

## НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ

(Саратов)

В настоящей статье рассматривается задача о равновесии упругого однородного анизотропного тела в виде цилиндра (в поперечном сечении конечная или бесконечная область), на которое действуют внешние усилия, вызывающие напряженное состояние, зависящее только от двух координат (напряжения не меняются по длине цилиндра). Предполагается самый общий случай анизотропии; число независимых упругих постоянных — 21. Можно различить 4 наиболее характерные распределения внешних усилий, при которых изотропный цилиндр испытывает: 1) простое растяжение, 2) чистый изгиб, 3) плоскую деформацию и 4) кручение. Первые два случая имеют элементарные решения, и распределение напряжений не зависит от упругих свойств материала.

Последние случаи сводятся к интегрированию систем двух уравнений в частных производных, из которых одно четвертого, а другое третьего порядка. Эти системы удается проинтегрировать в общем виде и выразить компоненты напряжения и проекции смещения через 3 функции комплексных переменных  $z_k = x + \mu_k y$  ( $\mu_k$  — комплексное число, отличное от  $i = \sqrt{-1}$ ).

**1. Уравнения теории упругости для однородного тела в общем случае анизотропии.** Рассмотрим упругое равновесие однородного анизотропного тела произвольной формы под действием внешних поверхностных и объемных усилий.

Отнесем тело к какой-либо системе прямоугольных координат  $x, y, z$ . Введем обозначения:  $X_n, Y_n, Z_n$  — проекции внешних поверхностных усилий на единицу площади,  $X, Y, Z$  — проекции объемных сил на единицу объема,  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ) — упругие постоянные,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  — компоненты напряжения,  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$  — компоненты деформации,  $u, v, w$  — проекции смещения. Деформации считаем малыми.



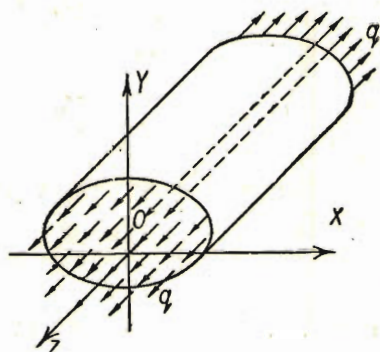


**2. Элементарные решения.** Рассмотрим упругое равновесие тела с вышеуказанными упругими свойствами, ограниченного цилиндрической поверхностью (в частном случае — плоскостями) и двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными образующей. Пусть в поперечном сечении конечная область односвязная или многосвязная.

Приведем без вывода решения для двух частных случаев, исследованных Voigt.<sup>(1)</sup>

**I.** По концевым сечениям действуют равномерно распределенные нормальные усилия интенсивности  $q$  на единицу площади (одностороннее растяжение — сжатие).

Начало координат — в произвольной точке, ось  $OZ$  параллельна образующей, ось  $OX$  направлена произвольно (фиг. 1).



Фиг. 1.

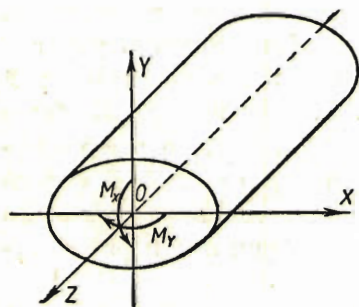
$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = q, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u &= q a_{13} x + u', \\ v &= q (a_{36} x + a_{23} y + a_{34} z) + v', \\ w &= q (a_{35} x + a_{33} z) + w'; \end{aligned} \quad (2.2)$$

здесь  $u', v', w'$  — жесткие смещения тела как целого — равны:

$$\begin{aligned} u' &= \omega_y z - \omega_z y + u_0, \\ v' &= \omega_z x - \omega_x z + v_0, \\ w' &= \omega_x y - \omega_y x + w_0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, u_0, v_0, w_0$  — произвольные постоянные.



Фиг. 2.

Заметим, что в более общем случае, когда компоненты напряжения постоянны, хотя и отличны от нуля, всегда можно найти проекции смещений с точностью до жестких смещений.

**II.** По концевым сечениям действуют нормальные усилия, распределенные по линейному закону, приводящиеся к моменту с составляющими  $M_x, M_y$  (чистый изгиб).

Начало координат — в центре тяжести какого-нибудь сечения, ось  $OZ$  параллельна образующей, оси  $OX$  и  $OY$  совпадают с главными осями инерции сечения (фиг. 2).

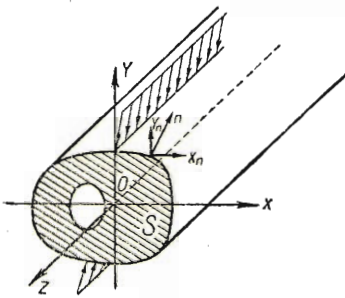
$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0, \quad (2.4)$$

где  $J_x, J_y$  — главные моменты инерции сечения;

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{M_x}{2J_x} (a_{38} y^2 + a_{35} yz + 2a_{13} xy) + \\
 &+ \frac{M_y}{2J_y} (a_{13} x^2 - a_{23} y^2 - a_{33} z^2 - a_{34} yz) + u', \\
 v &= \frac{M_x}{2J_x} (-a_{13} x^2 + a_{23} y^2 - a_{33} z^2 - a_{35} xz) + \\
 &+ \frac{M_y}{2J_y} (a_{38} x^2 + a_{34} xz + 2a_{23} xy) + v', \\
 w &= \frac{M_x}{2J_x} (a_{34} y^2 + 2a_{33} yz + a_{35} xy) + \\
 &+ \frac{M_y}{2J_y} (a_{35} x^2 + 2a_{33} xz + a_{34} xy) + w',
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $u', v', w'$  — жесткие смещения.

**3. Равновесие бесконечного цилиндра под действием усилий, приложенных к боковой поверхности.** Рассмотрим упругое равновесие тела в виде



Фиг. 3.

цилиндра неограниченной длины, на которое действуют усилия, распределенные по боковой поверхности, и объемные силы. Пусть усилия, поверхностные и объемные, не меняются вдоль образующей цилиндра ни по величине, ни по направлению, и проекции их на направление образующей равны нулю. Изотропное тело, находящееся в этих условиях, испытывает плоскую деформацию: поперечные сечения остаются плоскими и не поворачиваются одно относительно другого. Анизотропное тело также будет испытывать плоскую деформацию, если упругие постоянные

связаны определенными соотношениями в виде равенств, в частности, если в каждой точке тела имеется по крайней мере одна плоскость упругой симметрии (перпендикулярная образующей). Вопрос о возможности плоской деформации в анизотропной среде исследован С. Г. Михлиным<sup>(2)</sup>. В общем случае анизотропии поперечные сечения будут искривляться, но эти искривления, в силу однородности, будут одинаковыми для всех сечений. Деформация, вообще говоря, не будет плоской и в том случае, когда в каждой точке тела имеются плоскости упругой симметрии, но среди них нет перпендикулярной к образующей.

Поместим начало координат в произвольной точке какого-нибудь сечения, ось  $OZ$  направим параллельно образующей, оси  $OX$  и  $OY$  — как удобнее (фиг. 3).

Положим:

$$u = U(x, y) + u', \quad v = V(x, y) + v', \quad w = W(x, y) + w', \tag{3.1}$$

где  $u', v', w'$  суть жесткие смещения (2.3).



Обратимся к уравнениям (1.1) — (1.4). Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из 3-го уравнения (1.1):

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}). \quad (3.3)$$

Подставляя это значение в остальные уравнения (1.1), приведем их к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $\beta_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i3}a_{k3}}{a_{33}}$  ( $i, k = 1, 2, 4, 5, 6$ ).

Уравнения равновесия (1.3) принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3.5)$$

Предположим, что объемные силы имеют потенциал  $U$ :

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Введем 2 функции напряжений  $F$  и  $\Psi$ , положив:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5) будут удовлетворены.

Исключая  $U$ ,  $V$  и  $W$  из уравнений (3.2), получим два уравнения совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

Подставляя в эти уравнения выражения для компонентов деформации и используя (3.6), получим систему, которой удовлетворяют функции напряжений:

$$\begin{aligned} L_4 F + L_3 \Psi &= -(\beta_{22} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\beta_{16} + \beta_{26}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - (\beta_{11} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ L_3 F + L_2 \Psi &= (\beta_{14} + \beta_{24}) \frac{\partial U}{\partial x} - (\beta_{15} + \beta_{25}) \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь случаи, когда объемные силы отсутствуют. Тогда система (3.8) принимает вид:

$$L_4 F + L_3 \Psi = 0, \quad L_3 F + L_2 \Psi = 0. \quad (3.9)$$

**4. Общие выражения для функций  $F$  и  $\Psi$ .** Найдем общие выражения для функций  $F$  и  $\Psi$ . Исключим из системы (3.9)  $\Psi$ ; получим уравнение шестого порядка в частных производных:

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = 0. \quad (4.1)$$

Исключая  $F$ , получаем такое же уравнение для  $\Psi$ :<sup>1</sup>

$$(L_4 L_2 - L_3^2) \Psi = 0. \quad (4.2)$$

Составим алгебраическое уравнение 6-й степени:

$$l_4(\mu) l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} l_4(\mu) &= \beta_{11} \mu^4 - 2\beta_{16} \mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \mu^2 - 2\beta_{26} \mu + \beta_{22}, \\ l_3(\mu) &= \beta_{15} \mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56}) \mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46}) \mu - \beta_{24}, \\ l_2(\mu) &= \beta_{55} \mu^2 - 2\beta_{45} \mu + \beta_{44}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Уравнение (4.1) можно представить в таком виде:

$$D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 F = 0, \quad (4.4)$$

где  $D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}$  — линейные операторы первого порядка,  $\mu_k$  — корни уравнения (4.3). Путем последовательного интегрирования можно найти общий интеграл уравнения (4.4).

Пусть среди корней уравнения (4.3) нет кратных.

Положим:

$$D_1 F = \varphi_2, \quad D_2 \varphi_2 = \varphi_3, \dots, D_5 \varphi_5 = \varphi_6. \quad (4.5)$$

Функция  $\varphi_6$  удовлетворяет уравнению первого порядка:

$$D_6 \varphi_6 = 0. \quad (4.6)$$

Общий интеграл этого уравнения представляется в виде произвольной функции выражения  $x + \mu_6 y$ ; представим эту функцию в виде 5-й производной некоторой произвольной функции  $f_6(x + \mu_6 y)$  по аргументу  $x + \mu_6 y$ :

$$\varphi_6 = f_6^V(x + \mu_6 y). \quad (4.7)$$

<sup>1</sup> Очевидно,  $L_2 L_4 = L_4 L_2$ .

Функция  $\varphi_5$  удовлетворяет неоднородному уравнению первого порядка:

$$D_5 \varphi_5 = f_6^V(x + \mu_6 y). \quad (4.8)$$

Общий интеграл его складывается из общего интеграла уравнения  $D_5 \varphi_5 = 0$  и из частного решения неоднородного уравнения. Представим общий интеграл соответствующего однородного уравнения в виде 4-й производной некоторой произвольной функции  $f_5(x + \mu_5 y)$  по  $x + \mu_5 y$ , и тогда общий интеграл уравнения (4.8) будет:

$$\varphi_5 = f_5^{IV}(x + \mu_5 y) + \frac{f_6^{IV}(x + \mu_6 y)}{\mu_6 - \mu_5}. \quad (4.9)$$

Продолжая операции этого рода, приходим к следующему выражению для  $F$ :

$$F = f_1(x + \mu_1 y) + \sum_{k=2}^6 \frac{f_k(x + \mu_k y)}{(\mu_k - \mu_{k-1}) \dots (\mu_k - \mu_1)}. \quad (4.10)$$

Вводя новые обозначения

$$F_1(x + \mu_1 y) = f_1(x + \mu_1 y), \quad F_k(x + \mu_k y) = \frac{f_k(x + \mu_k y)}{(\mu_k - \mu_{k-1}) \dots (\mu_k - \mu_1)},$$

напишем общее выражение для  $F$  в виде (3):

$$F = \sum_{k=1}^6 F_k(x + \mu_k y). \quad (4.11)$$

Здесь  $F_k$  — произвольные функции аргумента  $x + \mu_k y$ , имеющие производные по этому аргументу до шестого порядка включительно.

Общее выражение для  $\Psi$  напишется аналогично:

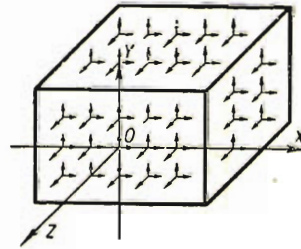
$$\Psi = \sum_{k=1}^6 \Psi_k(x + \mu_k y), \quad (4.12)$$

где  $\Psi_k$  — произвольные функции аргумента  $x + \mu_k y$  имеющие производные до шестого порядка.

Отметим некоторые важные свойства корней уравнения (4.3), которые обнаруживаются в связи с рассмотрением выражения (1.2) потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице объема.

Рассмотрим равновесие идеально упругого тела с анизотропией, при которой уравнения обобщенного закона Гука имеют вид (1.1). Для определенности рассмотрим тело в виде прямоугольного параллелепипеда, все измерения которого — величины одного и того же порядка. Пусть по граням параллелепипеда приложены равномерно распределенные нормальные и касательные усилия. Расположим систему координат  $x, y, z$ , как на фиг. 4. Под действием указанных усилий в теле получают постоянные компоненты напряжения

$$\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}.$$



Фиг. 4



Очевидно, задав произвольно 6 вещественных чисел, мы можем считать их компонентами напряжения в какой-нибудь точке рассматриваемого параллелепипеда под действием указанных внешних усилий определенной величины. Потенциальная энергия деформации идеально упругого тела, отнесенная к единице объема, есть величина положительная. Принимая это во внимание и изменяя определенным образом внешние усилия, можно доказать следующие важные утверждения.

I. Уравнение  $l_4(\mu) = 0$  не имеет вещественных корней.

Предположим, что рассматриваемое тело испытывает заведомо упругие деформации и находится в устойчивом равновесии, если все компоненты напряжения не превышают по абсолютной величине некоторого малого  $\alpha > 0$ .

Пусть внешние усилия таковы, что компоненты напряжения получаются следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k^2}{N}, & \sigma_y &= \frac{1}{N}, & \sigma_z &= -\frac{1}{a_{33}N} (a_{13}k^2 + a_{23} - a_{36}k), \\ \tau_{yz} &= 0, & \tau_{xz} &= 0, & \tau_{xy} &= -\frac{k}{N} \end{aligned} \quad (I)$$

( $k, N$  — вещественные числа).

Выражение потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице объема, имеет вид:

$$V = \frac{1}{2N^2} l_4(k).$$

Будем придавать  $k$  всевозможные вещественные значения, подбирая каждый раз  $N$  так, чтобы компоненты напряжения не превышали по абсолютной величине  $\alpha$  (этого всегда можно добиться, изменяя надлежащим образом внешние усилия).

При всяких значениях компонентов напряжения, изменяющихся указанным образом,  $V > 0$ , т. е.

$$l_4(k) > 0$$

при всяких вещественных  $k$ . Этим утверждение I доказывается.

II. Уравнение  $l_2(\mu) = 0$  не имеет вещественных корней.

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= \frac{1}{a_{33}N} (a_{34} - a_{35}k), \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{N}, & \tau_{xz} &= \frac{k}{N}, & \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (II)$$

В этом случае

$$V = \frac{1}{2N^2} l_2(k).$$

Будем придавать  $k$  всевозможные вещественные значения, изменяя  $N$  так, чтобы компоненты напряжения не превосходили по абсолютной величине  $\alpha$ . Из неравенства  $V > 0$  следует, что  $l_2(k) > 0$ , т. е. уравнение  $l_2(\mu) = 0$  имеет лишь комплексные или чисто мнимые корни.



III. Уравнение (4.3) не имеет вещественных корней.

Положим

$$\sigma_x = \frac{k^2}{N}, \quad \sigma_y = \frac{1}{N}, \quad \sigma_z = -\frac{1}{a_{33} N} (a_{13} k^2 + a_{23} - a_{36} k - a_{34} \rho + a_{35} k \rho),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\rho}{N}, \quad \tau_{xz} = \frac{k\rho}{N}, \quad \tau_{xy} = -\frac{k}{N},$$
(III)

где  $k, N$  — вещественные числа,  $\rho = -\frac{l_3(k)}{l_2(k)}$  (при конечных  $k$  величина конечная или нуль). В этом случае

$$V = \frac{1}{2N^2} \cdot \frac{l_4(k)l_2(k) - l_3^2(k)}{l_2(k)}.$$

Будем опять придавать  $k$  всевозможные вещественные значения, подбирая каждый раз  $N$  так, чтобы компоненты напряжения не превосходили по абсолютной величине  $\alpha$ . При всяких  $k$  и  $N$ , меняющихся указанным образом,  $V > 0$ , т. е.

$$l_4(k)l_2(k) - l_3^2(k) > 0.$$

Следовательно, и уравнение (4.3) может иметь лишь комплексные или чисто мнимые корни.

Очевидно следующее утверждение.

Если корень уравнения (4.3) является одновременно корнем уравнения  $l_3(\mu) = 0$ , то он же является корнем какого-нибудь из уравнений  $l_2(\mu) = 0$ ,  $l_4(\mu) = 0$  или каждого из них.

В дальнейшем мы будем считать, что: 1) корни уравнения (4.3) не являются одновременно корнями уравнений  $l_2(\mu) = 0$ ,  $l_4(\mu) = 0$  или  $l_3(\mu) = 0$ ; 2) среди корней уравнения (4.3) нет равных.

Для корней уравнения (4.3) примем обозначения:

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3,$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_4 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_5 = \alpha_2 - i\beta_2, \quad \bar{\mu}_3 = \mu_6 = \alpha_3 - i\beta_3, \quad (\beta_k > 0).$$

Общие выражения для функций  $F$  и  $\Psi$ , которые должны быть *вещественными* функциями  $x$  и  $y$ , можно теперь написать в таком виде:

$$F = \sum_{k=1}^3 [F_k(z_k) + \bar{F}_k(\bar{z}_k)] = 2R \sum_{k=1}^3 F_k(z_k),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^3 [\Psi_k(z_k) + \bar{\Psi}_k(\bar{z}_k)] = 2R \sum_{k=1}^3 \Psi_k(z_k),$$
(4.13)

где  $F_k, \Psi_k$  — произвольные аналитические функции комплексных переменных  $z_k = x + \mu_k y$ ,  $\bar{F}_k(\bar{z}_k), \bar{\Psi}_k(\bar{z}_k)$  — сопряженные величины,  $\bar{z}_k = x + \bar{\mu}_k y$ ,  $R$  — обозначение для вещественной части.

Возьмем частные решения уравнений (4.1) и (4.2):  $F_k(z_k), \Psi_k(z_k)$  и подставим их в систему (3.9). Получим:

$$l_4(\mu_k) F_k^{IV}(z_k) + l_3(\mu_k) \Psi_k^{III}(z_k) = 0, \quad l_3(\mu_k) F_k^{III}(z_k) + l_2(\mu_k) \Psi_k^{II}(z_k) = 0. \quad (4.14)$$

Отсюда

$$\Psi_k(z_k) = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} F_k'(z_k) + a_k z_k + b_k, \quad (4.15)$$

или

$$F_k'(z_k) = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_4(\mu_k)} \Psi_k(z_k) + a_k' z_k + b_k', \quad (4.16)$$

где  $a_k, b_k, a_k', b_k'$  — постоянные интегрирования — произвольные комплексные числа.

**5. Общие выражения для компонентов напряжения и проекций смещения.** Введем новые обозначения:

$$F_1'(z_1) = \Phi_1(z_1), \quad F_2'(z_2) = \Phi_2(z_2), \quad \Psi_3(z_3) = \Phi_3(z_3), \\ -\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)} = \lambda_1, \quad -\frac{l_3(\mu_2)}{l_2(\mu_2)} = \lambda_2, \quad -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)} = \lambda_3.$$

Общие выражения для  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\Psi$  можем написать таким образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2R[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \lambda_3 \Phi_3(z_3)], \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2R[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3(z_3)];$$

$$\Psi = 2R[\lambda_1 \Phi_1(z_1) + \lambda_2 \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3)]. \quad (5.2)$$

Произвольные комплексные постоянные  $a_k, b_k, a_k', b_k'$  мы опускаем; однако в дальнейшем всегда будем иметь в виду, что к правым частям выражений (5.1) и (5.2) можно прибавить соответственно выражения:

$$2R(a_3' z_3 + b_3'), \quad 2R(a_3' \mu_3 z_3 + b_3' \mu_3), \quad 2R(a_1 z_1 + a_2 z_2 + b_1 + b_2). \quad (*)$$

По формулам (3.6) (при  $U=0$ ) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2R[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3^2 \lambda_3 \Phi_3'(z_3)], \\ \sigma_y &= 2R[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) + \lambda_3 \Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{xy} &= -2R[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{xz} &= 2R[\mu_1 \lambda_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \lambda_2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3 \Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{yz} &= -2R[\lambda_1 \Phi_1'(z_1) + \lambda_2 \Phi_2'(z_2) + \Phi_3'(z_3)]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

К правым частям этих выражений можно прибавить соответственно:  $2R(a_3' \mu_3^2), 2R(a_3'), -2R(a_3' \mu_3), 2R(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2), -2R(a_1 + a_2)$ . (\*\*)

Интегрируя уравнения (3.4), находим формулы для проекций смещения:

$$\begin{aligned} U &= 2R \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k) - \omega y + u_0, \\ V &= 2R \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k) + \omega x + v_0, \\ W &= 2R \sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k(z_k) + w_0. \end{aligned} \quad (5.4)$$



Здесь

$$\begin{aligned} p_k &= \beta_{11} \mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_k + \lambda_k (\beta_{15} \mu_k - \beta_{14}), \\ q_k &= \beta_{12} \mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} - \beta_{26} + \lambda_k \left( \beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_k} \right), \quad (k=1, 2); \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

$$\begin{aligned} r_k &= \beta_{14} \mu_k + \frac{\beta_{24}}{\mu_k} - \beta_{46} + \lambda_k \left( \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_k} \right); \\ p_3 &= \lambda_3 (\beta_{11} \mu_3^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_3) + \beta_{15} \mu_3 - \beta_{14}, \\ q_3 &= \lambda_3 \left( \beta_{12} \mu_3 + \frac{\beta_{22}}{\mu_3} - \beta_{26} \right) + \beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_3}, \\ r_3 &= \lambda_3 \left( \beta_{14} \mu_3 + \frac{\beta_{24}}{\mu_3} - \beta_{46} \right) + \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_3}; \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

$\omega, u_0, v_0, w_0$  — произвольные постоянные, выражающие жесткие смещения тела как целого, их можно положить равными нулю.

Добавочным произвольным членам (\*\*) соответствуют линейные слагаемые в выражениях для проекций смещения, которые легко найти путем интегрирования уравнений (3.4).

Таким образом удается выразить компоненты напряжения и проекции смещения через 3 аналитические функции комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y.$$

Если в каждой точке тела имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная оси  $OZ$ , то

$$\beta_{14} = \beta_{24} = \beta_{46} = \beta_{15} = \beta_{25} = \beta_{56} = 0, \quad \lambda_k = 0, \quad p_3 = q_3 = r_1 = r_2 = 0.$$

Формулы (5.3) — (5.4) упрощаются; в выражения для  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  будут входить только  $\Phi_1'(z_1)$  и  $\Phi_2'(z_2)$ , а в выражения для  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  — лишь  $\Phi_3'(z_3)$ .

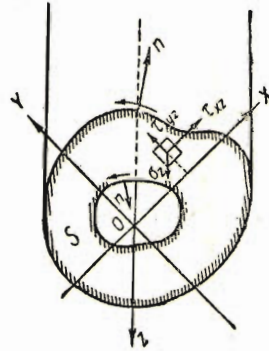
Положив  $\Phi_3(z_3) = 0$ , мы приходим к формулам для случая плоской деформации.

**6. Контурные условия.** Пусть на цилиндрической поверхности заданы внешние усилия (напряжения)  $X_n, Y_n (Z_n = 0)$ . Условия на поверхности или, что то же самое, условия на контуре области  $S$ , получающейся в сечении плоскостью  $XOY$ , будут:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $n$  — направление внешней нормали. Обозначим через  $s$  дугу контура области  $S$ . Примем какую-нибудь точку контура за начальную и условимся считать направление отсчета дуг положительным, если контур обходится против часовой стрелки, как на фиг. 5. Тогда, если рассматривается внешний контур области  $S$ :

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$



Фиг. 5.

если же рассматривается контур отверстия, то

$$\cos(n, x) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = \frac{dx}{ds}.$$

Интегрируя (6.1) по дуге контура от начальной точки до переменной точки  $s$ , приведем условия (6.1) к виду:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1(s) + C_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2(s) + C_2, \quad \Psi_3 = C_3, \quad (6.2)$$

где

$$f_1(s) = \mp \int_0^s Y_n ds, \quad f_2(s) = \pm \int_0^s X_n ds \quad (6.2.1)$$

(верхние знаки надо взять, когда рассматривается внешний контур, и нижние — когда рассматривается контур отверстия),  $C_1, C_2, C_3$  — постоянные интегрирования.<sup>1</sup>

В случае конечной области  $S$  компоненты напряжения по площади всякого поперечного сечения могут привести к силе с составляющими  $Q_x, Q_y, Q_z$  и к моменту с составляющими  $M_x, M_y, M_z$ . Если найдены  $F$  и  $\Psi$ , удовлетворяющие условиям (6.2), то

$$Q_x = \iint \tau_{xz} dx dy = \iint \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = 0, \quad Q_y = \iint \tau_{yz} dx dy = - \iint \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = 0,$$

а  $Q_z, M_x, M_y$  и  $M_z$ , вообще говоря, отличные от нуля, будут:

$$Q_z = \iint \sigma_z dx dy = -\frac{1}{a_{33}} \iint \left( a_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + a_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - a_{38} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

$$M_x = \iint \sigma_x y dx dy, \quad M_y = \iint \sigma_x x dx dy,$$

$$M_z = \iint (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x) dx dy = \iint \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} y \right) dx dy,$$

причем интегралы берутся по площади поперечного сечения.<sup>2</sup>

На основании (6.2), (5.1) и (5.2) получаем условия, которым удовлетворяют  $\Phi_k(z_k)$  при заданных напряжениях на контуре:

$$2R [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \lambda_3 \Phi_3(z_3)] = f_1(s) + C_1,$$

$$2R [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3(z_3)] = f_2(s) + C_2, \quad (6.3)$$

$$2R [\lambda_1 \Phi_1(z_1) + \lambda_2 \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3)] = C_3.$$

<sup>1</sup> Постоянная  $C_k$  может иметь различные значения на различных контурах, ограничивающих многосвязную область.

<sup>2</sup>  $Q_x = Q_y = 0$  как в случае односвязной, так и в случае многосвязной области, что негрудно показать.



В дальнейшем мы будем считать, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = \mu_2 - \mu_1 - \lambda_2 \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) - \lambda_1 \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2) \quad (6.4)$$

отличен от нуля.

Очевидно,  $D=0$ , если  $\mu_2 = \mu_1$ ; этот случай мы исключили из рассмотрения. Вопрос о том, может ли  $D$  обратиться в нуль при неравных  $\mu_k$ , требует дополнительного исследования. При наличии плоскостей упругой симметрии, параллельных плоскости  $XOY$ ,

$$D = \mu_2 - \mu_1.$$

Если задаются смещения точек поверхности, т. е. смещения точек контура области  $S$ , контурные условия получим непосредственно из формул (б. 4).

### 7. О характере многозначности функций $\Phi_k(z_k)$

Задача о равновесии цилиндра бесконечной длины сводится к определению трех функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k=1, 2, 3$ ) переменных  $z_k = x + \mu_k y$  в области  $S$ . На контурах, ограничивающих область  $S$ , задаются линейные комбинации функций  $\Phi_k(z_k)$  и сопряженных функций. Функции  $\Phi_k(z_k)$  можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных  $z_k = x_k + iy_k$ , где  $x_k = x + \alpha_k y$ ,  $y_k = \beta_k y$ . Если  $x$  и  $y$  изменяются в области  $S$  на плоскости  $XOY$ , то  $z_k$  будут изменяться в областях  $S_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) на комплексных плоскостях  $z_k$ , полученных из  $S$  путем однородной деформации плоскости  $XOY$ . Таким образом области  $S$  аффинно соответствуют 3 области  $S_1, S_2, S_3$ , в которых мы должны соответственно определить  $\Phi_1(z_1)$ ,  $\Phi_2(z_2)$  и  $\Phi_3(z_3)$ . Если стать на эту точку зрения, то в условиях (6.3) под  $\Phi_k(z_k)$  надо понимать значения функций в точках контуров областей  $S_k$ , тогда как правые части (6.3) — функции дуги контура области  $S$ . В этом сходство рассматриваемой задачи с плоской (\*)

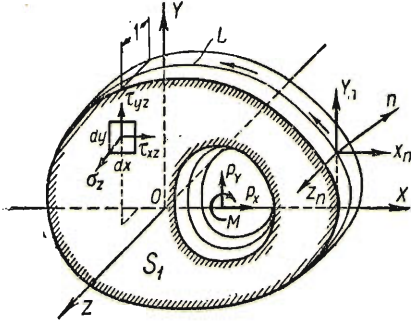
Выясним, каким условиям должны удовлетворять функции  $\Phi_k(z_k)$  внутри области  $S$  (как функции  $x, y$ ) или внутри областей  $S_k$  (как функции  $z_k = x_k + iy_k$ ).

Компоненты напряжения и проекции смещения должны быть однозначными функциями  $x$  и  $y$  и непрерывными функциями во всех точках области  $S$ , за исключением, может быть, точек контура и бесконечно удаленной точки. Условия непрерывности будут выполнены, если  $\Phi_k(z_k)$  — функции  $x, y$ , непрерывные вместе со своими производными в области  $S$ , за исключением, может быть, точек контуров и бесконечно удаленной точки.

Условия однозначности сводятся к следующим: приращения компонентов напряжения и проекций смещения при полном обходе по любому контуру, лежащему целиком в области  $S$ , должны равняться нулю (независимо от начальной точки обхода):

Пусть рассматриваемый цилиндр имеет внутреннюю полость в виде бесконечного цилиндра с образующей параллельной оси  $OZ$ . В сечении плоскостью

ХОУ получается область  $S$  с одним отверстием, конечная или бесконечная (в частности, например, бесконечная плоскость, из которой удалена конечная часть). Пусть на поверхности полости заданы внешние усилия (напряжения)  $X_n, Y_n$ , приводящиеся к главному вектору с составляющими  $P_x, P_y$  и к главному моменту  $M$ ,<sup>1</sup> плоскость которого перпендикулярна оси  $OZ$ .



Фиг. 6.

Окружим отверстие каким-нибудь замкнутым контуром  $L$ , не имеющим с контуром отверстия общих точек, и выделим из цилиндра пластинку, толщиной равной единице, ограниченную плоскостями  $z = \pm \frac{1}{2}$ , поверхностью полости и цилиндрической поверхностью, пересекающей плоскость  $ХОУ$  по контуру  $L$  (фиг. 6). Рассмотрим равновесие этой пластинки.

Имеем уравнения равновесия:

$$\int_L X_n ds + P_x = 0, \quad \int_L Y_n ds + P_y = 0, \quad \int_L Z_n ds = 0,$$

$$\int_L (X_n y - Y_n x) ds + M = 0, \quad (7.1)$$

$$\int_{S_1} \int \tau_{yz} dx dy - \int_L Z_n y ds = 0, \quad - \int_{S_1} \int \tau_{xz} dx dy + \int_L Z_n x ds = 0,$$

где контурные интегралы берутся по контуру  $L$ , который обходится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, двойные интегралы берутся по площади области  $S_1$ , ограниченной контуром  $L$  и контуром отверстия.

Последние 2 уравнения обращаются в тождества. В самом деле, применяя формулу Грина, имеем:

$$\int_{S_1} \int \tau_{yz} dx dy - \int_L Z_n y ds = \int_{S_1} \int \tau_{yz} dx dy - \int_L [\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y)] y ds =$$

$$= \int_{S_1} \int \tau_{yz} dx dy - \int_{S_1} \int \left[ y \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \right] dx dy = 0,$$

где  $n$  — направление внешней нормали к контуру  $L$ ; так же доказывается, что и последнее уравнение (7.1) оказывается тождеством.

Остальные уравнения (7.1) сводятся к следующим:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right] = P_y, \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_L = -P_x, \quad [\Psi]_L = 0, \quad (7.2)$$

$$\left[ F - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} \right]_L = M, \quad (7.3)$$

<sup>1</sup>  $M$  — момент внешних усилий (напряжений), действующих на контуре отверстия, относительно начала координат.



где символ  $[ ]_L$  означает приращение величины при одном полном обходе по контуру  $L$  в положительном направлении.

Обозначим приращение, которое получает  $\Phi_k(z_k)$  при полном обходе по контуру  $L$  в положительном направлении, через  $\Delta_k$ , а через  $\bar{\Delta}_k$  — сопряженную величину. Присоединяя к уравнениям (7.2) условия однозначности (в применении к контуру  $L$ ), получаем систему уравнений для  $\Delta_k$  и  $\bar{\Delta}_k$ :

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \lambda_3 \Delta_3 + \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\Delta}_3 &= P_y, \\ \mu_1 \Delta_1 + \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \lambda_3 \Delta_3 + \mu_1 \bar{\Delta}_1 + \mu_2 \bar{\Delta}_2 + \mu_3 \bar{\lambda}_3 \bar{\Delta}_3 &= -P_x, \\ \lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \Delta_3 + \bar{\lambda}_1 \bar{\Delta}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{\Delta}_2 + \bar{\Delta}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\sum_{k=1}^3 (p_k \Delta_k + \bar{p}_k \bar{\Delta}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (q_k \Delta_k + \bar{q}_k \bar{\Delta}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (r_k \Delta_k + \bar{r}_k \bar{\Delta}_k) = 0.$$

Мы будем считать, что определитель системы (7.4) отличен от нуля. Он обращается в нуль, если  $\mu_2 = \mu_1$ . При  $\lambda_k = 0$  и  $\mu_2 \neq \mu_1$  определитель отличен от нуля. Вопрос о том, может ли этот определитель обратиться в нуль при неравных  $\mu_k$ , требует специального исследования.

Из системы (7.4) приращения  $\Delta_k$  полностью определяются (если определитель отличен от нуля); они оказываются постоянными величинами, не зависящими от вида контура  $L$  и контура отверстия, а зависящими лишь от главного вектора усилий, действующих на поверхности полости. При обходе же по контуру  $L'$ , не заключающем в себе отверстия, приращения функций  $\Phi_k(z_k)$  равны нулю.

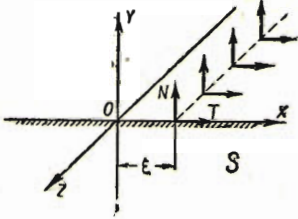
Таким образом каждая из функций  $\Phi_k(z_k)$  состоит из однозначной части и из многозначной части, получающей при обходе по контуру, окружающему одно отверстие, постоянные приращения.

Если область  $S$  имеет  $n$  отверстий (цилиндр имеет  $n$  полостей), уравнения (7.4) справедливы для каждого из контуров  $L_i$ , окружающих одно отверстие. В этих уравнениях под  $\Delta_k$  надо тогда подразумевать  $\Delta_{ki}$  — приращения функций  $\Phi_k(z_k)$  при обходе по контуру  $L_i$ , а под  $P_x, P_y$  —  $P_x^i, P_y^i$  — проекции главного вектора усилий (напряжений), действующих на поверхности  $i$ -й полости. Всего мы будем иметь  $n$  систем типа (7.4). Если цилиндр имеет полости, но на поверхности каждой из них действуют напряжения с главным вектором, равным нулю, все  $\Delta_k = 0$ , т. е.  $\Phi_k(z_k)$  — *голоморфные* функции в своих областях  $S_k$ . Наконец, если цилиндр сплошной, без полостей и внешние усилия действуют лишь на его поверхности, функции  $\Phi_k(z_k)$  — *голоморфные* в своих областях.

Рассмотрим далее две частные задачи, которые решаются теми же методами, что и соответствующие задачи в случае плоской деформации (для анизотропного тела).

**8. Решение задачи для полупространства.** Приведем решение первой основной задачи теории упругости для однородного анизотропного полупространства с произвольной анизотропией.

Пусть плоскость  $XOZ$  совмещена с ограничивающей плоскостью, ось  $OY$  направлена во внешность полупространства. Рассмотрим случай, когда внешние усилия действуют в плоскостях, параллельных  $XOY$ , и не меняются вдоль оси  $OZ$  (фиг. 7). Область  $S$  есть нижняя полуплоскость,  $S_1, S_2, S_3$  — тоже нижние полуплоскости. Назовем  $N(\xi)$  и  $T(\xi)$  — проекции внешних усилий (напряжений) — функции только координаты  $\xi$  на границе полуплоскости. Будем



Фиг. 7.

считать, что  $N(\xi)$  и  $T(\xi)$  имеют конечный главный вектор для любого участка оси  $OX$  и что этот вектор стремится к определенному пределу, когда концы участка уходят в бесконечность. Естественно считать, что компоненты напряжения на бесконечности равны нулю, т. е.  $\Phi_k'(\infty) = 0$ .

Решение плоской задачи для полуплоскости в случае изотропного тела легко получается с помощью интегралов типа Коши. Этот же метод можно успешно применять для получения решения нашей задачи.

Пусть  $f(z)$  есть функция  $z = x + iy$ , голоморфная в нижней полуплоскости  $y < 0$  и непрерывная вплоть до границы и  $f(\infty) = 0$ . Если  $z$  есть точка нижней полуплоскости, а  $\xi$  точка границы, то (см. (5))

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -f(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0. \quad (8.1)$$

Контурные условия имеют вид:

$$(\sigma_y)_{y=0} = N(\xi), \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T(\xi), \quad (\tau_{yz})_{y=0} = 0 \quad (8.2)$$

или, так как  $(z_k)_{y=0} = \xi$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_1'(\xi) + \Phi_2'(\xi) + \lambda_3 \Phi_3'(\xi) + \bar{\Phi}_1'(\xi) + \bar{\Phi}_2'(\xi) + \bar{\lambda}_3 \bar{\Phi}_3'(\xi) &= N(\xi), \\ \mu_1 \Phi_1'(\xi) + \mu_2 \Phi_2'(\xi) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'(\xi) + \bar{\mu}_1 \bar{\Phi}_1'(\xi) + \bar{\mu}_2 \bar{\Phi}_2'(\xi) + \\ &+ \bar{\mu}_3 \bar{\lambda}_3 \bar{\Phi}_3'(\xi) = -T(\xi), \\ \lambda_1 \Phi_1'(\xi) + \lambda_2 \Phi_2'(\xi) + \Phi_3'(\xi) + \bar{\lambda}_1 \bar{\Phi}_1'(\xi) + \bar{\lambda}_2 \bar{\Phi}_2'(\xi) + \bar{\Phi}_3'(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Умножим обе части (8.3) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\xi}{\xi - z}$  и проинтегрируем от  $-\infty$  до  $\infty$ ; тогда на основании (8.1) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_1'(z) + \Phi_2'(z) + \lambda_3 \Phi_3'(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)}{\xi - z} d\xi, \\ \mu_1 \Phi_1'(z) + \mu_2 \Phi_2'(z) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi)}{\xi - z} d\xi, \\ \lambda_1 \Phi_1'(z) + \lambda_2 \Phi_2'(z) + \Phi_3'(z) &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$



Отсюда:

$$\begin{aligned}\Phi_1'(z) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_3 \lambda_2 \lambda_3 - \mu_2) + T(\xi)(\lambda_2 \lambda_3 - 1)}{\xi - z} d\xi, \\ \Phi_2'(z) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_1 - \mu_3 \lambda_1 \lambda_3) + T(\xi)(1 - \lambda_1 \lambda_3)}{\xi - z} d\xi, \\ \Phi_3'(z) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) + T(\xi)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\xi - z} d\xi, \\ \Phi_1'(z_1) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_3 \lambda_2 \lambda_3 - \mu_2) + T(\xi)(\lambda_2 \lambda_3 - 1)}{\xi - z_1} d\xi, \\ \Phi_2'(z_2) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_1 - \mu_3 \lambda_1 \lambda_3) + T(\xi)(1 - \lambda_1 \lambda_3)}{\xi - z_2} d\xi, \\ \Phi_3'(z_3) &= \frac{1}{2\pi i D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi)(\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) + T(\xi)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\xi - z_3} d\xi;\end{aligned}\tag{8.5}$$

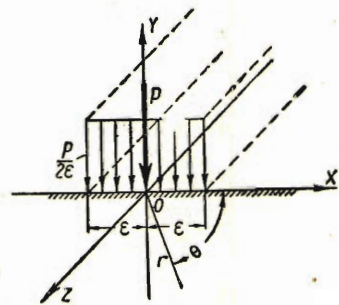
где

$$D = \mu_2 - \mu_1 + \lambda_2 \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) + \lambda_1 \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2).$$

Нетрудно получить решение и в случае заданных смещений ограничивающей плоскости при  $P_x = P_y = 0$ .

Заслуживает внимания следующий частный случай: по оси  $OZ$  равномерно распределена нормальная нагрузка, имеющая главный вектор  $P$  на единицу длины.

Сначала рассматриваем случай нормальной нагрузки интенсивности  $P/2\varepsilon$ , равномерно распределенной по узкой полосе, ограниченной линиями  $x = \pm \varepsilon$  (фиг. 8). Путем предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получается следующий результат:



Фиг. 8.

$$\Phi_1'(z_1) = \frac{P}{2\pi i D} \frac{\mu_3 \lambda_2 \lambda_3 - \mu_2}{z_1}, \quad \Phi_2'(z_2) = \frac{P}{2\pi i D} \frac{\mu_1 - \mu_3 \lambda_1 \lambda_3}{z_2}, \quad \Phi_3'(z_3) = \frac{P}{2\pi i D} \frac{\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2}{z_3}.\tag{8.7}$$

Если перейти к компонентам в цилиндрических координатах  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$ , то после несложных преобразований получим формулы:<sup>1</sup>

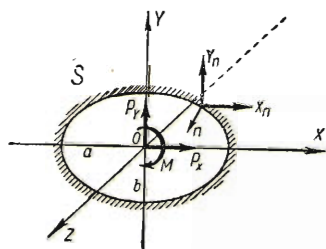
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{\pi r} R \left\{ \frac{1}{D_i} \left[ (\mu_3 \lambda_2 \lambda_3 - \mu_2) \frac{(\sin \theta + \mu_1 \cos \theta)^2}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mu_1 - \mu_3 \lambda_1 \lambda_3) \frac{(\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)^2}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta} + \lambda_3 (\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) \frac{(\sin \theta + \mu_3 \cos \theta)^2}{\cos \theta - \mu_3 \sin \theta} \right] \right\}, \\ \tau_{rz} &= \frac{P}{\pi r} R \left\{ \frac{1}{D_i} \left[ \lambda_1 (\mu_3 \lambda_2 \lambda_3 - \mu_2) \frac{\sin \theta + \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_2 (\mu_1 - \mu_3 \lambda_1 \lambda_3) \frac{\sin \theta + \mu_2 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta} + (\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) \frac{\sin \theta + \mu_3 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_3 \sin \theta} \right] \right\}, \\ \sigma_\theta &= \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0;\end{aligned}\tag{8.8}$$

<sup>1</sup> Аналогичные формулы в случае плоской деформации см. (6).

здесь  $r$  есть расстояние от оси  $OZ$ , угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $OX$  по часовой стрелке.

Компоненты напряжения изменяются обратно пропорционально расстоянию  $r$ , как и в случае изотропного тела. Однако при  $r = \text{const}$  наибольшее значение  $\sigma_r$  получается, вообще говоря, не на оси  $OY$  и точки, где  $\sigma_r = 0$ , лежат не на ограничивающей плоскости.

**9. Решение задачи для бесконечного пространства с полостью в виде эллиптического цилиндра.** Рассмотрим упругое равновесие однородного анизотропного пространства с произвольной анизотропией, имеющего внутреннюю полость в виде эллиптического цилиндра неограниченной длины. Поместим начало координат в точке на оси полости, ось  $OZ$  направим по этой оси, оси  $OX$  и  $OY$  — по главным осям сечения. Полагаем, что внешние усилия действуют только на поверхности полости, не имеют осевой составляющей и не меняются вдоль оси  $OZ$ . Эта задача решится тем же методом, что и соответствующая плоская задача (7).



Фиг. 9.

В сечении плоскостью  $XOY$  область  $S$  представится в виде бесконечной плоскости с эллиптическим вырезом (фиг. 9). Возьмем уравнение эллипса в таком виде:

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta. \quad (9.1)$$

Проекции внешних усилий  $X_n, Y_n$  — функции  $\vartheta$ ; проекции главного вектора —  $P_x$  и  $P_y$ .

В самом общем случае распределения напряжений  $X_n$  и  $U_n$  функции  $f_1$  и  $f_2$  будут иметь вид:

$$f_1 = \int_0^{\vartheta} Y_n ds = \frac{P_y}{2\pi i} \ln \sigma + \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \sigma^m + \bar{\alpha}_m \sigma^{-m}), \quad (9.2)$$

$$f_2 = - \int_0^{\vartheta} X_n ds = - \frac{P_x}{2\pi i} \ln \sigma + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \sigma^m + \bar{\beta}_m \sigma^{-m}),$$

где  $\sigma = e^{i\vartheta}$ ,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  — известные комплексные числа,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — произвольные вещественные постоянные.

На бесконечности компоненты напряжения должны равняться нулю.

Положим:

$$\Phi_k(z_k) = A_k \ln \Omega_k(z_k) + A_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} [\Omega_k(z_k)]^{-m}, \quad (9.3)$$

где

$$\Omega_k(z_k) = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}}{a - i\mu_k b} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (9.3.1)$$

На контуре области  $S$

$$\Phi_k(z_k) = A_k \ln \sigma + A_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \sigma^{-m}. \quad (9.4)$$



Условия на контуре возьмем в виде (6.3). Подставляя в (6.3) вместо  $f_1$  и  $f_2$  их выражения (9.2) и вместо  $\Phi_k(z_k)$  — контурные значения (9.4) и сравнивая коэффициенты при  $\ln \sigma$  и при одинаковых степенях  $\sigma$ , получим уравнения:

$$\begin{aligned} A_{1m} + A_{2m} + \lambda_3 A_{3m} &= \bar{\alpha}_m, \\ \mu_1 A_{1m} + \mu_2 A_{2m} + \mu_3 \lambda_3 A_{3m} &= \bar{\beta}_m, \\ \lambda_1 A_{1m} + \lambda_2 A_{2m} + A_{3m} &= 0; \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \lambda_3 A_3 - \bar{A}_1 - \bar{A}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{A}_3 &= \frac{P_y}{2\pi i}, \\ \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 \lambda_3 A_3 - \bar{\mu}_1 \bar{A}_1 - \bar{\mu}_2 \bar{A}_2 - \bar{\mu}_3 \bar{\lambda}_3 \bar{A}_3 &= -\frac{P_x}{2\pi i}, \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + A_3 - \bar{\lambda}_1 \bar{A}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{A}_2 - \bar{A}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Из условий однозначности смещений получаем дополнительные уравнения для  $A_k$ :

$$\sum_{k=1}^3 (A_k p_k - \bar{A}_k \bar{p}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (A_k q_k - \bar{A}_k \bar{q}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (A_k r_k - \bar{A}_k \bar{r}_k) = 0. \quad (9.7)$$

Из системы (9.5) определяем  $A_{km}$ :

$$\begin{aligned} A_{1m} &= \bar{\alpha}_m \frac{\mu_2 - \mu_3 \lambda_2 \lambda_3}{D} - \bar{\beta}_m \frac{1 - \lambda_2 \lambda_3}{D}, \\ A_{2m} &= \bar{\alpha}_m \frac{\mu_3 \lambda_1 \lambda_3 - \mu_1}{D} + \bar{\beta}_m \frac{1 - \lambda_1 \lambda_3}{D}, \\ A_{3m} &= \bar{\alpha}_m \frac{\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1}{D} + \bar{\beta}_m \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{D}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где

$$D = \mu_2 - \mu_1 + \lambda_2 \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) + \lambda_1 \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2).$$

Постоянные  $A_{k0}$  остаются произвольными и на напряжения не оказывают влияния.

Аналогичным путем можно решить и вторую основную задачу, если задан главный вектор  $P_x, P_y$ .

Приведем решение частной задачи, представляющей практический интерес.

Рассматриваемое пространство с полостью находится в напряженном состоянии, при котором на бесконечности имеют место компоненты напряжения

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -\frac{a_{13}}{a_{33}} p, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \quad (9.9)$$

и на поверхности полости никаких усилий не приложено.

Решение получается путем наложения решения (9.9), распространяемого на все пространство, и решения, получаемого с помощью функций:

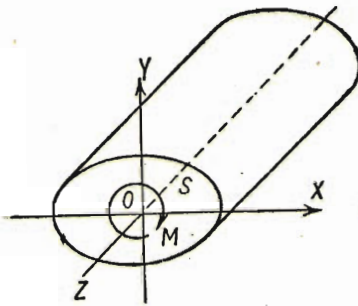
$$\Phi_1(z_1) = \frac{pb i}{2D} \frac{1 - \lambda_2 \lambda_3}{\Omega_1(z_1)}, \quad \Phi_2(z_2) = -\frac{pb i}{2D} \frac{1 - \lambda_1 \lambda_3}{\Omega_2(z_2)}, \quad \Phi_3(z_3) = -\frac{pb i}{2D} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega_3(z_3)}. \quad (9.10)$$

Эта задача аналогична задаче о растяжении бесконечной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием (см. 8).

**10. Кручение.** Рассмотрим теперь задачу о кручении цилиндра конечной длины (которая оказывается очень близкой к задаче, изучаемой в 3—9). Задача приводится к решению системы, сходной с (3.8). Эта система была выведена Voigt<sup>(9)</sup>, который также нашел решения для нескольких частных случаев и применил свои формулы при экспериментальном определении упругих постоянных кристаллов.

Здесь мы лишь кратко рассмотрим задачу о кручении, отмечая главным образом те формулы, которые не были получены Voigt.

Рассмотрим упругое равновесие цилиндра конечной длины из однородного анизотропного материала с произвольной анизотропией, который скручивается моментами  $M$ , приложенными по концам. Предполагаем, что в поперечном сечении — конечная область, односвязная или многосвязная.



Фиг. 10.

Поместим начало координат в центре тяжести какого-нибудь сечения, ось  $OZ$  направим по оси цилиндра, оси  $OX$  и  $OY$  — по главным осям инерции сечения (фиг. 10). Предполагаем, что в этой системе координат уравнения обобщенного закона Гука имеют вид (1.1).

Исключая из рассмотрения вопрос о местных напряжениях около концов, будем искать решение уравнений теории упругости, которое дает компоненты напряжения, приводящиеся в поперечных сечениях к постоянному моменту  $M$ .

Положим:

$$u = -\varphi yz + U(x, y) + u', \quad v = \varphi xz + V(x, y) + v', \quad w = W(x, y) + w', \quad (10.1)$$

где  $\varphi$  — постоянная величина,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  — жесткие смещения (2.3), и попробуем удовлетворить уравнениям теории упругости (1.1) и (1.3).

Компоненты напряжения будут зависеть только от  $x$  и  $y$ .

Уравнения (1.1) принимают вид (3.3) и (3.4). Уравнения равновесия удовлетворим, введя функции напряжений  $F_1$  и  $\Psi_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Уравнения совместности, аналогичные (3.7), будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\varphi. \quad (10.3)$$

Функции  $F_1$  и  $\Psi_1$  будут удовлетворять системе:

$$L_4 F_1 + L_3 \Psi_1 = 0, \quad L_3 F_1 + L_2 \Psi_1 = -2\varphi. \quad (10.4)$$



На цилиндрической поверхности (где никаких внешних усилий не приложено) или на контуре области  $S$ , получающейся в сечении плоскостью  $XOY$ , имеем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = C_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = C_2, \quad \Psi_1 = C_3. \quad (10.5)$$

Если функции  $F_1$  и  $\Psi_1$ , удовлетворяющие условиям (10.5), найдены, то компоненты напряжения в поперечных сечениях приведутся к моменту с составляющими  $M_x, M_y, M_z$ . В самом деле:

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint \tau_{xz} dx dy = 0, & Q_y &= \iint \tau_{yz} dx dy = 0 \\ Q_x &= \iint \sigma_x dx dy = \\ &= -\frac{1}{a_{33}} \iint \left( a_{13} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + a_{23} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - a_{36} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right) dx dy = 0, & (10.6) \\ M_x &= \iint \sigma_x y dx dy, & M_y &= \iint \sigma_x x dx dy, \\ M_z &= \iint \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} x + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} y \right) dx dy, \end{aligned}$$

где интегралы берутся по площади поперечного сечения. Из уравнения (10.6) определим постоянную  $\varphi$ , приравнявая  $M_x$  заданному моменту  $M$ .

Для того чтобы избавиться от моментов  $M_x$  и  $M_y$ , которые могут получиться отличными от нуля, добавим к компоненту  $\sigma_x$  [формула (3.3)] выражение

$$-\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x,$$

а к проекциям смещения — выражения (2.5), в которых вместо  $M_x$  и  $M_y$  надо поставить  $-M_x, -M_y$ .

Для функций  $F_1$  и  $\Psi_1$  можно написать общие выражения.

Положим:

$$\begin{aligned} F_1 &= F, \\ \Psi_1 &= \Psi - \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\beta_{55} x^2 + 2\beta_{45} xy + \beta_{44} y^2}{\beta_{44} \beta_{55} - \beta_{45}^2}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Очевидно,  $F$  и  $\Psi$  удовлетворяют системе (3.9), и, следовательно, для  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\Psi$  имеют место формулы (5.1) и (5.2). Далее:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \varphi \frac{\beta_{45} x + \beta_{44} y}{\beta_{44} \beta_{55} - \beta_{45}^2}, & (10.8) \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \varphi \frac{\beta_{55} x + \beta_{45} y}{\beta_{44} \beta_{55} - \beta_{45}^2}. \end{aligned}$$

Контурные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= C_1, & \frac{\partial F}{\partial y} &= C_2 \\ \Psi &= \frac{\varphi}{2} \frac{\beta_{55} x^2 + 2\beta_{45} xy + \beta_{44} y^2}{\beta_{44} \beta_{55} - \beta_{45}^2} + C_3; \end{aligned} \quad (10.9)$$

или

$$\begin{aligned} 2R[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \lambda_3 \Phi_3(z_3)] &= C_1, \\ 2R[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3(z_3)] &= C_2, \\ 2R[\lambda_1 \Phi_1(z_1) + \lambda_2 \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3)] &= \frac{\varphi}{2} \frac{\beta_{55} x^2 + 2\beta_{45} xy + \beta_{44} y^2}{\beta_{44} \beta_{55} - \beta_{45}^2} + C_3. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Анализ функций  $\Phi_k(z_k)$  внутри области  $S$ , проведенный так же, как в № 7, приводит к выводу, что эти функции должны быть непрерывными и однозначными вместе со своими производными в области  $S$ , т. е. *голоморфными* в своих областях  $S_k$ .

**11. Равновесие цилиндра конечной длины под действием усилий, приложенных к боковой поверхности.** На основании всего сказанного мы можем получить приближенное решение и для цилиндра конечной длины с конечной областью сечения  $S$  в случае усилий, приложенных к боковой поверхности. Пусть эти усилия не имеют осевой составляющей и не изменяются по длине цилиндра, концевые же сечения свободны от всяких усилий.

Поместим начало координат в центре тяжести какого-нибудь сечения, ось  $OZ$  направим по оси цилиндра, оси  $OX$  и  $OY$  — по главным осям инерции сечения.

Решаем задачу так же, как в случае цилиндра неограниченной длины. Получим компоненты напряжения  $\sigma_x', \sigma_y', \dots, \tau_{xy}'$ , которые по концевым сечениям приводятся к осевой силе  $Q_z'$  и к моменту с составляющими  $M_x', M_y', M_z'$ .

Чтобы избавиться от момента  $M_z'$ , решаем для того же цилиндра задачу № 10, полагая скручивающий момент равным  $-M_z'$ . Эту задачу решить не труднее, чем первую, а в ряде случаев легче. Получим компоненты напряжения

$$\sigma_x'', \sigma_y'', \dots, \tau_{xy}''$$

приводящиеся, как сказано выше, к моменту с составляющими  $M_x'', M_y'$  и  $-M_z'$ .

За компоненты напряжения в цилиндре конечной длины возьмем суммы:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \sigma_x'', & \sigma_y &= \sigma_y' + \sigma_y'', \\ \sigma_z &= -\frac{1}{a_{33}} [a_{18}(\sigma_x' + \sigma_x'') + a_{23}(\sigma_y' + \sigma_y'') + a_{34}(\tau_{yz}' + \tau_{yz}'') + \\ &+ a_{35}(\tau_{xz}' + \tau_{xz}'') + a_{36}(\tau_{xy}' + \tau_{xy}'') - \frac{M_x' + M_x''}{I_x} y - \frac{M_y' + M_y''}{I_y} x - \frac{Q_z'}{A}], \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}' + \tau_{yz}'', & \tau_{xz} &= \tau_{xz}' + \tau_{xz}'', \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}' + \tau_{xy}'', \end{aligned} \quad (11.1)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения.



Составленные таким образом компоненты удовлетворяют всем условиям на цилиндрической поверхности так же, как и условиям непрерывности и однозначности, в поперечных же сечениях главный вектор и главный момент равны нулю. Таким образом вместо того чтобы удовлетворять условиям на концевых сечениях

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad (11.2)$$

мы можем удовлетворить условиям:

$$\begin{aligned} Q_x = Q_y = Q_z = 0, \\ M_x = M_y = M_z = 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

На основании принципа Сен-Ванана решение (11.1) в точках, удаленных от концов, должно дать картину распределения напряжений, очень близкую к действительности, по крайней мере для цилиндра, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с длиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Voigt, W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig—Berlin, 1910 (Teubner), Kap. VII, Abs. III, §§ 313, 314.
2. Михлин, С. Г. Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института Академии Наук СССР, № 76, стр. 5, 1936.
3. Пиаджио, Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. Стр. 211, ГТТИ, 1933.
4. Лехницкий, С. Г. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела. Сборник „Прикладная математика и механика“, нов. серия, т. 1, № 1, 1937.
5. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Глава 4, № 80, изд. Академии Наук СССР, 1935.
6. Лехницкий, С. Г. Некоторые случаи плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Сборник „Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций“, стр. 170, ОНТИ, 1935.
7. Лехницкий, С. Г. Напряжения в неограниченной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием. Доклады Академии Наук СССР, т. IV (XIII), № 3 (107), 1936.
8. Лехницкий, С. Г. Концентрация напряжений вблизи эллиптического и кругового отверстия в растягиваемой анизотропной пластинке. Журнал „Вестник инженеров и техников“, № 5, 1936.
9. Voigt, W. l. c., Kap. VII, Abs. III, § 319.

## SUR LE PROBLÈME D'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE DU CYLINDRE HOMOGÈNE AVEC L'ANISOTROPIE ARBITRAIRE

S. G. LECHNITZKY

(Saratov)

(Résumé)

Dans cette note nous posons la question de l'équilibre du cylindre homogène et anisotrope dans lequel les tensions intérieures ne varient pas le long du cylindre. On peut distinguer quatre cas fondamentaux de distribution de forces extérieures correspondantes à: 1) tension simple, 2) flexion simple, 3) déformation plane et 4) torsion. Les cas 1 et 2 ont les solutions élémentaires. Les cas 3 et 4 peuvent être réduits à l'intégration de systèmes d'équations du type:

$$\begin{aligned} \beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \beta_{24} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \\ + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = f_1(x, y), \\ - \beta_{24} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \beta_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \\ - 2\beta_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = f_2(x, y), \end{aligned}$$

où  $F$  est la fonction d'Airy,  $\Psi$  — la fonctions de torsion,  $\beta_{ik}$  — les coefficient qui dépend des constants élastiques,  $f_1$  et  $f_2$  sont les fonctions connues.

En intégrant ce système on peut démontrer que les tensions et les déplacements dans les cas 3 et 4 sont déterminés par trois fonctions  $\Phi_k(z_k)$  des variables complexes  $z_k = x + \mu_k y$ , où  $\mu_k$  sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} [\beta_{11} \mu^4 - 2\beta_{16} \mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \mu^2 - 2\beta_{26} \mu + \beta_{22}] [\beta_{55} \mu^2 - 2\beta_{45} \mu + \beta_{44}] - \\ - [\beta_{15} \mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56}) \mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46}) \mu - \beta_{24}]^2 = 0. \end{aligned}$$

Dans le travail présent nous donnons l'analyse des fonctions et les solutions pour les cas particuliers ayant un intérêt pratique (par exemple les cas d'un demi-volume élastique et le cas d'un volume élastique avec une cavité en forme de cylindre elliptique).