

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АРОК ПРИ НЕПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

А. Б. МОРГАЕВСКИЙ

(Днепропетровск)

В этой работе рассмотрен вопрос об устойчивости кривого стержня с параболической осью, нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой, при неплоской деформации. Для решения задачи воспользуемся известными уравнениями теории тонких стержней.¹

6 уравнениями Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{ds} - rV_y + qV_z + \bar{q}_x &= 0, & \frac{dL_x}{ds} - rL_y + qL_z - V_y &= 0, \\ \frac{dV_y}{ds} - pV_z + rV_x + \bar{q}_y &= 0, & \frac{dL_y}{ds} - pL_z + rL_x + V_x &= 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + pV_y + \bar{q}_z &= 0, & \frac{dL_z}{ds} - qL_x + pL_y &= 0, \end{aligned} \quad (I)$$

6 кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{dx}{ds} - r_0 \beta + q_0 \gamma, & \beta &= \frac{du}{ds} + q_0 w - r_0 v, \\ \delta q &= \frac{d\beta}{ds} - p_0 \gamma + r_0 \alpha, & -\alpha &= \frac{dv}{ds} + r_0 u - p_0 w, \\ \delta r &= \frac{d\gamma}{ds} - q_0 \alpha + p_0 \beta, & 0 &= \frac{dw}{ds} + p_0 v - q_0 u, \end{aligned} \quad (II)$$

и известными приближенными соотношениями:

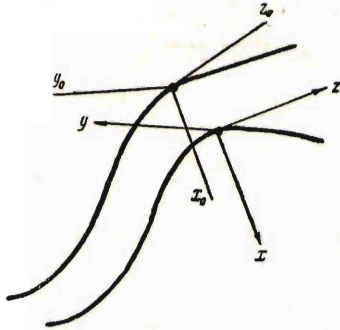
$$L_x = A \delta p, \quad L_y = B \delta q, \quad L_z = C \delta r, \quad (III)$$

где V и L — главный вектор и главный момент упругих сил,
 \bar{q} — интенсивность внешней нагрузки,

p_0, q_0, r_0 — компоненты кривизны оси арки и степень кручения до деформации,
 p, q, r — компоненты кривизны оси арки и степень кручения после деформации,

¹ Ляв. Математическая теория упругости, гл. XVIII и XIX; Е. Л. Николаи. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых равномерно распределенным нормальным давлением.

где u, v, w — проекции упругих перемещений на оси x_0, y_0, z_0 ,
 α, β, γ — углы поворота сечения вокруг осей x_0, y_0, z_0 ,
 A, B, C — жесткости при изгибе и кручении.



Фиг. 1.

Ось z_0 направлена по касательной к оси арки до деформации в сторону возрастающих дуг, оси x_0, y_0 — по главным осям сечения, как показано на фиг. 1.

Оси x, y, z направлены аналогично по отношению к оси арки после деформации.

Считая деформации арки в момент потери устойчивости при $q = q_{кр}$ весьма малыми, получаем на основании (I) и (II) две следующие не зависящие друг от друга системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right) \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{dL_y}{d\theta}\right) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\bar{q}_{x_0} \rho_0^2 L_y}{B}\right) + \rho_0 \delta \bar{q}_z - \frac{d}{d\theta} (\rho_0 \delta q_x) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \rho_0 \int_0^{\theta} \rho_0 \frac{L_y}{B} d\theta + C_0 \rho_0 i;$$

$$\frac{d^3 L_z}{d\theta^3} - \frac{\rho_0'}{\rho_0} \frac{d^2 L_z}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{\rho_0^3 \bar{q}_{x_0}}{A}\right) \frac{dL_z}{d\theta} - \frac{\rho_0'}{\rho_0} L_z + \rho_0^2 \delta \bar{q}_y = 0, \quad (2)$$

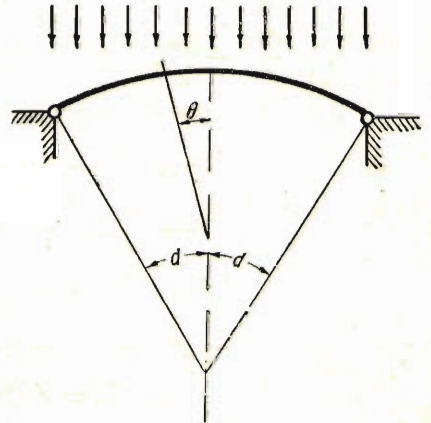
$$\frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} + \gamma = \rho_0' \frac{L_z}{C} + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C}\right) \rho_0 \frac{dL_z}{d\theta}, \quad \frac{dv}{d\theta} = \rho_0^2 \frac{L_z}{C} - \rho_0 \frac{d\gamma}{d\theta},$$

где θ — угол между радиусом кривизны и вертикальной осью симметрии (фиг. 2),
 ρ_0 — радиус кривизны арки до деформации.

Уравнения (1), как известно, соответствуют плоской деформации арки, уравнения же (2) являются основными дифференциальными уравнениями рассматриваемой нами задачи.¹

Таким образом значения $q_{кр}$, при которых арка, теряя устойчивость, выпучивается из своей плоскости, могут быть найдены как собственные числа системы линейных дифференциальных уравнений (2) при соответствующих граничных условиях.

При неплоской деформации величина критической нагрузки $q_{кр}$ весьма сильно зависит от характера поведения нагрузки. Очевидно, с точки

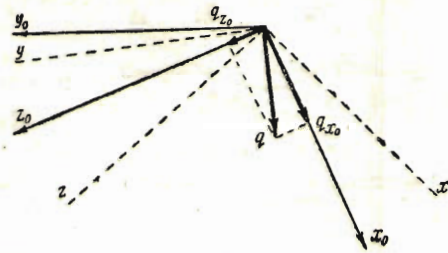


Фиг. 2.

¹ Для частного случая круговой арки эти уравнения (2) содержатся в вышеуказанной работе проф. Е. Л. Николаи. В общем виде они получены одновременно с автором и независимо от него В. А. Повиным (см. его работу „Устойчивость плоского кривого бруса“, Сборник ДИИТ, 1937).

зрения практических приложений, наиболее интересным является тот случай, когда внешняя нагрузка при деформации от потери устойчивости сохраняет свое вертикальное направление, а точка ее приложения перемещается вместе с дугой. Именно так ведет себя собственный вес арки, вес поезда и пр.

Рассмотрим параболическую арку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой \bar{q} (фиг. 3).



Фиг. 3.

В этом случае будем иметь:

$$\rho_0 = \frac{r}{\cos^3 \theta}, \quad \bar{q}_{x_0} = \bar{q} \cos^2 \theta, \quad \bar{q}_{y_0} = \bar{q} \cos \theta \sin \theta, \quad \bar{q}_{z_0} = 0. \quad (3)$$

Как видно из чертежа (фиг. 3),

$$\delta \bar{q}_y = \bar{q}_{x_0} \cos(x_0 y) + \bar{q}_{z_0} \cos(z_0 y).$$

Принимая во внимание таблицу косинусов углов между осями x, y, z и x₀, y₀, z₀:

	x	y	z
x ₀	1	−γ	β
y ₀	γ	1	−α
z ₀	−β	α	1

а также соотношения (3), получаем:

$$\delta \bar{q}_y = \bar{q} \cos^2 \theta (\alpha \operatorname{tg} \theta - \gamma). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнения (2) и выполнив замену переменных

$$L_x = V \cos \theta, \quad \gamma = \frac{r}{A} \varphi, \quad e t = \operatorname{tg} \theta, \quad (5)$$

где $e = \operatorname{tg} \alpha$, запишем систему (2) в следующем виде:

$$\frac{d^3 V}{dt^3} = -m e^2 \left[(1 + e^2 t^2)^{3/2} \frac{dV}{dt} - \left(1 + \frac{A}{C}\right) e^2 t (1 + e^2 t^2)^{1/2} V - e \frac{(1 + e^2 t^2) t \frac{d\varphi}{dt} - \varphi}{\sqrt{1 + e^2 t^2}} \right], \quad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2e^2 t}{1+e^2 t^2} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{e^2}{(1+e^2 t^2)^2} \varphi + \left(1 + \frac{A}{C}\right) e \frac{dV}{dt} + \left(2 \frac{A}{C} - 1\right) \frac{e^3 t}{1+e^2 t^2} V, \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{A} (1+e^2 t^2)^{3/2} \left[a(1+e^2 t^2)^{1/2} \frac{A}{C} V - \frac{d\varphi}{dt} \right], \quad (8)$$



где $m = \bar{q}r^3/A$.

Нетрудно заметить, что уравнения (6) и (7) интегрируются независимо от уравнения (8).

Замена переменных (5) позволяет избежать дробления интервала при численном интегрировании и сильно сокращает вспомогательные таблицы.

Если концы арки заделаны жестко или закреплены шарнирами, оси которых перпендикулярны к плоскости арки, то граничные условия, при которых следует интегрировать систему (2), будут следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } \theta = +a \\ \text{для } \theta = -a \end{array} \right\} \gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad v = 0. \quad (9)$$

Воспользовавшись заменой переменных (5), получаем для интегрирования системы (6, 7, 8) граничные условия в следующей форме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } t = +1 \\ \text{для } t = -1 \end{array} \right\} \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = eV \frac{A}{C}, \quad v = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим случай симметричной деформации (фиг. 4).

Вычисления показывают, что именно этой форме деформации соответствует наименьшее значение $\bar{q}_{кр}$ для рассмотренных ниже параболических арок, у которых отношение стрелы к пролету $h/l \leq 0.3$.

В этом случае функции v и φ будут четными, а V — нечетной и, следовательно, условия (10) могут быть заменены следующими:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } t = 0 \quad V = 0, \quad \frac{d^2V}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \text{для } t = 1 \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{C} eV, \quad v = 0. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что для нахождения параметра m достаточно интегрировать уравнения (6) и (7) при первых пяти условиях (11). Коль скоро будут найдены V и φ , функция v может быть определена одной квадратурой. Условие $v = 0$ при $t = 1$ всегда может быть обеспечено подбором одной произвольной постоянной.

Общий интеграл системы (6) и (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} V &= A_1 V_1 + B_1 V_2 + C_1 V_3 + D_1 V_4 + E_1 V_5, \\ \varphi &= A_1 \varphi_1 + B_1 \varphi_2 + C_1 \varphi_3 + D_1 \varphi_4 + E_1 \varphi_5, \end{aligned}$$

где V_1, \dots, V_5 и $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ суть независимые частные решения, а A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — произвольные постоянные. Распорядимся этими постоянными так, чтобы

$$A_1 = V_{t=0}, \quad B_1 = \frac{dV}{dt} \Big|_{t=0}, \quad C_1 = \frac{d^2 V}{dt^2} \Big|_{t=0}, \quad D_1 = \varphi_{t=0}, \quad E_1 = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0}.$$

На основании условий (11) заключаем, что

$$A_1 = C_1 = E_1 = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} V &= B_1 V_2 + D_1 V_4, \\ \varphi &= B_1 \varphi_2 + D_1 \varphi_4. \end{aligned}$$

Значения функций V_2, V_4, φ_2 и φ_4 вычисляем, интегрируя систему уравнений (6) и (7) численно по методу Адамса-Штермера или Вольпера¹ при таких граничных условиях:

для вычисления V_2 и φ_2

$$\text{при } t=0 \quad V_1=0, \quad \frac{d^2 V}{dt^2}=0, \quad \varphi_1=0, \quad \frac{d\varphi}{dt}=0, \quad \frac{dV_1}{dt}=1;$$

для вычисления V_4 и φ_4

$$\text{при } t=0 \quad V_4=0, \quad \frac{dV_4}{dt}=0, \quad \frac{d^2 V_4}{dt^2}=0, \quad \frac{d\varphi}{dt}=0, \quad \varphi=1.$$

Воспользовавшись условием $\varphi(1)=0$, определяем постоянную D_1 через B_1 :

$$D_1 = -\frac{\varphi_2(1)}{\varphi_4(1)} B_1.$$

Постоянную B_1 , не нарушая общности рассуждений, полагаем равной единице.

При интегрировании следует задаваться параметром m , подбирая его так, чтобы было удовлетворено условие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{C} e^V \quad \text{при } t=1.$$

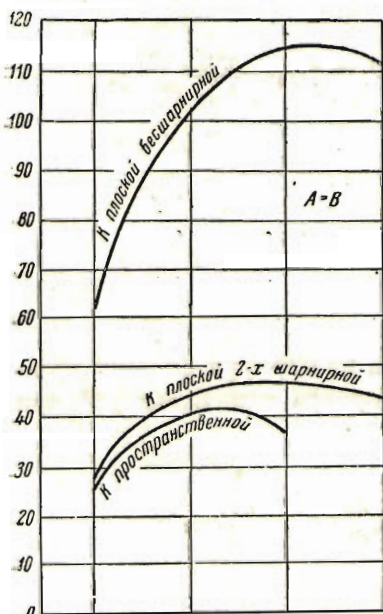
Для составления таблиц можно воспользоваться разложением V и φ в ряд Тейлора или формулами для начала по нисходящей строке разностей.

¹ Метод численного интегрирования Вольпера является обобщением метода Адамса-Штермера для уравнений 3 и 4-го порядков. См. отчеты НИС Днепропетровского металлургического инст. за 1936 г. по теме «Численные методы интегрирования уравнений 3 и 4-го порядков».

Когда скоро известен параметр m , критическая нагрузка $q_{кр}$ может быть найдена по формуле:

$$q_{кр} = \frac{mA}{r^3} \left(= \frac{kA}{l^3} \right),$$

где $k = 512 (h/l)^3$, A — жесткость поперечного сечения относительно оси x .



Фиг. 5.

На фиг. 5 даны для сравнения кривые коэффициентов k для пространственной деформации арки и k для плоской деформации двух шарнирных и бесшарнирных арок. Сечение арки — квадрат.

Нами были вычислены значения коэффициентов m и k для параболических арок с разными $h/l \leq 0.3$ и A/C соответствующим некоторым формам прямоугольного поперечного сечения.

Ниже приводим таблицу коэффициентов k .¹

Таблица 1

A/C	h/l		
	0.1	0.2	0.3
0.7	28.5	41.5	40.0
1.0	28.5	41.0	38.5
2.0	28.0	40.0	36.5

В табл. 2 даны значения A/C для различных форм прямоугольного поперечного сечения.

Таблица 2

a/b	3/2	1	1/2	1/10
A/C	$0.955 \frac{E}{G}$	$0.592 \frac{E}{G}$	$0.350 \frac{E}{G}$	$0.268 \frac{E}{G}$

Аналогично можно вычислить значения коэффициентов и для несимметричной деформации, а также для того случая, когда концы арки закреплены шарнирами, оси которых лежат в плоскости самой арки, как показано на фиг. 6.

¹ В вычислении этой и последующих таблиц коэффициентов m и k принимал участие Н. Н. Турчанинов.

Для круговой бесшарнирной арки постоянного сечения, нагруженной радиальной нагрузкой, сохраняющей при деформации свое направление, параллельное первоначальной плоскости арки, система уравнений (2) может быть проинтегрирована в конечной форме. В этом случае для вычисления m получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{(\lambda_1^2 - 1)^2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \lambda_1 \alpha = \frac{(\lambda_2^2 - 1)^2}{\lambda_2} \operatorname{tg} \lambda_2 \alpha,$$

где

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m}{2}\right)^2 - 1 + \frac{A}{C} m}.$$

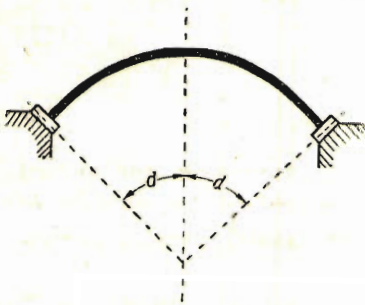
Для круговых двухшарнирных, а также для бесшарнирной арки, когда внешние силы поворачиваются вместе с дугой, задача была решена проф. Е. Л. Николаи.¹

Система уравнений (2) может быть весьма просто проинтегрирована в том случае, если при деформации внешние силы поворачиваются вместе с сечением, как показано на фиг. 6. В этом случае $\delta \bar{q}_y = 0$ и первое уравнение системы (2) интегрируется независимо от второго и третьего. Таким образом правая часть второго уравнения системы (2) не зависит от φ , и мы можем сразу написать его интеграл в следующем виде:

$$\gamma = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \int_0^\theta \Phi(z) \sin(\theta - r) dr, \quad (12)$$

где $\Phi(z)$ есть правая часть рассматриваемого уравнения.

Из третьего уравнения (2) находим:



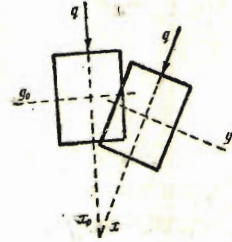
Фиг. 7.

$$\begin{aligned} v = & \int_0^\theta \rho_0^2 \frac{L_2}{C} d\theta + C_1 \int_0^\theta \rho_0 \sin \theta d\theta - \\ & - C_2 \int_0^\theta \rho_0 \cos \theta d\theta - \int_0^\theta \rho_0 \cos \theta \int_0^\theta \Phi(z) \cos z dz d\theta - \\ & - \int_0^\theta \rho_0 \sin \theta \int_0^\theta \Phi(z) \sin z dz d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Если концы арки зажаты и не могут поворачиваться вокруг оси z , то граничные условия имеют вид (9). Если концы арки закреплены шарнирами, как показано на фиг. 7, то граничные условия будут следующие:

$$\text{для } \theta = \pm a \quad L_x = 0, \quad v = 0, \quad \alpha = 0. \quad (14)$$

¹ Проф. Е. Л. Николаи. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, нагруженных равномерно распределенным давлением. Изв. Петроград. Политехн. инст., 1918 г.



Фиг. 6.

Рассмотрим схему интегрирования уравнений (2) для последнего случая как наиболее простого.

Воспользовавшись условиями $v=0$, $\alpha=0$ при $\theta=+a$, определяем произвольные постоянные C_1 и C_2 .

Условия $\alpha=0$, $v=0$ при $\theta=-a$ требуют, чтобы для параболической арки было:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 a} \right) \Phi(\theta) d\theta = -\frac{1}{C} \int_{-a}^{+a} \frac{L_z}{\cos^6 \theta} d\theta. \quad (15)$$

Если арка деформируется симметрично, то $\Phi(z)$ есть функция четная и, следовательно, условие (15) удовлетворяется тождественно и для решения задачи следует интегрировать первое уравнение системы (2) при условиях:

$$\text{для } \theta=0 \quad L_z=0, \quad \frac{d^2 L_z}{d\theta^2}=0,$$

$$\text{для } \theta=a \quad L_x=0.$$

Рассмотрим снова параболическую арку постоянного сечения с вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Приняв во внимание (3) и сделав снова замену переменных

$$V \cos \theta = L_z, \quad et = \operatorname{tg} \theta,$$

получаем дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$\frac{d^3 V}{dt^3} = -me^2 \left[(1 + e^2 t^2) \frac{dV}{dt} - e^2 t V \right] \sqrt{1 + e^2 t^2} \quad (16)$$

с тремя граничными условиями:

$$\text{для } t=0 \quad V=0, \quad \frac{d^2 V}{dt^2}=0, \quad (17)$$

$$\text{для } t=1 \quad \frac{dV}{dt} = \frac{e^2 V}{1 + e^2}. \quad (18)$$

Для вычисления коэффициентов m можно воспользоваться численным методом. Приблизительно m может быть весьма просто вычислено по методу Пикара.¹ При этом можно достичь вполне удовлетворительной точности, ограничиваясь всего одним приближением.

Для пологих арок $1/\sqrt{1 + e^2 t^2}$ в уравнении (15) можно без значительной погрешности заменить его средним значением:

$$\epsilon = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 t^2}} dt$$

или даже положить равным единице.

¹ Идея изложенного ниже приближенного приема сообщена нам доц. Д. Б. Вольпером, применявшим его для расчета сетчатых оболочек и одношарнирных арок.

Обозначим

$$\kappa = \frac{me^2}{\varepsilon}. \quad (19)$$

Зададимся V в форме полинома

$$V = t + bt^3 + ct^5. \quad (20)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (17) и уравнению (16) в нулевой точке, подбираем коэффициенты b и c следующим образом:

$$b = -\frac{\kappa}{6}, \quad c = -\frac{1}{5+4e^2} - \frac{3+2e^2\kappa}{5+4e^2} \frac{1}{6} = p_1 + q_1 \kappa.$$

Подставляя (20) в (16), трижды интегрируя по t и определяя произвольные постоянные интегрирования из условий (17), находим V в первом приближении по Пикару:

$$V = -\kappa \left[\frac{t^3}{6} - \frac{\kappa}{4 \cdot 5 \cdot 6} t^5 - \frac{p_1 + q_1 \kappa + \frac{\kappa}{15} e^2}{6 \cdot 7} t^7 - \frac{e^2}{126} (p_1 + q_1 \kappa) t^9 \right] + t. \quad (21)$$

Подставляя (21) в условие (18), получаем для определения κ следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} & \kappa^2 \left\{ \frac{1}{24} + \frac{q_1}{24} + e^2 \left[\frac{2}{45} + \frac{3q_1}{14} + e^2 \left(\frac{1}{105} + \frac{4}{63} q_1 \right) \right] \right\} - \\ & - \kappa \left\{ \frac{1}{2} - \frac{p_1}{6} + e^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{14} p_1 + \frac{4e^2}{63} p_1 \right] \right\} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Зная κ , по формуле (19) находим m .

В табл. 3 даны значения m , при любом A/C , вычисленные по Пикару и вычисленные численным путем.

Таблица 3

h/l	0.1	0.2	0.4	0.6
По Пикару	13.5	2.39	0.258	0.0543
Численным интегр.	13.6	2.50	0.280	0.0584

В табл. 4 даны значения коэффициентов m и k для арки с зажатými концами, когда внешние силы при деформации поворачиваются с сечением при $A/C=1$.

Таблица 4

h/l	0.1	0.2	0.3
m	61.9	16.1	9.85
k	31.7	65.9	136.6

Сравнивая табл. 4 с табл. 1, замечаем, что при рассматриваемом способе поведения нагрузки $q_{кр}$ получается значительно бóльшим, нежели при исключенном выше, когда силы остаются вертикальными.

Совершенно аналогично можно вычислить значения m и k , соответствующие несимметричной деформации.

Поступила 5 I 1938.

ABOUT THE STABILITY OF THE PARABOLICAL ARCHES IN THE NON-PLANE DEFORMATION

A. B. MORGAEVSKY

(Dniepropetrovsk)

(Summary)

In the present work is regarded the question about the stability of a parabolical arch with the vertically uniformly distributed load in the non-plane deformation.

The problem is solved by integrating the fundamental equations, which is given by the theory of thin bars.

The received equations (2) with the variable coefficients cannot be integrated in finite form. To calculate the coefficients of the stability (K) the numerical Adams Störmer-Volper's methods and Picard's method of successive proximities are used.

In solving the problem it is supposed that during the deformation the external load remains vertical and the point of the application of the load is moved with the element of the arc. Besides it is regarded the case when the external forces during the deformation are turning with the element of the arc. The deformation which protrudes the arch out of its plane is supposed to be symmetrical.

The value of the critical load can be calculated by formula

$$q_{кр} = \frac{kA}{l^3},$$

where A is the stiffness of the cross section relatively to the axis x and l is the length of the span.

In the work are calculated the values of coefficients for the different ways of fixing the ends of the arch and for the different conduct of the external forces.