3w_{jk}\,\omega_{jk} + 3v_{jk}\,\varepsilon_{jk} - a_{jk}\,\omega_{jk}^3 + \tag{7}$$

$$+ i\,(3v_{jk}\,\omega_{jk}^2 + 3a_{jk}\,\omega_{jk}\,\varepsilon_{jk} - \dot{w}_{jk})]\, e^{i\alpha_{jk}}$$

для их третьих производных.

В формулах (5) — (7) приняты следующие обозначения для производных от α_{jk} и a_{jk} по времени t:

$$\frac{d\alpha_{jk}}{dt} = \omega_{jk}, \qquad \frac{d^2\alpha_{jk}}{dt^2} = \varepsilon_{jk}, \qquad \frac{d^3\alpha_{jk}}{dt^3} = \dot{\varepsilon}_{jk},$$

$$\frac{da_{jk}}{dt} = v_{jk}, \qquad \frac{d^2a_{jk}}{dt^2} = w_{jk}, \qquad \frac{d^3a_{jk}}{dt^3} = \dot{w}_{jk}.$$

2. Общая схема решения. Задачи синтеза заключаются в установлении размеров звеньев кинематической цепи, удовлетворяющей ряду наперед заданных условий. Будем определять в дальнейшем размеры звеньев кинематических цепей по заданным наперед значениям углов α_{jk} и их производным по времени до любого порядка.

Пусть заданы некоторые углы α_{jk} в s_0 положениях кинематической P_m, их первые производные в s_1 положениях цепи, их вторые производные в s_2 положениях цепи и их третьи производные в s_3 положениях цепи.

Необходимо определить размеры звеньев соответствующей кинематической цепи и установить, какие из углов и их производных по времени могут быть выбраны произвольно.

Величины s_0, s_1, s_2, s_3 должны удовлетворять очевидным неравенствам:

$$s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3. \tag{8}$$

Для решения задачи рассмотрим систему

$$2s = 2\,(s_0 + s_1 + s_2 + s_3)$$

обобщенных уравнений (3) с значениями индекса $k = 1, 2, \ldots, s_0;\ 1, 2, \ldots, s_1;\ 1, 2, \ldots, s_2;\ 1, 2, \ldots, s_3$.

Система $2s$ линейных уравнений (3) с r неизвестными будет, вообще говоря, всегда иметь решение при $2s \leqslant r$.

При $2s > r$ независимыми могут быть только r линейных уравнений системы (3). В этом случае коэффициенты и свободные члены $2s$ уравнений должны быть выбраны так, чтобы всякий определитель $r+1$ порядка, выделенный из расширенной матрицы системы, был равен нулю. Однако достаточно, чтобы обратились в нуль любые $p=2s-r$ независимых определителей, что дает p уравнений совместности, которым должны удовлетворять коэффициенты и свободные члены.

Не нарушая общности изложения, примем в дальнейшем за независимые первые r уравнений системы (3). При этом для всевозможных задач по синтезу кинематической цепи с определенным числом звеньев получатся общие формулы, по которым вычисляются длины звеньев.

Если r число четное, то наиболее простая задача для некоторой цепи решается без уравнений совместности, так как только тогда возможно условие $2s=r$, при котором $p=0$. Если r число нечетное, то наиболее простая задача для некоторой цепи должна иметь по крайней мере одно уравнение совместности. Отсюда следует, что система (3) при четном числе неизвестных решается более простыми методами.

При решении практических задач по синтезу кинематических цепей размеры звеньев всегда будут определяться отношением двух определителей, составленных из коэффициентов системы (3). Уравнения совместности также записываются в виде определителей, составленных из тех же коэффициентов. Весьма важно знать, при каких условиях эти определители обращаются в нуль.

Составим из коэффициентов и свободных членов уравнений (3) определитель $r+1$ порядка Δ и сгруппируем его строки так, чтобы образовались две матрицы:

$$B=\| A_{1k}\, e^{i\alpha_{1k}}, \quad A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \ldots, \quad A_{rk}\, e^{i\alpha_{rk}}, \quad -A_k\, e^{i\alpha_k} \|;$$
$$C=\| \overline{A}_{1k}\, e^{-i\alpha_{1k}}, \quad \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}, \ldots, \quad \overline{A}_{rk}\, e^{-i\alpha_{rk}}, \quad -A_k\, e^{-i\alpha_k} \|.$$

Докажем теорему, устанавливающую тождественное обращение в нуль определителя типа Δ.

Теорема. Если все элементы трех произвольных столбцов матрицы B отличаются общими множителями и все элементы трех соответствующих им столбцов матрицы C также отличаются только общими множителями, то определитель Δ, составленный из матриц B и C, тождественно равен нулю.

Разложим определитель Δ на множители по теореме Лапласа. В результате разложения получим выражение, состоящее из суммы произведений всевозможных миноров (определителей) матрицы B на всевозможные алгебраические дополнения (определители) матрицы C.

Если в минор матрицы B входит один из столбцов, указанных в условии теоремы, то в соответствующее алгебраическое дополнение войдут обязательно два столбца, все элементы которых отличаются только общим множителем. Это следует из того, что по условию теоремы столбцы матриц B и C с элементами, отличающимися только общими множителями, образуют три столбца определителя Δ. Обратно, если в алгебраическое дополнение матрицы C входит один из столбцов, указанных в условии теоремы, то в соответствующий определитель матрицы B войдут два столбца с элементами, отличающимися только общим множителем. Аналогичным образом убеждаемся, что если в минор матрицы B не входят столбцы, указанные в условии теоремы, то они обязательно войдут в соответствующее алгебраическое дополнение и, наконец, если в алгебраическое дополнение матрицы C не входят столбцы, указанные в условии теоремы, то они должны целиком войти в соответствующий минор матрицы B.

Таким образом каждый член разложения определителя Δ будет иметь множителем определитель с двумя или тремя одинаковыми столбцами. Отсюда следует, что определитель Δ тождественно обратится в нуль.

Основной метод синтеза кинематической цепи P_m с определенным числом некулисных звеньев заключается в решении задачи для цепи с большим числом некулисных звеньев P_n и последующем переходе к искомой цепи путем наложения необходимого числа ограничений типа

$$\alpha_{jk} - \alpha_{j+1,k} = \beta_{j+1} = \mathrm{const}. \tag{9}$$

При этом очевидно

$$\frac{d^n \alpha_{jk}}{dt} = \frac{d^n \alpha_{j+1,k}}{dt},$$

что приведет в свою очередь к равенству соответствующих коэффициентов

$$A_{jk} = A_{j+1,k} \tag{10}$$

согласно формулам (4) — (7).

Доказанная теорема позволяет получить следующие важные следствия, связанные с установлением допустимого числа ограничений (9).

Следствие 1. Некулисное звено цепи P_m не может быть образовано тремя некулисными звеньями цепи P_n. В самом деле, если образовать некулисное звено цепи P_m из трех некулисных звеньев цепи P_n, то в формулы для определения размеров звеньев войдут определители, столбцы которых удовлетворяют всем условиям доказанной теоремы, что очевидно на основании формул (9) и (10).

В результате цепь P_m выродится в жесткий треугольник или будет иметь неопределенные и бесконечно большие звенья.

Следствие 2. Если обозначить число кулисных звеньев цепей P_m и P_n через f, то между m и n должна существовать зависимость

$$n \leqslant 2m - f. \tag{11}$$

В самом деле, если допустить, что

$$n > 2m - f,$$

то это равносильно условию

$$n - f > 2(m - f),$$

и тогда, при переходе от цепи P_n к цепи P_m, по крайней мере одно некулисное звено последней состояло бы из трех некулисных звеньев цепей P_n, что, согласно следствию 1, невозможно.

Перейдем теперь к выявлению общих закономерностей в образовании вычислительных формул и уравнений совместности для цепей с различным числом некулисных звеньев r. Решим сначала несколько частных задач и затем обобщим результаты.

3. Синтез цепи P_m для $r=1$. Согласно следствию 1 предыдущего параграфа, для решения различных задач по синтезу рассматриваемой цепи возьмем более сложную цепь с $r=2$. Система (3) запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{2} A_{jk}\, a_j\, e^{i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{i\alpha_k}, \qquad \sum_{j=1}^{2} \overline{A}_{jk}\, a_j\, e^{-i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{-i\alpha_k}.$$

Независимыми будут только два уравнения системы. На основании (8) эти уравнения образуют одно условие типа (2) при $k=1$, которое запишется в виде:

$$a_1\, e^{i\alpha_{11}} + a_2\, e^{i\alpha_{21}} = -A_1\, e^{i\alpha_1}, \qquad a_1\, e^{-i\alpha_{11}} + a_2\, e^{-i\alpha_{21}} = -A_1\, e^{-i\alpha_1}. \tag{12}$$

Для перехода к искомой цепи служит зависимость:

$$\alpha_{1k} - \alpha_{2k} = \beta_2 = \text{const}.$$

Исключая из (12) угол α_{11}, получим окончательно:

$$a_1\, e^{i(\alpha_{21}+\beta_2)} + a_2\, e^{i\alpha_{21}} = -A_1\, e^{i\alpha_1}, \qquad a_1\, e^{-i(\alpha_{21}+\beta_2)} + a_2\, e^{-i\alpha_{21}} = -A_1\, e^{-i\alpha_1}.$$

Составляем определители системы:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2i\,(x_0^2 + y_0^2)\sin\beta_2,\\
\Delta_1 &= 2i\,(y_0\, x_2 - x_0\, y_2),\\
\Delta_2 &= -2i\,[(y_0\, x_2 - x_0\, y_2)\cos\beta_2 + (x_0\, x_2 + y_0\, y_2)\sin\beta_2],
\end{aligned}$$

где для совпадения с последующими формулами введены обозначения:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \cos(\alpha_{21} - \alpha_1), \qquad & x_2 &= A_1,\\
y_0 &= \sin(\alpha_{21} - \alpha_1), \qquad & y_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Для определения размеров звеньев имеем формулы:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_0\, x_2 - x_0\, y_2}{(x_0^2 + y_0^2)\sin\beta_2},\\
a_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{(y_0\, x_2 - x_0\, y_2)\cos\beta_2 + (x_0\, x_2 + y_0\, y_2)\sin\beta_2}{(x_0^2 + y_0^2)\sin\beta_2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

4. Синтез цепи P_m для $r=2$. Следуя методу, намеченному в предыдущем параграфе, рассмотрим цепь с $r=4$, для которой уравнение (3)

$$\sum_{j=1}^{4} A_{jk}\, a_j\, e^{i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{i\alpha_k}, \qquad \sum_{j=1}^{4} \overline{A}_{jk}\, a_j\, e^{-i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{-i\alpha_k}.$$

Независимыми будут четыре уравнения системы с возможной комбинацией значений индекса k:

$k=1,2$ (уравнения, входящие в группу s_0),
$k=1,1$ (уравнения, входящие в группы s_0, s_1).

Вводя разные индексы p, q и налагая ограничения

$$\alpha_{1k}-\alpha_{2k}=\beta_2=\mathrm{const},\qquad \alpha_{3k}-\alpha_{4k}=\beta_4=\mathrm{const},$$

получим следующую систему независимых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 A_{2k}\, e^{i(\alpha_{2k}+\beta_2)}+a_2 A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}+a_3 A_{4k}\, e^{i(\alpha_{4k}+\beta_4)}+a_4 A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}=-A_k\, e^{i\alpha_k},\\ &a_1 \overline{A}_{2k}\, e^{-i(\alpha_{2k}+\beta_2)}+a_2 \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}+a_3 \overline{A}_{4k}\, e^{-i(\alpha_{4k}+\beta_4)}+a_4 \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}}=-A_k\, e^{-i\alpha_k}.\end{aligned}\right\}\quad (k=p,q)$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_{2p}\, e^{i(\alpha_{2p}+\beta_2)} & A_{2p}\, e^{i\alpha_{2p}} & A_{4p}\, e^{i(\alpha_{4p}+\beta_4)} & A_{4p}\, e^{i\alpha_{4p}}\\ A_{2q}\, e^{i(\alpha_{2q}+\beta_2)} & A_{2q}\, e^{i\alpha_{2q}} & A_{4q}\, e^{i(\alpha_{4q}+\beta_4)} & A_{4q}\, e^{i\alpha_{4q}}\\ \overline{A}_{2p}\, e^{-i(\alpha_{2p}+\beta_2)} & \overline{A}_{2p}\, e^{-i\alpha_{2p}} & \overline{A}_{4p}\, e^{-i(\alpha_{4p}+\beta_4)} & \overline{A}_{4p}\, e^{-i\alpha_{4p}}\\ \overline{A}_{2q}\, e^{-i(\alpha_{2q}+\beta_2)} & \overline{A}_{2q}\, e^{-i\alpha_{2q}} & \overline{A}_{4q}\, e^{-i(\alpha_{4q}+\beta_4)} & \overline{A}_{4q}\, e^{-i\alpha_{4q}} \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель Δ на множители по теореме Лапласа, получим:

$$\Delta=4\,(x_0^2+y_0^2)\sin\beta_2\sin\beta_4,$$

где x_0 и y_0 — соответственно действительные и мнимые части определителя второго порядка:

$$\delta_0=|\,A_{2k}\, e^{i\alpha_{4k}},\quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}\,|.\qquad (k=p,q)\qquad (15)$$

Поступая аналогичным образом с определителями неизвестных, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1&=-4\,(y_0\, x_2-x_0\, y_2)\sin\beta_4,\\ \Delta_2&=4\,[(y_0\, x_2-x_0\, y_2)\cos\beta_2+(x_0\, x_2+y_0\, y_2)\sin\beta_2]\sin\beta_4,\\ \Delta_3&=4\,(y_0\, x_4-x_0\, y_4)\sin\beta_2,\\ \Delta_4&=-4\,[y_0\, x_4-x_0\, y_4)\cos\beta_4+(x_0\, x_4+y_0\, y_4)\sin\beta_4]\sin\beta_2, \end{aligned}$$

где x_t, y_t $(t=2,4)$ — соответственно действительные и мнимые части определителей второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \delta_2&=|\,A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}},\quad A_k\, e^{i\alpha_k}\,|,\\ \delta_4&=|\,A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}},\quad A_k\, e^{i\alpha_k}\,|.\end{aligned}\right.\qquad (k=p,q)\qquad (15')$$

Для определения размеров звеньев имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_j&=(-1)^{\frac{2r+j+1}{2}}\,\frac{y_0\, x_{j+1}-x_0\, y_{j+1}}{(x_0^2+y_0^2)\sin\beta_{j+1}},\\ a_{j+1}&=(-1)^{\frac{2r+j+3}{2}}\,\frac{(y_0\, x_{j+1}-x_0\, y_{j+1})\cos\beta_{j+1}+(x_0\, x_{j+1}+y_0\, y_{j+1})\sin\beta_{j+1}}{(x_0^2+y_0^2)\sin\beta_{j+1}}.\end{aligned}\right\}\quad (j=1,3)\quad (16)$$

5. Синтез цепи P_m для $r=3$. Рассмотрим цепь с $r=6$. Соответствующие уравнения (3) будут:

$$\sum_{j=1}^{6} A_{jk}\, a_j\, e^{i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{i\alpha_k},$$

$$\sum_{j=1}^{6} \overline{A}_{jk}\, a_j\, e^{-i\alpha_{jk}} = -A_k\, e^{-i\alpha_k}.$$

Независимыми будут шесть уравнений с возможной комбинацией индекса k:

$k=1,2,3$ (уравнения, входящие в группу s_0),

$k=1,2,1$ (уравнения, входящие в группы s_0, s_1),

$k=1,1,1$ (уравнения, входящие в группы s_0, s_1, s_2).

Вводя разные индексы p, q, s и налагая ограничения

$$\alpha_{1k}-\alpha_{2k}=\beta_2=\text{const},$$
$$\alpha_{3k}-\alpha_{4k}=\beta_4=\text{const},$$
$$\alpha_{5k}-\alpha_{6k}=\beta_6=\text{const},$$

получим следующую систему независимых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 A_{2k}\, e^{i(\alpha_{2k}+\beta_2)} + a_2 A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}} + a_3 A_{4k}\, e^{i(\alpha_{4k}+\beta_4)} + a_4 A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}} + \\ &\qquad + a_5 A_{6k}\, e^{i(\alpha_6+\beta_6)} + a_6 A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}} = -A_k\, e^{i\alpha_k}, \\ & a_1 \overline{A}_{2k}\, e^{-i(\alpha_{2k}+\beta_2)} + a_2 \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}} + a_3 \overline{A}_{4k}\, e^{-i(\alpha_{4k}+\beta_4)} + a_4 \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}} + \\ &\qquad + a_5 \overline{A}_{6k}\, e^{-i(\alpha_{6k}+\beta_6)} + a_6 \overline{A}_{6k}\, e^{-i\alpha_{6k}} = -A_k\, e^{-i\alpha_k}. \end{aligned}\right\} \quad (k=p,\, q,\, s)$$

Составляя определители системы и разлагая их множители по теореме Лапласа, получим следующие результаты:

$$\Delta = 8i\,(x_0^2 + y_0^2)\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6,$$

$$\Delta_1 = 8i\,(y_0 x_2 - x_0 y_2)\sin\beta_4 \sin\beta_6,$$

$$\Delta_2 = -8i\,[(y_0 x_2 - x_0 y_2)\cos\beta_2 + (x_0 x_2 + y_0 y_2)\sin\beta_2]\sin\beta_4 \sin\beta_6,$$

$$\Delta_3 = -8i\,(y_0 x_4 - x_0 y_4)\sin\beta_2 \sin\beta_6,$$

$$\Delta_4 = 8i\,[(y_0 x_4 - x_0 y_4)\cos\beta_4 + (x_0 x_4 + y_0 y_4)\sin\beta_4]\sin\beta_2 \sin\beta_6,$$

$$\Delta_5 = 8i\,(y_0 x_6 - x_0 y_6)\sin\beta_2 \sin\beta_4,$$

$$\Delta_6 = -8i\,[(y_0 x_6 - x_0 y_6)\cos\beta_6 + (x_0 x_6 + y_0 y_6)\sin\beta_6]\sin\beta_2 \sin\beta_4,$$

где x_t, y_t $(t=0, 2, 4, 6)$ — соответственно действительные и мнимые части следующих комплексных определителей третьего порядка:

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &= \|\, A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}} \,\|, \\ \delta_2 &= \|\, A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \,\|, \\ \delta_4 &= \|\, A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \,\|, \\ \delta_6 &= \|\, A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \,\|. \end{aligned}\right\} \quad (k=p,\, q,\, s) \qquad (17)$$

Для определения размеров звеньев имеем формулы:

$$a_j = (-1)^{\frac{2r+j+1}{2}} \frac{y_0 x_{j+1} - x_0 y_{j+1}}{(x_0^2 + y_0^2 \sin \beta_{j+1}},$$

$$a_{j+1} = (-1)^{\frac{2r+j+3}{2}} \frac{(y_0 x_{j+1} - x_0 y_{j+1}) \cos \beta_{j+1} + (x_0 x_{j+1} + y_0 y_{j+1}) \sin \beta_{j+1}}{(x_0^2 + y_0^2) \sin \beta_{j+1}}. \quad j = 1, 3, 5) \quad (18)$$

6. Синтез цепи P_m для любого значения r. Рассмотрим цепь с $2r$ некулисными звеньями и соответствующими уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{2r} A_{jk} a_j e^{i\alpha_{jk}} = -A_k e^{i\alpha_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s_0, 1, 2, \ldots, s_1, 1, 2, \ldots, s_2, 1, 2, \ldots, s_3)$$

$$\sum_{j=1}^{2r} \overline{A}_{jk} a_j e^{-i\alpha_{jk}} = -A_k e^{-i\alpha_k}.$$

Независимыми будут $2r$ уравнений написанной системы с различными комбинациями индекса k, составленными из $1, 2, \ldots, r$ натуральных чисел. Вводим разные индексы $p_1, p_2, \ldots, p_r$ и налагаем на систему ограничения:

$$\begin{aligned} \alpha_{1k} - \alpha_{2k} &= \beta_2 = \text{const}, \\ \alpha_{3k} - \alpha_{4k} &= \beta_4 = \text{const}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{2r-1, k} - \alpha_{2r, k} &= \beta_{2r} = \text{const}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставляя формулы (13), (15), (17) и (14), (16), (18), напишем сразу общее решение системы

$$a_j = (-1)^{\frac{2r+j+1}{2}} \frac{y_0 x_{j+1} - x_0 y_{j+1}}{(x_0^2 + y_0^2) \sin \beta_{j+1}},$$

$$(j = 1, 3, \ldots, 2r-1) \quad (20)$$

$$a_{j+1} = (-1)^{\frac{2r+j+3}{2}} \frac{(y_0 x_{j+1} - x_0 y_{j+1}) \cos \beta_j + (x_0 x_{j+1} + y_0 y_{j+1}) \sin \beta_{j+1}}{(x_0^2 + y_0^2) \sin \beta_{j+1}},$$

где x_t, y_t, $(t = 0, 2, \ldots, 2r)$ — соответственно действительные и мнимые части определителей r порядка:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= | A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \ldots, A_{2r, k} e^{i\alpha_{2r, k}} |, \\ \delta_2 &= | A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k} e^{i\alpha_{6k}}, \ldots, A_{2r, k} e^{i\alpha_{2r, k}}, \quad A_k e^{i\alpha_k} |, \\ \delta_4 &= | A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{6k} e^{i\alpha_{6k}}, \ldots, A_{2r, k} e^{i\alpha_{2r, k}}, \quad A_k e^{i\alpha_k} |, \qquad (k = p_1, p_2, \ldots, p_r) \quad (21) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{2r} &= | A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \ldots, A_{2r-2, k} e^{i\alpha_{2r-2, k}}, A_k e^{i\alpha_k} |. \end{aligned}$$

На строгом доказательстве правильности полученного решения мы не останавливаемся, чтобы не увеличивать размеров статьи.

Для построения искомой цепи достаточно определить векторы $\mathbf{a}_{j,\,j+1}$, соединяющие действительные ее шарниры. Воспользовавшись геометрической суммой

$$\mathbf{a}_{j,\,j+1} = \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_{j+1}$$

и формулами (20), получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{mod} \mathbf{a}_{j,\,j+1} &= \frac{\operatorname{mod} \delta_{j+1}}{\operatorname{mod} \delta_0}, \\ \arg \mathbf{a}_{j,\,j+1} &= \alpha_{j+1,\,k} + \arg \delta_{j+1} - \arg \delta_0 + q\pi. \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 3, \ldots, 2r-1 \\ q = 0, 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) дают наиболее общее решение всех возможных кинематических задач по синтезу цепей P_m. Если звенья цепи P_m связаны одними вращательными парами, то для решения различных задач необходимо задать по крайней мере один размер какого-либо звена, который мы обозначим через a_0. Наиболее целесообразно выбрать $a_0 = \operatorname{mod} \delta_0$. Так как для рассматриваемой цепи a_0 войдет общим множителем во все элементы последних столбцов определителей δ_{j+1}, то $\delta_{j+1} = a_0\, \delta'_{j+1}$ и, следовательно, $\operatorname{mod} a_{j,\,j+1} = \operatorname{mod} \delta'_{j+1}$.

§ 7. Составление уравнений совместности. Как уже было установлено в § 2, уравнения совместности получаются путем выделения независимых определителей из расширенной матрицы системы (3). При принятом нами методе синтеза различных кинематических цепей расширенная матрица будет состоять из $2s$ строк и $2r+1$ столбцов (при $2s > 2r+1$). Следовательно, определители $2r+1$ порядка, приравненные нулю, представят собой уравнения совместности. Будем составлять всякий независимый определитель из $r+1$ произвольных строк расширенной матрицы системы (3) и из r строк, им сопряженных. Такой порядок составления определителей позволяет значительно упростить уравнения совместности. Начнем с простейших случаев и затем обобщим результаты. Пусть $r = 2$. Расширенной матрицей системы будет:

$$\begin{Vmatrix} A_{1k}\, e^{i\alpha_{1k}} & A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}} & A_{3k}\, e^{i\alpha_{3k}} & A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}} & -A_k\, e^{i\alpha_k} \\ \overline{A}_{1k}\, e^{-i\alpha_{1k}} & \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}} & \overline{A}_{3k}\, e^{-i\alpha_{3k}} & \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}} & -A_k\, e^{-i\alpha_k} \end{Vmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s_0; \quad 1, 2, \ldots, s_1; \quad 1, 2, \ldots, s_2; \quad 1, 2, \ldots, s_3).$$

Выделим из матрицы определитель пятого порядка и наложим на него ограничения (19):

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{21}\, e^{i(\alpha_{21}+\beta_2)} & A_{21}\, e^{i\alpha_{21}} & A_{41}\, e^{i(\alpha_{41}+\beta_4)} & A_{41}\, e^{i\alpha_{41}} & A_1\, e^{i\alpha_1} \\ A_{22}\, e^{i(\alpha_{22}+\beta_2)} & A_{22}\, e^{i\alpha_{22}} & A_{42}\, e^{i(\alpha_{42}+\beta_4)} & A_{42}\, e^{i\alpha_{42}} & A_2\, e^{i\alpha_2} \\ A_{23}\, e^{i(\alpha_{23}+\beta_2)} & A_{23}\, e^{i\alpha_{23}} & A_{43}\, e^{i(\alpha_{43}+\beta_4)} & A_{43}\, e^{i\alpha_{43}} & A_3\, e^{i\alpha_3} \\ \overline{A}_{21}\, e^{-i(\alpha_{21}+\beta_2)} & \overline{A}_{21}\, e^{-i\alpha_{21}} & \overline{A}_{41}\, e^{-i(\alpha_{41}+\beta_1)} & \overline{A}_{41}\, e^{-i\alpha_{41}} & A_1\, e^{-i\alpha_1} \\ \overline{A}_{22}\, e^{-i(\alpha_{22}+\beta_2)} & \overline{A}_{22}\, e^{-i\alpha_{22}} & \overline{A}_{42}\, e^{-i(\alpha_{42}+\beta_4)} & \overline{A}_{42}\, e^{-i\alpha_{42}} & A_2\, e^{-i\alpha_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим написанный определитель на множители по теореме Лапласа:

$$\delta = D \mid A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \mid \cdot \mid \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}, \quad \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}} \mid = 0,$$

где D — постоянный коэффициент, не зависящий от A_{jk} и α_{jk}.

Определитель второго порядка

$$\mid \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}} \quad \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}} \mid \qquad (k = 1, 2)$$

ни при каких условиях не может быть равен нулю, так как сопряженный ему определитель входит в общее решение независимых уравнений (формула 15), следовательно,

$$\delta = \mid A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \mid = 0. \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (23)$$

К аналогичному виду приводится и всякий определитель пятого порядка, составленный по указанному выше способу. Составим новую матрицу из s строк и трех столбцов:

$$M = \| A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \|$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s_0; \quad 1, 2, \ldots, s_1; \quad 1, 2, \ldots, s_2; \quad 1, 2, \ldots, s_3).$$

Легко видеть, что все определители типа (23) получаются из матрицы M. Число независимых определителей, которые могут быть выделены из матрицы M, равно $(s-2)(3-2) = s-2$. Присоединяя к $s-2$ определителям типа (23) им сопряженные, получим систему $2s-4$ независимых уравнений, что в точности соответствует необходимому для решения задачи числу уравнений совместности.

Пусть $r = 3$. Расширенной матрицей системы будет:

$$\left\| \begin{matrix} A_{1k}\, e^{i\alpha_{1k}}, & A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \ldots, A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}}, & -A_k\, e^{i\alpha_k} \\ \overline{A}_{1k}\, e^{-i\alpha_{1k}}, & \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}, \ldots, \overline{A}_{6k}\, e^{-i\alpha_{6k}}, & -A_k\, e^{-i\alpha_k} \end{matrix} \right\|$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s_0; \quad 1, 2, \ldots, s_1; \quad 1, 2, \ldots, s_2; \quad 1, 2, \ldots, s_3).$$

Выделим из матрицы определитель седьмого порядка:

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{jk}\, e^{i\alpha_{jk}} \\ \overline{A}_{jk}\, e^{-i\alpha_{jk}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0),$$

полагая для положительных α_{jk} $k = 1, 2, 3, 4$, а для отрицательных α_{jk} $k = 1, 2, 3$, и наложим на него ограничения (19). Воспользовавшись теоремой Лапласа, получим следующее разложение определителя:

$$\delta = D \mid A_{2k}\, e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k}\, e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k}\, e^{i\alpha_{6k}}, \quad A_k\, e^{i\alpha_k} \mid \mid \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}, \quad \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}}, \quad \overline{A}_{6k}\, e^{-i\alpha_{6k}} \mid = 0.$$

Определитель третьего порядка

$$\mid \overline{A}_{2k}\, e^{-i\alpha_{2k}}, \quad \overline{A}_{4k}\, e^{-i\alpha_{4k}}, \quad \overline{A}_{6k}\, e^{-i\alpha_{6k}} \mid \qquad (k = 1, 2, 3)$$

не может быть равен нулю, так как сопряженный ему определитель входит в решение независимых уравнений (формула 17). Следовательно,

$$\delta = | A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k} e^{i\alpha_{6k}}, \quad A_k e^{i\alpha_k} | = 0. \tag{24}$$

Составим новую матрицу из s строк и четырех столбцов:

$$M' = \| A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \quad A_{6k} e^{i\alpha_{6k}}, \quad A_k e^{i\alpha_k} \|$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s_0; \quad 1, 2, \ldots, s_1; \quad 1, 2, \ldots, s_2; \quad 1, 2, \ldots, s_3)$$

Легко видеть, что все определители типа (24) получаются из матрицы M'. Число независимых определителей, которые могут быть выделены из матрицы M', равно $(s-3)(4-3) = s-3$.

Присоединяя к $s-3$ определителям типа (24) им сопряженные, получим систему $2s-6$ независимых уравнений, что в точности соответствует необходимому для решения задачи числу уравнений совместности.

Обобщая изложенную схему, получим уравнения совместности для любого r.

Составим матрицу из s строк и $r+1$ столбцов:

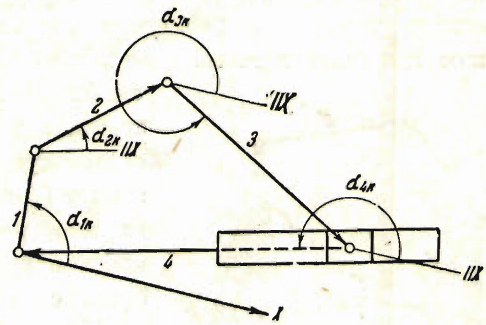
$$\| A_{2k} e^{i\alpha_{2k}}, \quad A_{4k} e^{i\alpha_{4k}}, \ldots, \quad A_{2r,\,k} e^{i\alpha_{2r,\,k}}, \quad A_k e^{i\alpha_k} \| \tag{25}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s_0; \quad 1, 2, \ldots, s_1; \quad 1, 2, \ldots, s_2; \quad 1, 2, \ldots, s_3).$$

Число независимых определителей $r+1$ порядка, которые могут быть выделены из матрицы (25), равно $(s-r)(r+1-r) = s-r$. Составляя эти определители и присоединяя к ним сопряженные, получим $2(s-r)$ независимых уравнений, что в точности соответствует необходимому для решения задачи числу уравнений совместности. Далее легко убедиться, что всякий определитель расширенной матрицы системы (3), составленный в установленном выше порядке, после наложения ограничений (19) и соответствующих сокращений превращается в определитель матрицы (25). Таким образом все необходимое для решения любой кинематической задачи уравнения совместности могут быть получены из соответствующей матрицы типа (25).

В простейших случаях система уравнений совместности решается элементарными методами. При трех и большем числе уравнений совместности система приводится обычно к алгебраическому уравнению высокого порядка, численное решение которого возможно по методу Греффе.

§ 8. Границы применимости метода. Пусть требуется найти кинематическую цепь P_m с $2r$ некулисными звеньями, которая должна подчиняться s_0 заданным условиям типа (2). Покажем, что для всякой кинематической цепи число s_0 имеет определенную верхнюю границу (нижняя граница s_0, очевидно, равна единице для любой цепи). Прежде всего отметим, что при $s_0 \leqslant r$ задача всегда имеет решение, определяемое системой линейных уравнений, если определитель системы не равен нулю. Отсюда следует, что верхнюю границу s_0 надо искать в области, где $s_0 > r$, т. е. для задач, решаемых с применением уравнений совместности.

Пусть неизвестные углы, которые должны быть определены из уравнений совместности, выбраны так, что два из них входят в одно условие (2). Отбросив это условие, определяем размеры звеньев кинематической цепи по остальным $s_0 - 1$ условиям (2). Далее, по известным размерам звеньев, решая систему двух отброшенных уравнений, вычислим величины двух неизвестных углов. Очевидно, что найденная кинематическая цепь будет удовлетворять всем s_0 условиям поставленной задачи. Следовательно, задание некоторого условия типа (2) только тогда имеет смысл, когда число неизвестных углов, в него входящих, не превышает одного. Отсюда вытекает, что общее число неизвестных, а следовательно, и уравнений совместности, не должно превосходить s_0, т. е. $2s_0 - 2r < s_0$, откуда находим искомую границу $s_0 < 2r$.



Фиг. 1.

Аналогичным образом доказывается, что наибольшее общее число условий $s_0 + s_1 < 4r$, а наибольшее общее число условий $s_0 + s_1 + s_2 < 6r$ и т. д.

§ 9. Синтез четырехзвенных механизмов. В машиностроении чаще всего используется четырехзвенник, кривошипно-шатунный механизм и механизм с вращающейся (качающейся) кулисой. Все эти механизмы получаются из кинематической цепи P_4 с одной кулисой (фиг. 1) при наложении ограничений [1]

$$a_{4k} = a_4 = \text{const}, \qquad \alpha_{4k} = \alpha_4 = \text{const}. \tag{26}$$

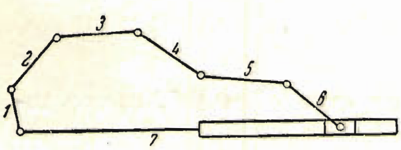
для четырезвенника,

$$\alpha_{1k} = \alpha_1 = \text{const}, \qquad \alpha_{4k} = \alpha_4 = \text{const} \tag{27}$$

для дезаксиального кривошипно-шатунного механизма и

$$\alpha_{1k} - \alpha_{4k} = \beta_4 = \text{const}, \quad \alpha_{2k} = \alpha_2 = \text{const} \tag{28}$$

для механизма с вращающейся кулисой.



Фиг. 2.

На основании условий (11) для синтеза цепи P_4 ($f = 1$, $m = 4$) можно воспользоваться кинематической цепью P_7 (фиг. 2) с последующим наложением ограничений:

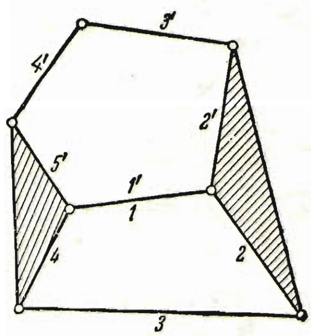
$$\begin{aligned} \alpha_{1k} - \alpha_{2k} &= \beta_2 = \text{const}, \\ \alpha_{3k} - \alpha_{4k} &= \beta_4 = \text{const}, \\ \alpha_{5k} - \alpha_{6k} &= \beta_6 = \text{const}. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом решения всевозможных кинематических задач по синтезу четырехзвенных механизмов определяются общими формулами (21), (22) и урав-

[1] Здесь и в дальнейшем предполагается, что у всех механизмов закреплены те звенья которые по налагаемым условиям могут двигаться поступательно.

нениями совместности, получаемыми из матрицы (25), при использовании общих ограничений (29) и одного из дополнительных ограничений (26) — (28) в зависимости от типа проектируемого механизма.

§ 10. Синтез шестизвенных механизмов. Шестизвенные механизмы образуются, по Ассуру, присоединением к кривошипу двух двухповодковых групп или одной трехповодковой так, что из получаемой цепи нельзя образовать одного контура с последовательным соединением звеньев. В связи с этим шестизвенный механизм не может быть частным случаем одной кинематической цепи P_m. Для получения всевозможных шестизвенных механизмов возьмем кинематическую цепь, состоящую из двух цепей P_4 и P_5 с одним общим звеном (фиг. 3). Чтобы упростить изложение, ограничимся рассмотрением цепей с одними вращательными парами. Размер общего звена 1 обеих цепей будем считать наперед заданным.



Фиг. 3.

Наложим на цепь P_4, P_5 общие ограничения:

$$\alpha_{2k} - \alpha_{2k}' = \text{const}, \qquad \alpha_{4k} - \alpha_{5k}' = \text{const}.$$

Из образованной таким образом цепи (фиг. 3) получаются следующие механизмы:

1. Шестизвенник первого класса третьего порядка[1] типа кулисы Стефенсона при

$$\alpha_{4k}' = \text{const}.$$

2. Шестизвенник первого класса второго порядка с диадой, присоединенной к кривошипу и коромыслу при

$$\alpha_{3k} = \text{const}.$$

3. Шестизвенник первого класса второго порядка с диадой, присоединенной к шатуну и стойке при

$$\alpha_{4k} = \text{const}.$$

Если на цепь P_4, P_5 наложить общие ограничения

$$\alpha_{2k} - \alpha_{2k}' = \text{const}, \qquad \alpha_{1k}' - \alpha_{5k}' = \text{const},$$

то из образованной таким образом цепи получаются следующие механизмы:

4. Шестизвенник первого класса второго порядка с диадой, присоединенной к кривошипу (коромыслу) и стойке при

$$\alpha_{5k}' = \text{const}.$$

---

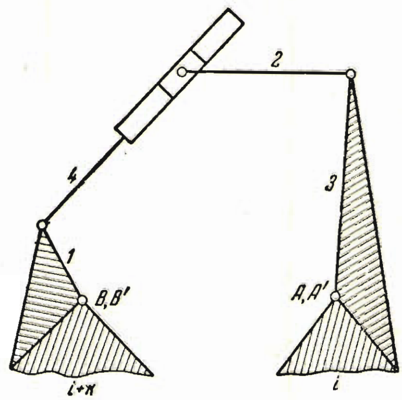
[1] Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся классификации плоских механизмов, разработанной Л. В. Ассуром.

5. Шестизвенник первого класса второго порядка с диадой, присоединенной к кривошипу (коромыслу) и шатуну при

$$\alpha_{3k} = \text{const}.$$

Указанными типами исчерпываются всевозможные шестизвенные механизмы с вращательными парами. Аналогичным образом образуются шестизвенные механизмы с вращательными и поступательными парами.

Таким образом синтез шестизвенных механизмов сводится к решению задачи для двух цепей P_4 и P_5.



Фиг. 4.

Для синтеза цепей P_4 и P_5 следует взять соответственно цепи P_7 и P_9. Размеры звеньев этих цепей определяются по формулам (21), (22), а все уравнения совместности получаются из матрицы (25). Переход к искомому шестизвенному механизму происходит при подстановке в общее решение соответствующих ограничений (приведенных выше). Изложенное относительно синтеза четырехзвенных и шестизвенных механизмов приводит к заключению, что для установления возможностей синтеза плоского механизма любой степени сложности достаточно убедиться в том, что он образуется из кривошипа и конечного числа цепей P_m. При этом сам способ соединения (наложения) цепей определяет те ограничения, которые должны быть наложены на общее решение для получения искомого механизма.

§ 11. Синтез механизмов первого класса второго порядка. *Теорема.* Всякий механизм первого класса второго порядка с n звеньями может быть образован из кривошипа и $(n-2)/2$ цепей P_5.

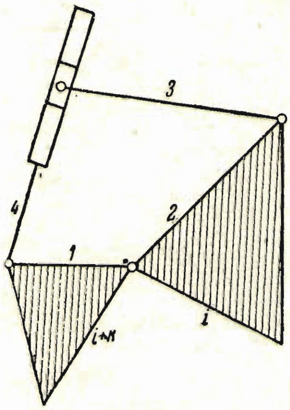
Допустим, что теорема верна для механизма с n звеньями, и докажем, что в таком случае она будет верна и для механизма с $n+2$ звеньями. Отметим точки присоединения звеньев цепи P_5 (шарниры) A и B, принадлежащие произвольным звеньям i и $i+k$ цепи с n звеньями. Далее возьмем цепь P_5 с двумя кулисами (фиг. 4) и присоединим ее шарниры A', B' к выбранным точкам A и B. Свяжем теперь жестко звенья i и 3, $i+k$ и 1, выбросим кулису 5 и наложим одно из следующих ограничений: $\alpha_{4k} = \text{const}$ или $\alpha_{1k} - \alpha_{4k} = \text{const}$. В результате получим механизм первого класса второго порядка с $n+2$ звеньями, образованный из кривошипа и $n/2$ цепей P_5. Так как для $n=4$, 6 в правильности теоремы мы убедились непосредственными построениями,[1] то отсюда следует, что она верна для любого четного числа n.

---

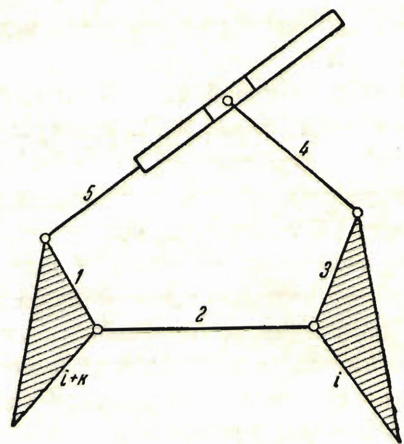
[1] При рассмотрении четырехзвенных и шестизвенных механизмов фигурировали цепи P_4, которые, очевидно, являются частными случаями общей цепи P_5, изображенной на фиг. 4.

При практическом синтезе рассмотренной цепи P_5 необходимо вычислить предварительно модули и аргументы векторов $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ для ряда положений механизма с n звеньями. В общем случае эти вычисления могут оказаться весьма громоздкими.

Легко доказать, что если звенья i и $i+k$ имеют общий шарнир или связаны общим звеном, то отпадает необходимость в указанных вычислениях. В первом случае достаточно взять цепь P_4 с одной кулисой и присоединить



Фиг. 5.



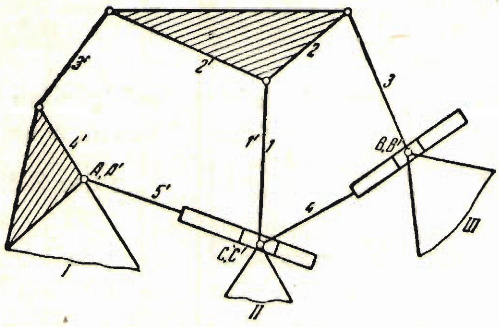
Фиг. 6.

ее шарнир к общему шарниру звеньев i и $i+k$ (фиг. 5). Во втором случае цепь P_5 с одной кулисой необходимо соединить с общим звеном основной цепи (фиг. 6).

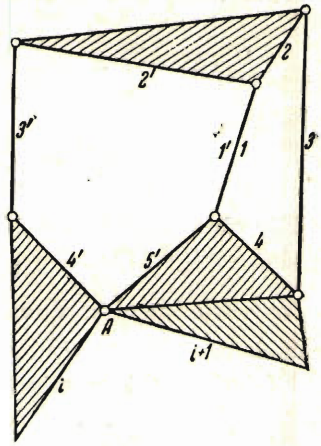
§ 12. Синтез механизмов первого класса третьего порядка. Механизмы первого класса третьего порядка образуются присоединением трехповодковой группы к механизмам того же класса второго порядка.

Теорема. Трехповодковую группу можно присоединить к трем произвольным звеньям механизма второго порядка посредством цепи, составленной из двух цепей P_4 и P_5. Отметим на звеньях механизма точки присоединения поводков (шарниры) A, B, C. Далее возьмем цепи P_4 и P_5 с общим звеном $1-1'$ и соединим в них жестко звенья 2 и $2'$ (фиг. 7). Наложим полученную цепь на механизм второго порядка так, чтобы совпали точки A и A', B и B', C и C', и соединим жестко звенья $4'$ и I. Отбросив кулисные звенья 4 и $5'$, получим трехповодковую группу, присоединенную к трем звеньям I, II, III механизма второго порядка. Доказательство, очевидно, не изменится, если цепи, образующие трехповодковую группу, будут многокулисными. При синтезе цепей P_4 и P_5 необходимо предварительно вычислить модули и аргументы векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ для ряда положений механизма второго порядка. Эти вычисления исключаются, если: 1) трехповодковая группа присоединяется к двум звеньям с общим шарниром посредством цепей P_4 и P_5 (фиг. 8), 2) трехповодковая группа присоединяется к двум звеньям, соединенным общим третьим звеном, посредством двух цепей P_4 и P_6 (фиг. 9).

Доказанными теоремами общие методы синтеза кинематических цепей P_m распространяются на все практически применяемые в ма-

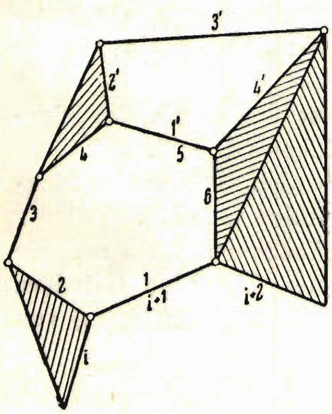


Фиг. 7.



Фиг. 8.

шиностроении механизмы с низшими парами. Аналогичным образом доказывается, что можно осуществить синтез любого сложного механизма более высокого класса и порядка. Опираясь на классификацию механизмов, разработанную Л. В. Ассуром, задачу можно сформулировать так: доказать, что всякая многоповодковая группа может быть образована из цепей P_m.



Фиг. 9.

Так как Л. В. Ассур в своей работе доказал, что всякий плоский механизм с низшими парами образуется из кривошипа и наслоения многоповодковых групп различной степени сложности, то тем самым доказывается теорема о возможности образования всякого плоского механизма из кривошипа и цепей P_m и устанавливается сам метод решения задач синтеза.

К сожалению, само доказательство не может быть включено в настоящую статью без заметного увеличения ее объема, в связи с чем мы ограничились рассмотрением теоремы только для частного случая механизмов второго и третьего порядков.

Поступила 26 II 1938.

ZUR SYNTHESE DER EBENEN KINEMATISCHEN KETTEN MIT NIEDEREN PAAREN

S. S. BLOCH

(Moskau)

(Zusammenfassung)

Für eine geschlossene kinematische Kette mit aufeinanderfolgenden Gliedern sind einige Winkel α_{jk} zwischen der unveränderlichen Führung x und den Gelenke verbindenden Vektoren und deren Ableitungen $\frac{d^n \alpha_{jk}}{dt}$ an der Zeit vorgeschrieben.

Es ist die kinematische Kette, die allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt, zu ermitteln. Die Abmessungen der Glieder der kinematischen Kette erhält man aus den Gleichungen (22), deren Determinanten δ_{j+1} ($j=-1, 2, 3, \ldots, 2r-1$) nach den Gleichungen (21) bestimmt werden müssen. Die Wahl der Werte α_{jk} und $\frac{d^n \alpha_{jk}}{dt^n}$ für eine Reihe von Aufgaben ist durch die Bedingungen des Zusammenbestehens des Systems der Gleichungen ersten Grades (3) beschränkt. Alle Gleichungen, die der Forderung des Zusammenbestehens genügen, lassen sich ableiten, wenn man unabhängige komplexe Determinanten der Matrize der Ordnung $r+1$ gleich Null setzt.

Die Synthese der viergliedrigen Mechanismen lässt sich durch eine kinematische Kette mit aufeinanderfolgenden Gliedern erreichen (Abb. 2).

Die Synthese der sechsgliedrigen Mechanismen wird mittels zweier kinematischen Ketten mit einem gemeinsamen Gliede ausgeführt (Abb. 3).

Die Synthese komplizierter mehrgliedriger Mechanismen wird auf die Synthese mehrerer kinematischer Ketten mit aufeinanderfolgenden Gliedern geleitet. Der gesuchte Mechanismus wird durch Verbindung (Auflegen) von gefundenen Ketten ausgebildet.