

**К ВЛИЯНИЮ РЕЗКИХ ЗАКРУТЛЕНИЙ НА СТАЦИОНАРНЫЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОНКОСТЕННЫХ ТВЕРДЫХ
ТЕЛАХ**

Я. Ф. МАЛКИН

(Нью Йорк, США)

1. Введение. В настоящей второй части работы,¹ посвященной задаче теплопроводности пластинок, дисков и оболочек, мы подробнее останавливаемся на практически важном случае стационарного распределения температуры в гнутых пластинках и в цилиндрических оболочках, снабженных плоским дном.

Говоря точнее, мы решим задачу стационарного плоского распределения температуры в призматическом твердом теле указанного на чертеже фиг. 1 поперечного сечения, пользуясь способом, указанным в части I работы.¹ Мы увидим, что решение этой задачи принципиально тесным образом связано с решением концентрической задачи для цилиндрических оболочек с плоским дном, играющей важную роль в машиностроении.

Процесс решения можно охарактеризовать следующим образом. Поперечное сечение названного призматического тела мы подразделяем на три области, обозначенные на чертеже фиг. 1 посредством I, II, III; к каждой из этих трех областей мы применяем способ решения, данный в части I работы. К области III названный способ решения может быть применен при помощи методов конформного отображения. В результате этого процесса решения получится температурная функция, удовлетворяющая как дифференциальному уравнению, так и пограничным условиям, но прерывающаяся в плоскостях раздела между областями I, II, III. Для достижения непрерывности в указанных областях на первое решение необходимо наложить некоторое вспомогательное решение. При этом задача, как показано будет на практическом примере в разд. 6, в конце концов сведется к сравнительно простой системе линейных уравнений для неопределенных коэффициентов в формуле распределения температуры.

2. Вспомогательные решения. Пользуясь решением, данным в части I, вообще нельзя удовлетворить пограничным условиям краевых цилиндрических

¹ См. статью автора „К задачам распределения температуры в плоских пластинках“ (стр. 317).

поверхностей пластинки за исключением точек $p = \pm 1$. Если условия решаемой особой задачи требуют точного представления только что названных пограничных температур, тогда на упомянутое решение приходится наложить некоторое вспомогательное решение. В задаче для указанной на чертеже фиг. 1 составной области мы должны будем прибегнуть к вспомогательным частным интегралам дифференциального уравнения.¹

Рассмотрим сначала пластинку в прямоугольной системе координат x, y, z , ограничив ее плоскостями $x=0$, $x=\pi$ и $y=0$, и предположим, что пограничные распределения температуры T даны посредством

$$T=0 \quad \text{для } x=0 \text{ и } x=\pi,$$

$$T=f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sin jx \quad \text{для } y=0, \quad (1)$$

причем $f(x)$ есть данная функция, а постоянные α_j суть коэффициенты ее разложения в ряд Фурье. Решение задачи с пограничными условиями (1) выражается посредством формулы:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-jy} \sin jx. \quad (2)$$

Подробное исследование решения (2) можно найти в теории теплопроводности.²

Если в только что рассмотренном случае пограничную плоскость $y=0$ заменить цилиндрической поверхностью $r=r_1$, перпендикулярной к плоскостям $x=0$ и $x=\pi$, то в концентрической задаче вместо формулы (2) получим, как нетрудно видеть:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{J_0(jr)}{J_0(jr_1)} \sin jx, \quad (2')$$

где J_0 есть Бесселева функция нулевого порядка, а $i^2 = -1$.

Исходя из задачи, охарактеризованной посредством (1), (2), при помощи некоторой модификации результата можно получить решение плоской задачи для прямоугольной области $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq c$ ($c = \text{const}$) при пограничных условиях $T=0$ для $x=0$, $x=\pi$ и $y=c$, и $T=f(x)$ для $y=0$. Образуя сумму четырех решений, соответствующих четырем различным сторонам прямоугольника, получим решение плоской задачи стационарного распределения температуры в прямоугольной области в следующем виде:³

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j \text{sh } j\omega_2(x_2 - x) + \alpha_j' \text{sh } j\omega_2(x - x_1)}{\text{sh } j\omega_2(x_2 - x_1)} \sin j\omega_2(y - y_1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j \text{sh } j\omega_1(y_2 - y) + \beta_j' \text{sh } j\omega_1(y - y_1)}{\text{sh } j\omega_1(y_2 - y_1)} \sin j\omega_1(x - x_1). \quad (3)$$

1, 2, 3 H. S. Carslaw. Conduction of Heat, ch. V, London, 1921.

Коэффициенты $\alpha_j, \alpha'_j, \beta_j, \beta'_j$ определяются из разложений

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sin j\omega_2 (y - y_1) & \text{для} & \quad x = x_1, \quad y_1 < y < y_2, \\ T &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha'_j \sin j\omega_2 (y - y_1) & \text{для} & \quad x = x_2, \quad y_1 < y < y_2, \\ T &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\omega_1 (x - x_1) & \text{для} & \quad y = y_1, \quad x_1 < x < x_2, \\ T &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta'_j \sin j\omega_1 (x - x_1) & \text{для} & \quad y = y_2, \quad x_1 < x < x_2, \end{aligned} \quad (4)$$

причем

$$\omega_2 (y_2 - y_1) = \omega_1 (x_2 - x_1) = \pi.$$

Следует заметить, что система (3), (4) представляет собой решение плоской задачи не только для прямоугольника, но и для всякой плоской области, которую можно получить из прямоугольника путем конформного отображения.¹ Это замечание, конечно, относится и к способу решения, данному в части I, поскольку таковой относится к плоской задаче. Решение с помощью конформного отображения будет в особом частном случае использовано нами в одном из последующих разделов.

Оперирование с выражениями вида (3), (4) вообще, разумеется, весьма затруднительно. Пользуясь такими выражениями в качестве вспомогательных решений, мы, однако, введем в них значительную специализацию, благодаря которой сходимость рядов, получающихся в процессе решения, окажется практически достаточно быстрой, так что рассматриваемые функции могут быть выражены при помощи сравнительно небольшого количества членов, как видно будет из нижеследующих двух разделов. В них дифференциальное уравнение (I, 1) решается для частных областей I, II, III фиг. 1 в отдельности и приравнивается к пограничным распределениям температуры; на решение это затем накладываются вспомогательные решения указанного выше рода².

3. Распределение температуры в прямоугольных областях I, II. Пользуясь обозначениями фиг. 1, мы вводим следующие величины измерения нуля:

$$x/h = \xi, \quad x'/h = \xi', \quad z/h = \zeta, \quad z'/h = \zeta'.$$

Черта над буквой или символом, применявшаяся нами в части I для обозначения величин измерения нуля, здесь опускается в виду того, что в дальнейшем величины другого измерения не встречаются.

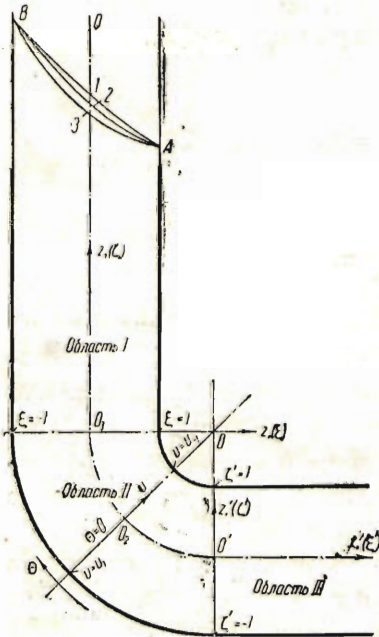
¹ См. предыдущее подстрочное примечание.

² Здесь и в дальнейшем римская I перед номером формулы означает часть I.

Пограничные функции, встречающиеся в (I, 10), мы для области I фиг. 1 выразим посредством формул:

$$T^0 = \sum_{j=0}^{2m} A_j \zeta^j, \quad P^0 = \sum_{j=0}^{2m} B_j \zeta^j, \quad (5)$$

где A_j, B_j суть данные постоянные, а m есть целое положительное число. Пользуясь одним лишь решением (I, 10), мы получили бы распределение температуры, определяющее некоторую кривую AB (фиг. 1) в плоскости 00_1 . Это распределение температуры, вообще говоря, не удовлетворит условию непрерывной связи с распределением температуры прилегающей части III. Для достижения непрерывности в плоскости раздела на первое решение (I, 10) мы должны наложить вспомогательное решение. Это вспомогательное решение должно принимать значение нуль на пограничных поверхностях, так как на последних решение (I, 10) принимает предписанные там значения. Поэтому вспомогательное решение есть решение типа (1), (2) настоящей статьи, однако с существенным особым условием, что это решение приближается к принимаемым им пограничным значениям нуль непрерывным образом. Из этого последнего обстоятельства мы заключаем, что вспомогательное решение с достаточной степенью точности может быть выражено уже с помощью сравнительно небольшого числа членов своего разложения.



Фиг. 1.

На основании приведенных соображений мы распределение температуры в области I представляем посредством формулы:

$$T^1 = \sum_{j=0}^m (F_j D^j T^0 + G_j D^j P^0) + c_1 e^{-\frac{1}{2} \pi \zeta} \cos \frac{1}{2} \pi \zeta + c_2 e^{-\pi \zeta} \sin \pi \zeta + c_3 e^{-\frac{3}{2} \pi \zeta} \cos \frac{3}{2} \pi \zeta, \quad (6)$$

где c_1, c_2, c_3 суть неопределенные постоянные, и $-1 \leq \zeta \leq 1$. Функции F_j, G_j , а равно оператор D объяснены в части I.

Из формул (5) и (6) мы после простых вычислений получаем:

$$T^1_{(\zeta=0)} = \sum_{j=0}^m \{ (2j)! [A_{2j} F_j + B_{2j} G_j] \} + c_1 \cos \frac{1}{2} \pi \zeta + c_2 \sin \pi \zeta + c_3 \cos \frac{3}{2} \pi \zeta, \quad (7)$$

$$P^I_{(\zeta=0)} = \left(\frac{\partial T^I}{\partial \zeta} \right)_{(\zeta=0)} = \sum_{j=0}^{m-1} \{ (2j+1)! [A_{2j+1} F_j + B_{2j+1} G_j] \} - \frac{1}{2} \pi c_1 \cos \frac{1}{2} \pi \zeta - \pi c_2 \sin \pi \zeta - \frac{3}{2} \pi c_3 \cos \frac{3}{2} \pi \zeta. \quad (8)$$

Для области II (фиг. 1) мы находим аналогичную систему формул:

$$T^{OI} = \sum_{j=0}^{2m} A'_j \xi^j, \quad P^{OI} = \sum_{j=0}^{2m} B'_j \xi^j; \quad (5)$$

$$T^{II} = \sum_{j=0}^m (F_j D^j T^{OI} + G_j D^j P^{OI}) + c'_1 e^{-\frac{1}{2} \pi \zeta'} \cos \frac{1}{2} \pi \zeta' + c'_2 e^{-\pi \zeta'} \sin \pi \zeta' + c'_3 e^{-\frac{3}{2} \pi \zeta'} \cos \frac{3}{2} \pi \zeta', \quad (6)$$

$$T^{II}_{(\zeta'=0)} = \sum_{j=0}^m \{ (2j)! [A'_{2j} F_j + B'_{2j} G_j] \} + c'_1 \cos \frac{1}{2} \pi \zeta' + c'_2 \sin \pi \zeta' + c'_3 \cos \frac{3}{2} \pi \zeta', \quad (7)$$

$$P^{II}_{(\zeta'=0)} = \left(\frac{\partial T^{II}}{\partial \zeta'} \right)_{(\zeta'=0)} = \sum_{j=0}^{m-1} \{ (2j+1)! [A'_{2j+1} F_j + B'_{2j+1} G_j] \} - \frac{1}{2} \pi c'_2 \cos \frac{1}{2} \pi \zeta' - \pi c'_2 \sin \pi \zeta' - \frac{3}{2} \pi c'_3 \cos \frac{3}{2} \pi \zeta'. \quad (8)$$

4. Распределение температуры в секторе III. Для области III мы пользуемся преобразованием:

$$\rho = \rho_0 e^{-u}, \quad \rho = r/h, \quad \rho_0 = r_0/h, \quad (9)$$

$$u_{-1} = u_{r=r_0+h} = -\ln \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \right) < u < u_1 = u_{r=r_0-h} = -\ln \left(1 - \frac{1}{\rho_0} \right). \quad (10)$$

При этом преобразовании дифференциальное уравнение (I, 2) в случае плоской задачи в полярных координатах r, θ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (11)$$

Преобразование (9) есть конформное отображение сектора III кругового кольца на прямоугольную область в плоскости u, θ .

Аналогия, связывающая уравнение (11) с уравнением (I, 2), влечет за собой возможность применения интеграла (I, 3) с заменой z на u . Что же касается дальнейших подробностей применения, то следует обратить внимание на следующие два пункта. С одной стороны, пределы интегрирования теперь даны не посредством $p = z/h = \pm 1$, а посредством $u = u_{\pm 1}$ согласно (10);

с другой же стороны, некоторое возмещающее упрощение обуславливается тем обстоятельством, что благодаря незначительности размеров пограничных поверхностей $r = r_0 \pm h$ распределение температуры на этих поверхностях с достаточной степенью точности может быть представлено при помощи выражений второй степени относительно θ . Если при представлении условий непрерывности (формулы ниже) желательнее располагать свободно как самой температурой, так и температурным градиентом у каждой из обеих раздельных плоскостей $\theta = \pm \pi/4$, то приходится ввести выражения третьей степени относительно θ . Однако в практических применениях часто можно ограничиваться (как в приводимом ниже расчете) выражениями второй степени.

В раздельных плоскостях $\theta = \pm \pi/4$ только что указанное решение дало бы распределения температуры, качественно представленные кривой $A3B$ (фиг. 1). Эта кривая, вообще говоря, с кривыми вида $A1B$ прилегающих прямоугольных областей не совпадает. В действительности в каждой из раздельных плоскостей имеется некоторое среднее распределение температуры, представленное кривой $A2B$ (фиг. 1). Для выражения действительного распределения температуры на указанное выше первое решение необходимо наложить вспомогательное решение вида (3), (4). Это вспомогательное решение будет, однако, весьма специальным. Действительно, все коэффициенты β, β' должны быть равны нулю, так как на пограничных поверхностях $r = r_0 \pm h$ поправки не требуются; а кроме того, здесь опять-таки можно ограничиться первыми тремя членами разложения, что дает достаточную степень точности, если ρ_0 в достаточной степени отлично от единицы (см. ниже).

Исходя из приведенных соображений, полное решение для области III можно представить следующим образом. Выражаем пограничные условия посредством формул:

$$T_{(u=u_1)}^{\text{III}} = Q_0 + Q_1 \theta + Q_2 \theta^2, \quad T_{(u=u_{-1})}^{\text{III}} = S_0 + S_1 \theta + S_2 \theta^2, \quad (12)$$

где величины Q_j, S_j ($j=0,1,2$) суть данные постоянные. Вводи коэффициенты K_j, L_j ($j=0,1,2$) при помощи формул

$$\begin{aligned} (u) &= u_1 - u_{-1} = \ln \frac{\rho_0 + 1}{\rho_0 - 1}, \\ (u) K_1 &= S_1 u_1 - Q_1 u_{-1}, & (u) K_2 &= S_2 u_1 - Q_2 u_{-1}, \\ (u) L_1 &= Q_1 - S_1, & (u) L_2 &= Q_2 - S_2, \\ (u) K_0 &= S_0 u_1 - Q_0 u_{-1} - K_2 u_1 u_{-1} (u) - \frac{1}{3} L_2 u_1 u_{-1} (u_1^2 - u_{-1}^2), \\ (u) L_0 &= Q_0 - S_0 + \frac{1}{3} L_2 (u_1^3 - u_{-1}^3) + K_2 (u_1^2 - u_{-1}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

и постоянную

$$\pi : (u_1 - u_{-1}) = \pi : (u) = \Omega,$$

полное решение для области III можно написать в виде:

$$\begin{aligned}
 T^{\text{III}} = & K_0 + L_0 u - K_2 u^2 - \frac{1}{3} L_2 u^3 + \theta (K_1 + L_1 u) + \theta^2 (K_2 + L_2 u) + \\
 & + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\text{sh } j\Omega \left(\frac{1}{4} \pi + \theta \right)}{\text{sh } \frac{1}{2} j\pi\Omega} \sin j\Omega (u - u_{-1}) + \\
 & + \sum_{j=1}^3 \alpha'_j \frac{\text{sh } j\Omega \left(\frac{1}{4} \pi - \theta \right)}{\text{sh } \frac{1}{2} j\pi\Omega} \sin j\Omega (u - u_{-1}). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (11) и пограничные условия (12), легко найдем, что и то и другие удовлетворены.

В раздельных плоскостях $\theta = \pm \pi/4$ распределения температуры и температурного градиента представляются при помощи системы:

$$\begin{aligned}
 T^{\text{III}}_{\left(\theta = \pm \frac{\pi}{4}\right)} = & K_0 \pm \frac{1}{4} \pi K_1 + \frac{1}{16} \pi^2 K_2 + \left(L_0 \pm \frac{1}{4} \pi L_1 + \frac{1}{16} \pi^2 L_2 \right) u - K_2 u^2 - \\
 & - \frac{1}{3} L_2 u^3 + \alpha_{\pm 1} \sin \Omega (u - u_{-1}) + \alpha_{\pm 2} \sin 2\Omega (u - u_{-1}) + \alpha_{\pm 3} \sin 3\Omega (u - u_{-1}), \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^{\text{III}}_{\left(\theta = \pm \frac{\pi}{4}\right)} = & \left(\frac{\partial T^{\text{III}}}{\partial \theta} \right)_{\left(\theta = \pm \frac{\pi}{4}\right)} = K_1 \pm \frac{1}{2} \pi K_2 + \left(L_1 \pm \frac{1}{2} \pi L_2 \right) u + \\
 & + \gamma_{\pm 1} \sin \Omega (u - u_{-1}) + \gamma_{\pm 2} \sin 2\Omega (u - u_{-1}) + \gamma_{\pm 3} \sin 3\Omega (u - u_{-1}), \quad (16)
 \end{aligned}$$

причем для сокращения письма введены символы:

$$\alpha'_j = \alpha_{-j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

а постоянные $\gamma_{\pm j}$ выражаются посредством:

$$\begin{aligned}
 \gamma_j = & j\Omega \left(\alpha_j \text{cth } \frac{1}{2} j\pi\Omega - \alpha'_j \text{csch } \frac{1}{2} j\pi\Omega \right), \\
 \gamma'_j = & \gamma_{-j} = j\Omega \left(\alpha_j \text{csch } \frac{1}{2} j\pi\Omega - \alpha'_j \text{cth } \frac{1}{2} j\pi\Omega \right). \quad (j = 1, 2, 3) \quad (17)
 \end{aligned}$$

Таким образом получены все функции, необходимые для выражения условий непрерывности в раздельных плоскостях $\theta = \pm \pi/4$. Из этих условий непрерывности мы вычислим неопределенные постоянные в функциях, выражающих собой распределение температуры в областях I, II, III.

5. Определение коэффициентов. Условия непрерывности в раздельных плоскостях $\theta = \pm \pi/4$ могут быть написаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T^{\text{I}}_{(\xi=0)} = & T^{\text{III}}_{\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)}, & \rho_0 P^{\text{I}}_{(\xi=0)} = & e^u P^{\text{III}}_{\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)}, \\
 T^{\text{II}}_{(\xi'=0)} = & T^{\text{III}}_{\left(\theta = -\frac{\pi}{4}\right)}, & \rho_0 P^{\text{II}}_{(\xi'=0)} = & -e^{-u} P^{\text{III}}_{\left(\theta = -\frac{\pi}{4}\right)}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Ниже мы увидим, что эти четыре соотношения могут быть сведены к системе двух уравнений.

В соответствии с данными выше обозначениями вводим величины:

$$\begin{aligned} C_{-j} &= C'_j, & C_{\pm 0} &= K_0 \pm \frac{1}{4} \pi K_1 + \frac{1}{16} \pi^2 K_2, & C_{\pm 1} &= L_0 \pm \frac{1}{4} \pi L_1 + \frac{1}{16} \pi^2 L_2, \\ C_{\pm 2} &= -K_2, & C_{\pm 3} &= -\frac{1}{8} L_2, & C_{\pm 0}^* &= K_1 \pm \frac{1}{2} \pi K_2, & C_{\pm 1}^* &= L_1 \pm \frac{1}{2} \pi L_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где штрих указывает на принадлежность к области II; при этом уравнения (15) и (16) принимают вид:

$$T_{(\theta=\pm\frac{\pi}{4})}^{\text{III}} = C_{\pm 0} + C_{\pm 1} u + C_{\pm 2} u^2 + C_{\pm 3} u^3 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{\pm j} \sin j\Omega (u - u_{-1}), \quad (20)$$

$$P_{(\theta=\pm\frac{\pi}{4})}^{\text{III}} = C_{\pm 0}^* + C_{\pm 1}^* u + \sum_{j=1}^3 \gamma_{\pm j} \sin j\Omega (u - u_{-1}). \quad (21)$$

Подставив формулы (20), (21), а также выражения (7), (8), (7'), (8') в соотношения (18), мы обнаружим, что третье из этих соотношений может быть получено из первого путем замещения нештрихованных величин соответствующими штрихованными, причем переменные ξ и ζ' представляют собой один и тот же аргумент. При сравнении второго и четвертого из названных соотношений мы должны принять в расчет, с одной стороны, перемену знака, а с другой стороны, то обстоятельство, что постоянные γ_j и $\gamma'_j = \gamma_{-j}$ получают одна из другой путем замены α_j на $-\alpha'_j$ согласно системе (17). Система уравнений (18), таким образом, как легко можно было предвидеть, симметрична относительно постоянных c_j, α_j , с одной стороны, и постоянных c'_j, α'_j — с другой. Эта симметрия может быть использована для упрощения процесса решения

Вводя символ

$$\dot{E} = E \pm E', \quad (22)$$

где E означает одну из встречающихся в (18), со штрихом или без штриха, постоянных, за исключением C_j^* и γ_j , и символ

$$\dot{E} = E \mp E' \quad (23)$$

в случае только что исключенных постоянных C_j^* и γ_j , мы преобразуем соотношения (18), складывая и вычитая первое и третье, а также второе и четвертое. В результате получим два уравнения, дополненные соотношениями (22), (23). Написав указанные уравнения для пограничных точек $p = \pm 1$ и для некоторых удобно подобранных промежуточных точек интервала

$$-1 \leq p \leq 1, \quad u_{-1} \leq u \leq u_1,$$

получим достаточное количество линейных уравнений для пунктированных величин; из этих уравнений неопределенные коэффициенты найдутся с помощью соотношений (22), (23).

Так, вводя обозначения:

$$\sum_{j=0}^m \{ (2j)! [\dot{A}_{2j} F_j + \dot{B}_{2j} G_j] \} = \dot{U}(p),$$

$$(-1 \leq p \leq 1)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \{ (2j+1)! [\dot{A}_{2j+1} F_j + \dot{B}_{2j+1} G_j] \} = \dot{V}(p),$$

мы имеем в точках $p = \pm 1$:

$$\dot{U}(1) = \dot{A}_0 + \dot{B}_0 = \sum_{j=0}^3 \dot{C}_j u_1^j,$$

$$(\rho_0 - 1) \dot{V}(1) = (\dot{A}_1 + \dot{B}_1)(\rho_0 - 1) = \sum_{j=0}^1 \dot{C}_j^* u_1^j,$$

$$\dot{U}(-1) = \dot{A}_0 - \dot{B}_0 = \sum_{j=0}^3 \dot{C}_j u_{-1}^j, \quad (24)$$

$$(\rho_0 + 1) \dot{V}(-1) = (\dot{A}_1 - \dot{B}_1)(\rho_0 + 1) = \sum_{j=0}^1 \dot{C}_j^* u_{-1}^j.$$

В силу (22), (23) формулы (24) представляют собой систему восьми уравнений для данных постоянных задачи (см. выше, стр. 335).

В качестве промежуточных точек можно избрать:

$$p=0, \quad u=0; \quad p=\frac{1}{2}, \quad u=u_2; \quad p=-\frac{1}{2}, \quad u=u_{-2}.$$

В соответствии с предыдущим имеем:

$$\dot{\gamma}_j = j\Omega \dot{\alpha}_j \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} j\pi\Omega - 1}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} j\pi\Omega} = N_j \dot{\alpha}_j, \quad N_j = j\Omega \operatorname{th} \frac{1}{4} j\pi\Omega.$$

Таким образом для указанных промежуточных точек получаются уравнения:

$$\dot{U}(0) + \dot{c}_1 + \dot{c}_3 = \dot{C}_0 - \sum_{j=0}^3 \dot{\alpha}_j \sin j\Omega u_{-1},$$

$$\dot{U}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{c}_1 + \dot{c}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{c}_3 = \sum_{j=0}^3 \dot{C}_j u_2^j + \sum_{j=0}^3 \dot{\alpha}_j \sin j\Omega (u_2 - u_{-1}), \quad (25)$$

$$\dot{U}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{c}_1 - \dot{c}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{c}_3 = \sum_{j=0}^3 \dot{C}_j u_{-2}^j + \sum_{j=0}^3 \dot{\alpha}_j \sin j\Omega (u_{-2} - u_{-1});$$

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \left[\dot{V}(0) - \frac{1}{2} \pi \dot{c}_1 - \frac{3}{2} \pi \dot{c}_3 \right] &= \\
 &= \dot{C}_0^* - \sum_{j=0}^3 N_j \dot{\alpha}_j \sin j\Omega u_{-1}, \\
 \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) \left[\dot{V} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \dot{c}_1 - \pi \dot{c}_2 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi \dot{c}_3 \right] &= \\
 &= \sum_{j=0}^1 \dot{C}_j^* u_2^j + \sum_{j=0}^3 N_j \dot{\alpha}_j \sin j\Omega (u_2 - u_{-1}), \quad (26) \\
 \left(\rho_0 + \frac{1}{2} \right) \left[\dot{V} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \dot{c}_1 + \pi \dot{c}_2 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi \dot{c}_3 \right] &= \\
 &= \sum_{j=0}^1 \dot{C}_j^* u_{-2}^j + \sum_{j=0}^3 N_j \dot{\alpha}_j \sin j\Omega (u_{-2} - u_{-1})
 \end{aligned}$$

Это простая система уравнений для шести неизвестных $\dot{c}_j, \dot{\alpha}_j$ ($j=1, 2, 3$). Решая каждую из систем (25), (26) относительно неизвестных $\dot{c}_1, \dot{c}_2, \dot{c}_3$ и приравнивая соответственно результаты, мы получаем систему трех уравнений для неизвестных $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$, которую согласно формулам (22), (23) можно решить как для верхнего, так и для нижнего знака. Таким путем мы получим, с одной стороны, величины \dot{c}_j , а с другой стороны, как уже указано выше, постоянные $\alpha_j, \alpha_j', c_j, c_j'$.

Для практических применений, конечно, выгодно, кроме функций F_i, G (см. часть I работы), вычислить раз навсегда и величины

$$u^j, N_j, \sin j\Omega (u - u_{-1})$$

для различных значений параметра ρ_0 .

6. Пример. Задача плоского распределения температуры в области, указанной на чертеже фиг. 1, тесно связана с задачей концентрического распределения температуры в цилиндрической оболочке с плоским дном. Если толщина оболочки достаточно мала по сравнению с диаметром цилиндра, то концентрическое распределение температуры лишь немногим будет отличаться от плоского распределения (поскольку вопрос касается цилиндрической части и закругления, соединяющего ее с плоским дном); концентрическое же распределение температуры в плоском дне определяется без затруднений. К этому вопросу мы еще вернемся в заключительном разделе.

В нижеследующем примере мы распределение температуры предполагаем симметричным по отношению к плоскости $\theta=0$. В этом специальном случае мы можем ограничиться рассмотрением областей I и III. Пусть пограничные температуры и функции даны следующей таблицей:

	Область I	Область III
Внутр. погранич. поверхн. ($\xi = 1, u = u_1$)	$T = M\zeta^2$	$T = 0$
Внешн. погранич. поверхн. ($\xi = -1, u = u_{-1}$)	$T = M\zeta^2$	$T = 0$
Погранич. функции	$T^0 = M\zeta^2, P^0 = 0$	$T^0 = 0, P^0 = 0$

В этой таблице M есть постоянная. Что же касается параметра ρ_0 , то мы примем $\rho_0 = 2$.

Согласно уравнениям (6), (12), (13), (14) мы теперь имеем:

$$T^I = M\zeta^2 + M(1 - \xi^2) + c_1 e^{-\frac{1}{2}\pi\zeta} \cos \frac{1}{2} \pi\zeta + c_2 e^{-\pi\zeta} \sin \pi\zeta + c_3 e^{-\frac{3}{2}\pi\zeta} \cos \frac{3}{2} \pi\zeta, \quad (27)$$

$$T^{III} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\operatorname{ch} j\Omega\theta}{\operatorname{ch} j\Omega \frac{\pi}{4}} \sin j\Omega(u - u_{-1}). \quad (28)$$

В силу вышеупомянутой симметрии система (17) здесь сводится к двум уравнениям:

$$T^I_{(\xi=0)} = T^{III}_{(\theta=\frac{\pi}{4})}, \quad \rho_0 P^I_{(\xi=0)} = e^u P^{III}_{(\theta=\frac{\pi}{4})}, \quad (29)$$

так что пунктированные величины в уравнениях (24), (25), (26) в настоящем случае тождественны с искомыми величинами.

Условия (29), очевидно, выполнены в точках $\xi = \pm 1, u = u_{\pm 1}$. Уравнения (24), таким образом, удовлетворены. Что же касается уравнений (25), (26), в которых $C_j, C_j^*, V(p)$ равны нулю, а $U(p) = M(1 - p^2)$, то из них для неопределенных коэффициентов получаем следующие значения:

$$\frac{\alpha_1}{M} = 0.513, \quad \frac{\alpha_2}{M} = 0.080, \quad \frac{\alpha_3}{M} = 0.048; \quad \frac{c_1}{M} = -0.502, \quad \frac{c_2}{M} = 0.010, \quad \frac{c_3}{M} = 0.015.$$

Вычисление этих постоянных произведено с помощью счетной линейки. Последние две постоянные представляют собой уже слишком малые числа, чтобы можно было в значительной степени полагаться на их точность. Ниже следующая таблица облегчит читателю проверку вычислений.

Таблица для вычисления неопределенных постоянных ($\rho_0 = 2$)

ξ	-1	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25	0.50	0.75	1
$u - u_{-1}$	0	0.087	0.182	0.288	0.405	0.539	0.693	0.875	1.099
$\sin \Omega(u - u_{-1})$	0	0.247	0.500	0.733	0.917	1.000	0.910	0.598	0
$\frac{N_1 \sin \Omega(u - u_{-1})}{\pi(\rho_0 - \xi)}$	0	0.080	0.178	0.291	0.409	0.510	0.540	0.428	0
$\sin 2\Omega(u - u_{-1})$	0	0.479	0.860	0.996	0.730	0.060	-0.730	-0.959	0
$\frac{N_2 \sin 2\Omega(u - u_{-1})}{\pi(\rho_0 - \xi)}$	0	0.318	0.630	0.800	0.664	0.063	-0.888	-1.400	0
$\sin 3\Omega(u - u_{-1})$	0	0.682	1.000	0.621	-0.350	-1.000	-0.340	0.940	0
$\frac{N_3 \sin 3\Omega(u - u_{-1})}{\pi(\rho_0 - \xi)}$	0	0.678	1.090	0.755	-0.480	-1.560	-0.618	2.060	0

$$u = \ln[\rho_0 : (\rho_0 - \xi)], \quad u_{-1} = \ln[\rho_0 : (\rho_0 + 1)], \quad u - u_{-1} = \ln[(\rho_0 + 1) : (\rho_0 - \xi)],$$

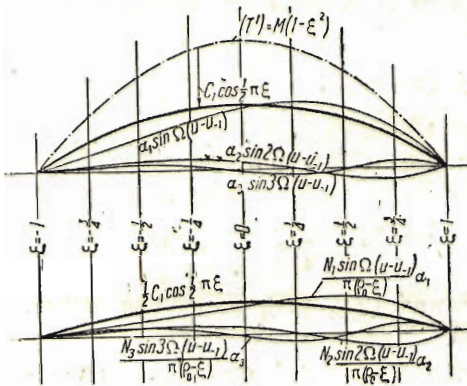
$$(u) = u_1 - u_{-1} = 1.099; \quad \Omega = \pi : (u) = 2.86; \quad N_j = j\Omega \operatorname{th} \frac{1}{4} j\pi\Omega;$$

$$N_1 = 2.80$$

$$N_2 = 5.72$$

$$N_3 = 8.58$$

Чертежи фиг. 2 дают графическое представление результатов. На этих чертежах тонко начерченные кривые относятся к плоскости $\theta = \pi/4$ области III. Из соответствующих кривых плоскости $\zeta = 0$ области I в верхней и нижней частях фигуры представлена лишь первая волна, а именно, посредством утолщенной кривой, причем ординаты отсчитываются от оси абсцисс в верхней части фиг. 2 и от частного решения $(T^1) = M(1 - \xi^2)$ в нижней. Сумма трех тонко начерченных кривых в каждой из диаграмм от соответствующей утолщенной кривой отличается несущественно, что и подтверждает правильность расчета в только что охарактеризованных пределах точности.



Фиг. 2.

Вводя определенные таким образом постоянные в формулы (27), (28), получим распределение температуры нашей плоской задачи.

7. Задача цилиндрического сосуда и заключительные замечания. В вышеприведенном примере мы предположили ρ_0 равным 2. Для больших значений параметра ρ_0 или же для значений, которые несколько меньше 2, вычисления существенным образом не изменяются. Однако, чем ближе ρ_0 подходит к единице, тем медленнее сходимость примененного выше способа, так как $\rho_0 = 1$ есть нерегулярная точка задачи. Кривизну соответствующего порядка при нашем способе приходится, таким образом, исключить. Заметим, что в технических задачах столь резкие закругления вообще не встречаются. Так, например, $\rho_0 \approx 3$ в так называемых нормальных профилях.¹

Если в случаях недостаточно быстрой сходимости желательна большая точность расчета, то приведенный выше способ может быть использован с четырьмя промежуточными точками вместо трех.

Что же касается задачи концентрического распределения температуры в цилиндрической оболочке с плоским дном той же толщины, что и оболочка, то мы ограничимся следующими замечаниями.

Если диаметр цилиндра по сравнению с толщиной оболочки достаточно велик, то поперечное распределение температуры в стенке, включая закругляющую часть, будет приблизительно тем же, что и в случае разобранный выше плоской задачи. Другими словами говоря, формулы (6), (14) для областей I, III остаются правильными и в случае цилиндрической оболочки. Для области же II мы, в соответствии с частью I, вводим выражения:

$$T^{oi} = \sum_{j=0}^m A'_j \bar{r}^{2j}, \quad P^{oi} = \sum_{j=0}^m B'_j \bar{r}^{2j},$$

¹ См., например, Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, p. 763, Bd. I, 1931.

где r' есть расстояние точки от оси цилиндра, а $\bar{r} = r'/h$; пользуясь оператором

$$\bar{D} = D_{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right),$$

мы получаем функции $U'(p)$, $V'(p)$ рассматриваемой задачи. Хотя они относительно постоянных A_j , B_j , A'_j , B'_j с соответствующими функциями области I не симметричны, мы все же, как и раньше, можем ввести функции:

$$\dot{U}(p) = U(p) \pm U'(p), \quad \dot{V}(p) = V(p) \pm V'(p).$$

Отличие от предыдущего заключается лишь в том, что постоянные A_j , B_j в данных выше выражениях для $\dot{U}(p)$, $\dot{V}(p)$ теперь замещаются другими линейными относительно постоянных A_j , B_j , A'_j , B'_j выражениями.

Переходя, наконец, к вопросу вспомогательного решения, мы констатируем, что если, как мы здесь предполагаем, диаметр оболочки достаточно велик, дополнительное решение (2') от решения (2) отличается несущественно. Поэтому мы в таком случае вместо (2') можем применить то же вспомогательное решение, что и в (6'), (7'), (8'), отождествляя $\bar{r}'_1 - \bar{r}'$ с ξ' .

Приведенное соображение показывает, что в концентрической задаче цилиндрической оболочки с плоским дном данный выше способ решения применим без существенных изменений.

Поступила 24 III 1937

VI 1936.

ON THE EFFECT OF SHARP CURVATURE CHANGES IN STEADY TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN THE THIN WALLED SOLIDS

I. F. MALKIN

(New York)

(Summary)

The article is the second part of a contribution to the problem of the conduction of heat in plates, disks, shells and shafts.¹ This second part deals with the problem of plane steady temperature distributions in bent plates and also of concentric temperature distributions in thin cylindrical shells with plane bottom.

The procedure in solving can be characterized as follows. Referring to fig. 1, representing the cross-section of the solid under consideration, the plane domain is subdivided into three parts I, II, III. Each of these parts is treated in the manner indicated in the preceding article mentioned above; as to the par-

¹ See this issue, p. 317

tial domain III, the method in question is applied in using a transformation by conformal representation. The result of this procedure is primarily a temperature function satisfying the differential equation as well as the boundary conditions, but discontinuous in the planes of separation between the parts I, II, III. These discontinuities are removed by certain auxiliary solutions.

This method yields a comparatively simple system of linear equations for the undetermined coefficients of the temperature distribution, as can be concluded from the practical example given in the concluding sections of the article.