АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК | DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ | SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА | APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II в. 3. 1938 V. II, № 3.

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГО-ВЯЗКИХ ТЕЛ

А. Н. ГЕРАСИМОВ

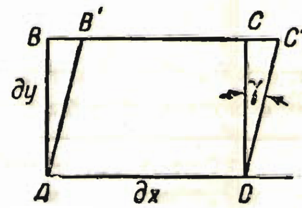
(Москва)

§ 1. Элементарные деформации для однородных изотропных упругих тел

Пусть упругий однородный и изотропный стержень длиной ∂x под действием растягивающего усилия приобретает удлинение ∂u_x.

По закону Гука, верному в пределах упругости, при такой деформации стержня в последнем возникает напряжение ν_x', равное:

$$\nu_x' = E\frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{1}$$



Фиг. 1.

где E есть модуль Юнга. Если обозначить абсолютные величины относительных сокращений линейных размеров в направлениях осей координат OY и OZ соответственно через $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial z}$, то

$$\nu_x' = -m' E\frac{\partial u_y}{\partial y} = -m' E \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{1'}$$

Минус в правой части указывает на сокращение поперечных размеров, а m' есть положительная постоянная, обратная коэффициенту Пуассона.[1]

Пусть $ABCD$ (фиг. 1) есть элементарный параллелепипед, выделенный внутри однородного и изотропного упругого тела; ребра параллелепипеда, параллельные осям прямоугольной системы координат, имеют соответственно длины ∂x, ∂y, ∂z. Считая грань AD неподвижной, представим себе, что противоположная грань BC вынуждена сдвинуться вдоль OX до положения $B'C'$. Обозначим BB' через ∂u_x. По закону Гука развивающееся при такой деформации напряжение τ_{xy}' должно быть пропорционально углу сдвига γ, так что

$$\tau_{xy}' = H\gamma = H\frac{\partial u_x}{\partial x}; \tag{2}$$

здесь H есть модуль сдвига.

[1] А. и Л. Феппль. Сила и деформация, I, ГТТИ, стр. 33, 1933.

Формулы, аналогичные (1) и (2), могут быть написаны и для двух других направлений OY и OZ.

§ 2. Деформации скоростей в упруго-вязком теле

Теперь рассмотрим это явление с гидромеханической точки зрения.

Когда стержень растягивается, то частицы вещества перемещаются вдоль оси стержня. Вещество как бы течет по стержню и последний представляет нечто подобное тому, что в гидродинамике называют трубкой тока. Однако площадь поперечного сечения стержня при растяжении сокращается, следовательно, для соблюдения условия неразрывности скорость движения частиц становится больше той, которая была бы при растяжении с постоянным сечением.[1] Появление ускорений, связанных с относительным сокращением поперечных размеров, может быть истолковано как результат действия сил; роль последних играют силы внутреннего трения (или вязкости), и можно было бы говорить о „напряжении" ν_x'' сил внутреннего трения, перпендикулярном к поперечному сечению стержня. Естественно предположить,[2] что это напряжение пропорционально изменению скорости при переходе от одного сечения к другому, бесконечно близкому, так что

$$\nu_x'' = \varepsilon \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}; \tag{3}$$

здесь $\dot{u}_x$ обозначает проекцию скорости на ось OX, а ε есть постоянная, которую можно было бы назвать продольным модулем вязкости.[2]

---

[1] Отсюда следует, что если при чисто упругой деформации мы имели бы относительное приращение длины

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\nu_x}{E},$$

то благодаря текучести вещества действительное приращение длины будет больше, а именно:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\nu_x}{E - \varepsilon^2}; \quad \text{отсюда} \quad \nu_x = E\frac{\partial u_x}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} = \nu_x' + \nu_x'', \quad \text{где} \quad \nu_x'' = -\varepsilon^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Все дальнейшее рассуждение основывается на соотношении

$$-\varepsilon \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right),$$

лежащем в основе релаксационной теории Максвелла, откуда получаем:

$$\nu_x'' = +\varepsilon \frac{\partial u_x}{\partial t}.$$

Таким образом *полное напряжение* ν_x *складывается из чисто упругого* ν_x' *и вязкого* ν_x''.

[2] Так как

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right),$$

то (3) обозначает, что ν_x'' пропорционально скорости деформации. См. статью „Elasticity", W. Thomson в IX издании „Британской энциклопедии".

Формула (3) является аналитическим выражением закона Ньютона, по которому сила внутреннего трения пропорциональна градиенту скорости. Другой случай применения этого закона можно проследить на деформации сдвига.

В самом деле, возвращаясь к фиг. 1, видим, что слои тела, параллельные оси OX, смещаясь, вынуждены скользить друг по другу. При этом они обмениваются количествами движения, т. е. приобретают ускорения единственно вследствие взаимодействий. Идя дальше, можно ввести в рассмотрение „тангенциальные напряжения τ''_{yx} сил внутреннего трения“, действующие на единичную площадку, перпендикулярную к OY, и направленные параллельно OX. По закону Ньютона напряжение τ''_{yx} сил внутреннего трения пропорционально градиенту скорости $\dot{u}_x$ при переходе от одного слоя к другому, с ним соприкасающемуся, т. е.

$$\tau''_{yx} = \eta \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}, \tag{4}$$

где постоянная η может быть названа поперечным модулем вязкости.[1]

Аналогично (3) и (4) можно было бы написать подобные формулы и для других осей координат.

Сопоставляя (1) с (3) и (2) с (4), мы видим формальное сходство элементарных законов Ньютона и Гука. Это сходство может быть сформулировано таким образом: скорость деформации по отношению к закону Ньютона играет такую же роль, как сама деформация по отношению к закону Гука. Однако коэффициенты пропорциональности в обоих законах существенно различны.

§ 3. Общая деформация упруго-вязких аморфных тел

Обычно считают, что до предела упругости тело ведет себя строго по закону Гука и разумеют под пределом упругости верхнюю границу точности этого закона. В этих пределах тело должно считаться вполне упругим. С достижением предела упругости закон Гука перестает быть верным и отступление от него выражается у аморфных тел прежде всего в появлении признаков текучести. При достаточно больших нагрузках текучесть вещества настолько дает себя чувствовать, что аморфное тело ведет себя, как вязкая жидкость.

Мы полагаем, что для некоторых веществ такое разделение свойств вряд ли может быть оправдано.

Во-первых, едва ли можно предположить возможность перерождения упругих сил в силы внутреннего трения. В самом деле, природа упругих сил

[1] Легко видеть, что

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

где γ — угол сдвига (фиг. 1). Следовательно, и в этом случае напряжение τ''_{yx} пропорционально скорости деформации.

существенно отличается от природы сил вязкости. Упругие силы зависят от смещений, т. е. от взаимного расположения частиц тела и потому консервативны, в то время как силы внутреннего трения, будучи обусловлены различием в скоростях отдельных частиц, не обладают силовой функцией. Наличию упругих сил соответствует наличие некоторых обратимых процессов, сопровождающихся переходом потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Наоборот, дифференциальные уравнения движения вязких тел, содержа члены с первой степенью дифференциала времени, описывают принципиально необратимые процессы.

Во-вторых, можно назвать вещества, которые, несомненно, одновременно обладают как упругими, так и вязкими свойствами. Достаточно назвать, например, хлебное тесто. При разрыве оно дает края, подобные тем, которые получаются при разрыве куска металла. Но с течением времени резкость краев сглаживается и кусок теста постепенно приобретает округлость формы, свойственную жидким телам.

Все это заставляет нас полагать, что при изучении деформации аморфных тел нужно принимать во внимание, вообще говоря, как наличие сил упругости, так и сил внутреннего трения.

На основании результатов §§ 1 и 2 и сказанного здесь заключаем, что при продольном растяжении упруго-вязкого тела возникает напряжение, которое благодаря независимости и аддитивности величин (1) и (2) нужно считать равным:

$$\nu_x = \nu_x' + \nu_x'' = \frac{\partial}{\partial x}(Eu_x + \varepsilon \dot{u}_x). \tag{5}$$

Аналогично при чистом сдвиге в упруго-вязком теле появляется тангенциальное напряжение:

$$\tau_{yx} = \tau'_{yx} + \tau''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(Hu_x + \eta \dot{u}_x). \tag{6}$$

Подобно (5) и (6), можно написать формулы для нормальных и тангенциальных напряжений по прочим направлениям.

§ 4. Тензор упругой деформации

Рассмотрим[1] две бесконечно близкие частицы однородного и изотропного упругого тела, положения которых определяются векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. После деформации положения этих частиц будут определены векторами

$$\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ есть вектор смещения частицы с начальным положением $\mathbf{r}$. Поэтому смещение частицы с начальным положением $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ есть

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}},\ d\mathbf{r}\right);$$

[1] Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ГТТИ, стр. 364, 1934.

Здесь $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}$ есть тензор, представляющий собой производную от вектора $\mathbf{u}$ по вектору $\mathbf{r}$. Обычным приемом его можно разложить на симметричную часть $\mathrm{Def}\,\mathbf{u}$, равную:

$$\mathrm{Def}\,\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

и антисимметричную часть

$$A'=\begin{Bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ +\omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 0 \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

где вектор ω определяется из уравнения:

$$\omega=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}; \tag{9}$$

поэтому

$$d\mathbf{u}(\mathbf{r})=\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}},\ d\mathbf{r}\right)=(\mathrm{Def}\,\mathbf{u},\ d\mathbf{r})+(A',\ d\mathbf{r})$$

и, следовательно, смещение частицы $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ после деформации оказывается равным

$$\mathbf{u}+(\mathrm{Def}\,\mathbf{u},\ d\mathbf{r})+\frac{1}{2}[\mathrm{rot}\,\mathbf{u},\ d\mathbf{r}], \tag{10}$$

так как легко проверить, что $(A',\ d\mathbf{r})=[\omega,\ d\mathbf{r}]$.

Из (10) видно, что перемещение частицы состоит из поступательного перемещения, из деформации этой частицы и из вращения ее как целого вокруг оси с направлением вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на угол $\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|$.

Симметричный тензор $\mathrm{Def}\,\mathbf{u}$, определяемый уравнением (7), носит название тензора деформаций смещений. Сумма его компонентов, стоящих на главной диагонали (первый инвариант), равна объемному расширению:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\theta'. \tag{11}$$

§ 5. Обобщенный закон Гука

На основании формул (1) и (1') можем утверждать, что напряжению ν_x соответствует относительное удлинение вдоль OX, равное $\frac{\nu_x'}{E}$. С другой стороны, вследствие растягивающих напряжений вдоль OY и OZ получаются сокращения в направлении OX, соответственно равные $\frac{\nu_y'}{m'E}$ и $\frac{\nu_z'}{m'E}$. Следовательно, полное удлинение вдоль OX благодаря аддитивности смещений оказывается равным:

$$\lambda_x' = \frac{\nu_x'}{E} - \frac{\nu_y}{m'E} - \frac{\nu_z'}{m'E}. \qquad (12')$$

Аналогично для двух других осей получим удлинения:

$$\lambda_y' = \frac{\nu_y'}{E} - \frac{\nu_x'}{m'E} - \frac{\nu_z'}{m'E}, \qquad \lambda_z' = \frac{\nu_z'}{E} - \frac{\nu_x'}{m'E} - \frac{\nu_y'}{m'E}. \qquad (12')$$

Уравнения (12′) можно представить в виде:

$$\lambda_\alpha' = \frac{1}{m'E}\{(m'+1)\nu_\alpha' - \pi'\}, \qquad (\alpha = x, y, z), \qquad (12)$$

где

$$\pi' = \nu_x' + \nu_y' + \nu_z'.$$

Наряду с симметричным тензором Def $\mathfrak{u}$ упругих деформаций рассмотрим теперь тензор Π' упругих напряжений, который, будучи отнесен к главным осям тензора Def $\mathfrak{u}$, имеет вид:

$$\Pi' = \begin{Bmatrix} \nu_x' & 0 & 0 \\ 0 & \nu_y' & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z' \end{Bmatrix}. \qquad (13)$$

Если ввести еще отнесенный к тем же осям единичный тензор

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad (14)$$

то (12) может быть представлено в следующей тензорной форме, служащей выражением обобщенного закона Гука:

$$\mathrm{Def}\,\mathfrak{u} = \frac{1}{m'E}\{(m'+1)\Pi' - \pi' I\}. \qquad (15)$$

Решая (15) относительно Π' и вводя упругие постоянные Ламé по формулам:

$$\frac{2\mu'}{m'E} = \frac{1}{m'+1}, \qquad \frac{2\mu}{m'-2} = \lambda, \qquad (16)$$

получим обобщенный закон Гука в виде:

$$\Pi' = 2\mu'\,\mathrm{Def}\,\mathfrak{u} + \lambda'\theta' I, \qquad (17)$$

откуда непосредственно могут быть получены компоненты тензора упругих напряжений в любой системе координат.

§ 6. Обобщение закона Ньютона

Рассуждения двух последних параграфов почти буквально применяются к рассмотрению деформации скорости и к обобщению закона Ньютона.

Если рассматриваемые частицы приобретут некоторое отрицательное приращение скорости в направлении OX, то вследствие увеличения поперечных размеров возникнут напряжения вязкости ν_y'' и ν_z'', действующие в направлении OY и OZ.

Поэтому деформации скорости в направлениях осей координат выразятся на основании (3) при помощи уравнений, аналогичных (12'). Именно, градиент скорости в направлении OX оказывается равным:

$$\lambda_x''=\frac{\nu_x''}{\varepsilon}-\frac{\nu_y''}{m''\varepsilon}-\frac{\nu_z''}{m''\varepsilon}, \tag{18'}$$

где ν_x'', ν_y'', ν_z'' — „напряжения" сил внутреннего трения, действующие в направлении осей OX, OY, OZ; ε — продольный модуль вязкости и $\frac{1}{m''}$ — число, аналогичное коэффициенту Пуассона. Для двух других осей получим:

$$\lambda_y''=\frac{\nu_y''}{\varepsilon}-\frac{\nu_x''}{m''\varepsilon}-\frac{\nu_z''}{m''\varepsilon}, \qquad \lambda_z''=\frac{\nu_z''}{\varepsilon}-\frac{\nu_x''}{m''\varepsilon}-\frac{\nu_y''}{m''\varepsilon}; \tag{18'}$$

эти уравнения могут быть представлены в более сокращенном виде:

$$\lambda_\alpha''=\frac{1}{m''\varepsilon}\{(m''+1)\nu_\alpha''-\pi''\} \qquad (\alpha=x,\ y,\ z), \tag{18}$$

если π'' определить аналогично π':

$$\pi''=\nu_x''+\nu_y''+\nu_z''.$$

Введение тензоров Π'' и I, аналогичных (13) и (14), позволит написать обобщенный закон Ньютона в виде:

$$\mathrm{Def}\,\dot{\mathbf{u}}=\frac{1}{m''\varepsilon}\{(m''+1)\Pi''-\pi''I\}, \tag{19}$$

где $\mathrm{Def}\,\dot{\mathbf{u}}$ есть симметричный тензор деформации скорости, равный, подобно (7):

$$\mathrm{Def}\,\dot{\mathbf{u}}=\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial\dot{u}_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_x}{\partial y}+\dfrac{\partial\dot{u}_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_x}{\partial z}+\dfrac{\partial\dot{u}_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_y}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot{u}_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial\dot{u}_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_y}{\partial z}+\dfrac{\partial\dot{u}_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_z}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot{u}_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{u}_z}{\partial y}+\dfrac{\partial\dot{u}_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial\dot{u}_z}{\partial z} \end{array}\right\}. \tag{20}$$

Вводя вместо ε и m'' коэффициенты вязкости μ'' и λ'', аналогичные коэффициентам Ламе́ μ' и λ', при помощи формул:

$$\frac{2\mu''}{m''\varepsilon}=\frac{1}{m''+1}, \qquad \frac{2\mu''}{m''-2}=\lambda'', \tag{21}$$

и решая (19) относительно Π'', получим обобщенный закон Ньютона в виде:

$$\Pi'' = 2\mu'' \operatorname{Def} \dot{\mathbf{u}} + \lambda'' \theta'' I, \tag{22}$$

где $\theta'' = \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}$ представляет собой скоростной коэффициент расширения.

Наконец, если принять во внимание наличие гидромеханического давления p, то благодаря аддитивности всех компонентов сил для тензора напряжений вязкости получим:[1]

$$\Pi'' = 2\mu'' \operatorname{Def} \dot{\mathbf{u}} + (\lambda'' \theta'' - p) I. \tag{23}$$

§ 7. Обобщенный закон Гука — Ньютона для упруго-вязких деформаций

Принимая во внимание независимость упругих и вязких сил друг от друга и их аддитивность для малых смещений, мы можем теперь построить тензор упруго-вязких „напряжений“ Π, выразив его в функции тензоров деформаций смещений и скоростей и их первых инвариантов θ' и θ''.

Именно, мы должны иметь:

$$\Pi = \Pi' + \Pi''. \tag{24}$$

По правилу сложения тензоров, найдем:

$$\Pi = 2\mu' \operatorname{Def} \mathbf{u} + \lambda' \theta' I + 2\mu'' \operatorname{Def} \dot{\mathbf{u}} + (\lambda'' \theta'' - p) I =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} 2\dfrac{\partial T^x}{\partial x} & \dfrac{\partial T_x}{\partial y} + \dfrac{\partial T_y}{\partial x} & \dfrac{\partial Tx}{\partial z} + \dfrac{\partial T_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial x} + \dfrac{\partial T_x}{\partial y} & 2\dfrac{\partial T_y}{\partial y} & \dfrac{\partial T_y}{\partial z} + \dfrac{\partial T_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T_z}{\partial x} + \dfrac{\partial T_x}{\partial z} & \dfrac{\partial T_z}{\partial y} + \dfrac{\partial T_y}{\partial z} & 2\dfrac{\partial T_z}{\partial z} \end{array} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial(\lambda' u_x + \lambda'' \dot{u}_x)}{\partial x} - p, & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial(\lambda' u_y + \lambda'' \dot{u}_y)}{\partial y} - p & 0 \\ 0 & 0, & \dfrac{\partial(\lambda' u_z + \lambda'' \dot{u}_z)}{\partial z} - p \end{array} \right\}, \tag{25}$$

где

$$T_x = \mu' u_x + \mu'' \dot{u}_x, \quad T_y = \mu' u_y + \mu'' \dot{u}_y, \quad T_z = \mu' u_z + \mu'' \dot{u}_z.$$

Отсюда видно, что Π есть симметричный тензор.

§ 8. Вычисление $\operatorname{div} \Pi$

Обозначим тензоры, стоящие в (25) справа, через Σ и T. Тогда

$$\operatorname{div} \Pi = \operatorname{div} \Sigma + \operatorname{div} T. \tag{26}$$

[1] Страхович. Прикладная математика и механика, 11, 1934.

Легко убедиться, что проекция вектора div Σ на ось OX есть

$$(\operatorname{div}\Sigma)_x = \Delta(\mu' u_x + \mu'' \dot{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \dot{\mathbf{u}}),$$

где Δ — оператор Лапласа. Аналогично найдем:

$$(\operatorname{div}\Sigma)_y = \Delta(\mu' u_y + \mu'' \dot{u}_y) + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \mathbf{u})$$

и

$$(\operatorname{div}\Sigma)_z = \Delta(\mu' u_z + \mu'' \dot{u}_z) + \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \mathbf{u}).$$

Далее, для компонентов div T получим:

$$(\operatorname{div} T)_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lambda' u_x + \lambda'' \dot{u}_x) - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(\operatorname{div} T)_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\lambda' u_y + \lambda'' \dot{u}_y) - \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$(\operatorname{div} T)_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\lambda' u_z + \lambda'' \dot{u}_z) - \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{div}\Pi)_x = \Delta(\mu' u_x + \mu'' \dot{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \dot{\mathbf{u}}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lambda' u_x + \lambda'' \dot{u}_x) - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_y = \Delta(\mu' u_y + \mu'' \dot{u}_y) + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \dot{\mathbf{u}}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\lambda' u_y + \lambda'' \dot{u}_y) - \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_z = \Delta(\mu' u_z + \mu'' \dot{u}_z) + \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \dot{\mathbf{u}}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\lambda' u_z + \lambda'' \dot{u}_z) - \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Отсюда непосредственно видно, что

$$\operatorname{div}\Pi = \Delta(\mu' \mathbf{u} + \mu'' \dot{\mathbf{u}}) + [(\mu' + \lambda')\operatorname{grad}\theta' + (\mu'' + \lambda'')\operatorname{grad}\theta''] - \operatorname{grad} p. \qquad (27)$$

§ 9. Уравнения Ламе — Навье — Стокса для упруго-вязких деформаций

Пусть ρ есть масса в единице объема данного упруго-вязкого тела. Если на единицу массы действует внешняя сила F, то действующая на элемент dv объема тела внешняя сила есть $\rho F dv$. Далее, очевидно, что $-\rho \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} dv$ представляет собой силу инерции рассматриваемого элемента dv. Если, наконец, на элемент ds поверхности рассматриваемого объема V действует напряжение по нормали $\mathbf{n}$, равное ν_n, то по принципу Д'Аламбера условие динамического равновесия объема представится в виде:

$$\int_V \rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt}\right) dv + \int_S \nu_n \, ds = 0.$$

Заменяя, по формуле Гаусса, интеграл по поверхности объемным интегралом, получаем:

$$\int_V \left\{\rho\left[\mathbf{F} - \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt}\right] + \operatorname{div}\Pi\right\} dv = 0,$$

откуда вследствие произвола в выборе V должно быть:

$$\rho\left(\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} - \mathbf{F}\right) = \operatorname{div} \Pi. \tag{28}$$

Подставляя найденное для $\operatorname{div}\Pi$ значение (27), мы получим закон изменения деформаций в упруго-вязком теле с течением времени:

$$\rho\left(\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} - \mathbf{F}\right) = \Delta\,(\mu'\mathbf{u} + \mu''\dot{\mathbf{u}}) + [\mu'+\lambda')\operatorname{grad}\theta' + (\mu''+\lambda'')\operatorname{grad}\theta''] - \operatorname{grad} p. \tag{29}$$

При $\mu''=\lambda''=0$ и при $p=0$ получаем уравнения Ламé, лежащие в основе теории упругости:

$$\rho\left(\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} - \mathbf{F}\right) = \mu'\,\Delta\mathbf{u} + (\mu'+\lambda')\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Наоборот, при $\mu'=\lambda'=0$ из (29) получается система уравнений Навье-Стокса для движения вязких жидкостей:

$$\rho\left(\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} - \mathbf{F}\right) = \mu''\,\Delta\dot{\mathbf{u}} + (\mu''+\lambda'')\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{grad} p,$$

где обычно полагают $\mu''+\lambda''=\frac{1}{3}\mu''$.

Наконец, применение (29) к одномерной задаче о колебаниях упруго-вязких нитей приводит к уравнению:

$$\mu''\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + \mu'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F,$$

которое подробно изучалось в нашей работе „Проблема упругого гистерезиса и внутреннее трение“.[1]

Поступила 10 XI 1937. 5 VI 1937

LES PRINCIPES DE LA THÉORIE DE DÉFORMATIONS DE CORPS ÉLASTO-VISQUEUX

A. N. GUÉRASSIMOV

(Résumé)

Dans les considérations proposées ici nous avons donné un système d'équations linéaires, contenant comme un cas particulier les équations de Lamé de la théorie d'élasticité classique et les équations de Navier-Stokes de l'hydromécanique d'un liquide visqueux à la question des déformations de tous les corps amorphes.

[1] См. Прикл. мат. и мех., нов. серия, вып. 4, т. I, 1938.