

## К ЗАДАЧАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКИХ ПЛАСТИНКАХ

Я. Ф. МАЛКИН

(Бостон, США)

**1. Введение.** Нижеследующие строки представляют собой первую часть работы, посвященной задаче распределения температуры в тонкостенных сосудах.<sup>1</sup> Решение этой задачи является, как известно, основанием, на котором покоится возможность расчета теплоупругих напряжений в важных частях теплосиловых машин. В настоящей первой части мы прежде всего даем некоторую практически весьма удобную форму решения гармонического дифференциального уравнения, которая потом будет нами применена к различным частным случаям, причем задача стационарного, т. е. независящего от времени, распределения температуры в плоских пластинках разбирается нами в этой же первой части работы.

В упомянутом только что случае теплового равновесия иногда оказывается допустимым приближение, основанное на предположении прямолинейного распределения температуры по толщине стенки. Такое приближение, вообще говоря, недопустимо, если распределение температуры зависит от времени. Но даже и в состоянии теплового равновесия указанное упрощение задачи будет неприменимым, если продольный компонент температурного градиента в пограничных поверхностях обладает достаточной степенью неравномерности. Резкие изменения в кривизне стенки требуют также внимательного к себе отношения в технических задачах и оказывают вообще немалое влияние на распределение температуры по толщине стенки.

В виду указанных только что причин в предлагаемом ниже способе расчета температурного поля всякие предпосылки о законе поперечного распределения температуры избегаются. Исходя из некоторого разложения гармонической функции в конечный или бесконечный ряд, мы, путем согласования

---

<sup>1</sup> Продолжением являются статья автора „К влиянию резких закруглений на стационарные распределения температуры в тонкостенных твердых телах“ в этом же выпуске сборника, а также статьи „Распределение температуры в нагреваемых по поверхности пластинках и дисках“ в следующем 4-м выпуске II тома сборника „Прикладная математика и механика“ и „К задаче распределения температуры в цилиндрических валах и облочках“ во 2-м выпуске III тома.

последнего с пограничными условиями обеих плоских поверхностей пластинки получим простой способ решения нашей задачи распределения температуры в плоских, а затем и в гнутых пластинках, равно как и в тонкостенных оболочках цилиндрической формы с плоским дном при условии осевой симметрии, причем способ этот с некоторой модификацией оказывается применимым во многих случаях и при решении задачи изменяющейся со временем температуры.

Как упомянуто выше, случай теплового равновесия плоской пластинки, и притом при пограничных условиях весьма общего характера, рассматривается нами в настоящей первой части работы. В последующих частях,<sup>1</sup> посвященных задачам влияния резких изменений в кривизне и изменяющейся со временем температуры, настоящая часть будет цитироваться как часть I.

**2. Общее выражение для стационарного распределения температуры в бесконечной плоской пластинке.** Пусть бесконечная плоская пластинка отнесена к прямо угольной  $(xyz)$  или цилиндрической  $(r\theta z)$  системе координат и, следовательно,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

толщина пластинки равна  $2h$ , причем средняя плоскость пластинки, совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Обозначая посредством  $T$  температуру пластинки, дифференциальное уравнение нашей задачи можно написать следующим образом:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Пограничные условия мы рассмотрим в разделах 3 и 4.

Дифференциальное уравнение (1) может быть написано в сокращенной форме:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -DT, \quad (2)$$

где  $D$  есть плоский оператор Лапласа. Так как правая часть уравнения (2) не содержит координаты  $z$ , то его интеграл можно найти с помощью следующих итераций.

Температура плоскости  $z = 0$  есть некоторая функция  $T_0$ , независимая от  $z$ . Поэтому, во всяком достаточно тонком слое, содержащем в себе плоскость  $z = 0$ , будем иметь:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -DT_0, \quad T = -\frac{z^2}{2!} DT_0 + \frac{z}{1!} P_0 + T_0, \quad P_0 = \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Подставляя вторую из этих формул в правую часть уравнения (2), мы рядом повторных применений этого простого процесса находим общую формулу:<sup>2</sup>

$$T = T_0 - \frac{z^2}{2!} DT_0 + \frac{z^4}{4!} D^2 T_0 - \frac{z^6}{6!} D^3 T_0 + \dots + \frac{z}{1!} P_0 - \frac{z^3}{3!} DP_0 + \frac{z^5}{5!} D^2 P_0 + \dots \quad (3)$$

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 317.

<sup>2</sup> Степенные ряды для решения уравнения (1) в особых формах встречаются уже у E. Goursat, Cours d'Analyse, ch. XXIX, vol. 3, Paris, 1923.

Чем толще рассматриваемый слой, тем большее количество членов формулы (3) приходится принимать в расчет.

Функции  $T_0$  и  $P_0$  должны быть исключены из формулы (3) путем подстановки пограничных условий. При этом мы рассмотрим отдельно два случая, из которых второй, как общий, содержит в себе первый, как частный.

**3. Случай данных пограничных температур.** Температуры плоскостей  $z = h$  и  $z = -h$  обозначим соответственно через  $T_h$  и  $T_{-h}$ . Тогда величины  $T^0$  и  $P^0$  в формулах

$$T^0 = \frac{1}{2}(T_h + T_{-h}) = T_0 - \frac{h^2}{2!}DT_0 + \frac{h^4}{4!}D^2T_0 - \frac{h^6}{6!}D^3T_0 + \dots, \quad (4)$$

$$hP^0 = \frac{1}{2}(T_h - T_{-h}) = \frac{h}{1!}P_0 - \frac{h^3}{3!}DP_0 + \frac{h^5}{5!}D^2P_0 - \frac{h^7}{7!}D^3P_0 + \dots \quad (5)$$

следует рассматривать как данные функции координат, введенных в плоскости  $z = 0$ .

Из соотношений (4) и (5) функции  $T_0$  и  $P_0$  могут быть вычислены путем подстановки гипотетических разложений:

$$T_0 = a_0T^0 + a_1DT^0 + a_2D^2T^0 + a_3D^3T^0 + \dots, \quad (6)$$

$$P_0 = b_0P^0 + b_1DP^0 + b_2D^2P^0 + b_3D^3P^0 + \dots, \quad (7)$$

где величины  $a_j, b_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) представляют собой постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя выражения (6) и (7), как сказано, в (4) и (5), для названных коэффициентов получаем следующие уравнения:

$$a_0 = b_0 = 1; \quad (8a)$$

$$a_j - \frac{h^2}{2!}a_{j-1} + \frac{h^4}{4!}a_{j-2} - \dots + (-1)^j \frac{h^{2j}}{(2j)!}a_0 = 0, \quad (8b)$$

$$\frac{h}{1!}b_j - \frac{h^3}{3!}b_{j-1} + \frac{h^5}{5!}b_{j-2} - \dots + (-1)^j \frac{h^{2j+1}}{(2j+1)!}b_0 = 0.$$

Решая эти уравнения, как указано ниже в разд. 5, мы из (3), (6), (7) получим

$$T = a_0T^0 + \left(a_1 - a_0 \frac{z^2}{2!}\right)DT^0 + \left(a_2 - a_1 \frac{z^2}{2!} + a_0 \frac{z^4}{4!}\right)D^2T^0 +$$

$$+ \left(a_3 - a_2 \frac{z^2}{2!} + a_1 \frac{z^4}{4!} - a_0 \frac{z^6}{6!}\right)D^3T^0 + \dots +$$

$$+ b_0P^0z + \left(b_1 - b_0 \frac{z^2}{3!}\right)DP^0z + \left(b_2 - b_1 \frac{z^2}{3!} + b_0 \frac{z^4}{5!}\right)D^2P^0z +$$

$$+ \left(b_3 - b_2 \frac{z^2}{3!} + b_1 \frac{z^4}{5!} - b_0 \frac{z^6}{7!}\right)D^3P^0z + \dots \quad (9)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (2), а с другой стороны, мы на основании формул (8a), (8b) убеждаемся, что и пограничные условия плоскостей  $z = \pm h$  оказываются выполненными. Поэтому выражение (9) представляет собой решение задачи.

Этот проверочный процесс, однако, применим лишь в случае конечных выражений (9). Случай же бесконечного ряда (9) рассматривается особо в разд. 10.

Формуле (9) можно придать несколько более простой вид, если вместо координат ввести их отношения к полутолщине  $h$  пластинки. В этом случае можно написать:

$$\bar{T} = F_0 \bar{T}^0 + F_1 \bar{D} \bar{T}^0 + F_2 \bar{D}^2 \bar{T}^0 + \dots + G_0 \bar{P}^0 + G_1 \bar{D} \bar{P}^0 + G_2 \bar{D}^2 \bar{P}^0 + \dots, \quad (10)$$

где черта над буквой указывает на величину измерения нуль, причем оператор  $\bar{D}$  берется по указанным отношениям координат к  $h$ , функции  $\bar{T}$ ,  $\bar{T}^0$ ,  $\bar{P}^0$  определяются посредством

$$\bar{T} = T : T^*, \quad \bar{T}^0 = T^0 : T^*, \quad \bar{P}^0 = P^0 h : T^*,$$

где  $T^*$  есть некоторая постоянная температура, а функции  $F_j$  и  $G_j$  суть некоторые многочлены, данные в разд. 6.

**4. Пограничные условия общего вида.** Приведенный выше способ решения в существенных чертах остается тот же в случае пограничных условий общего вида:<sup>1</sup>

$$c \frac{\partial T}{\partial \nu} + T = \vartheta \quad \text{для } z = \pm h, \quad (11)$$

где  $\vartheta$  означает температуру прилегающей среды, а  $\nu$  есть внешняя нормаль пограничной поверхности тела;  $c$  есть некоторая постоянная, которой мы здесь приписываем одно и то же значение на обеих пограничных плоскостях  $z = \pm h$ .

В случае (11) даются пограничные температуры прилегающей среды, а не пограничные температуры самой пластинки. Вследствие затруднений, встречающихся при экспериментальном определении постоянной  $c$ , применение пограничных условий вида (11) принципиально избегается.<sup>2</sup> В задачах техники это, однако, не всегда возможно.<sup>3</sup> Поэтому более подробный разбор случая (11) представляет собой практический интерес.

Условиям (11) можно придать вид:

$$\begin{aligned} c \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_h + T_h &= \vartheta_h \quad \text{для } z = h, \\ -c \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{-h} + T_{-h} &= \vartheta_{-h} \quad \text{для } z = -h. \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1,2</sup> См. например, H. S. Carslaw, Theory of Conduction of Heat, p. 14, London, 1921, или H. Groeber und S. Erk, Grundgesetze der Wärmeübertragung, p. 11, 2 Aufl., Berlin, 1933.

<sup>3</sup> G. Eichelberg, Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 263, Berlin, 1923.

Путем подстановки выражения (3) в (12) находим:

$$\begin{aligned} \vartheta^\circ &= \frac{1}{2} (\vartheta_h + \vartheta_{-h}) = T_0 - \left( c \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} \right) DT_0 + \left( c \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} \right) D^2 T_0 - \\ &\quad - \left( c \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} \right) D^3 T_0 + \dots \\ \left( c + \frac{h}{1!} \right) \pi^\circ &= \frac{1}{2} (\vartheta_h - \vartheta_{-h}) = \left( c + \frac{h}{1!} \right) P_0 - \left( c \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} \right) DP_0 + \\ &\quad + \left( c \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} \right) D^2 P_0 - \left( c \frac{h^6}{6!} + \frac{h^7}{7!} \right) D^3 P_0 + \dots \end{aligned} \tag{13}$$

В эти формулы по аналогии с предыдущим вводим:

$$T_0 = \alpha_0 \vartheta^\circ + \alpha_1 D\vartheta^\circ + \alpha_2 D^2 \vartheta^\circ + \alpha^3 D^3 \vartheta^\circ + \dots, \tag{6a}$$

$$P_0 = \beta_0 \pi^\circ + \beta_1 D\pi^\circ + \beta_2 D^2 \pi^\circ + \beta_3 D^3 \pi^\circ + \dots, \tag{7a}$$

что ведет к уравнениям:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1, \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} \alpha_j - \left( c \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} \right) \alpha_{j-1} + \left( c \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} \right) \alpha_{j-2} - \left( c \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} \right) \alpha_{j-3} + \dots + \\ + (-1)^j \left[ c \frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!} + \frac{h^{2j}}{(2j)!} \right] \alpha_0 = 0, \\ \left( c + \frac{h}{1!} \right) \beta_j - \left( c \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} \right) \beta_{j-1} + \left( c \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} \right) \beta_{j-2} - \left( c \frac{h^6}{6!} + \frac{h^7}{7!} \right) \beta_{j-3} + \dots + \\ + (-1)^j \left[ c \frac{h^{2j}}{(2j)!} + \frac{h^{2j+1}}{(2j+1)!} \right] \beta_0 = 0, \end{aligned} \tag{14b}$$

из которых определяются постоянные  $\alpha_j, \beta_j$ . Решение уравнений (14a), (14b) дано в следующем разделе. Определив постоянные  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  и подставив их в (3), получим выражение вида (9) с постоянными  $\alpha_j, \beta_j$  вместо  $a_j, b_j$  и функциями  $\vartheta^\circ, \pi^\circ$  вместо  $T^\circ, P^\circ$ . Результат опять-таки может быть выражен при помощи величин измерения нуля аналогично формуле (10), причем функции  $F_j, G_j$  в этой формуле замещаются некоторыми другими функциями  $\Phi_j, \Gamma_j$ , вычисленными в разд. 6.

**5. Вычисление постоянных  $\alpha_j, b_j$  и  $\alpha_j, \beta_j$ .** Для малых значений  $j$  из уравнений (8a), (8b) получаем непосредственно:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2!} h^2 = 0.50000 h^2, \quad \alpha_2 = \frac{5}{4!} h^4 = 0.20833 h^4, \\ \alpha_3 = \frac{61}{6!} h^6 = 0.08472 h^6, \quad \alpha_4 = \frac{1385}{8!} h^8 = 0.03435 h^8, \\ \alpha_5 = 0.01392 h^{10}; \end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned} b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{3!} h^2 = 0.16667 h^2, \quad b_2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5!} h^4 = 0.01944 h^4, \\ b_3 = \frac{31}{3} \cdot \frac{1}{7!} h^6 = 0.00205 h^6, \quad b_4 = 0.00021 h^8. \end{aligned} \tag{15b}$$

Для больших же значений  $j$  постоянные  $a_j$  и  $b_j$  могут быть определены следующим образом. Введя символ

$$q_{j+1,j} = a_{j+1} : h^2 a_j,$$

рассмотрим систему значений:

$$\begin{aligned} q_{1,0} &= 0.50000, & q_{2,1} &= 0.41666, & q_{3,2} &= 0.40663, \\ q_{4,3} &= 0.40545, & q_{5,4} &= 0.40524, \dots \end{aligned}$$

При этом возникает вопрос о существовании предела для указанной системы чисел. Такой предел действительно существует, и его можно вычислить, пользуясь первым из соотношений (8b). Подставляя гипотетически

$$q_{j+1,j} = \text{const} = \delta^{-2}, \quad (16)$$

где  $j$  имеет некоторое достаточно большое значение, в первую из формул (8b), получим:

$$a_j \left( 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \frac{\delta^6}{6!} + \dots \right) = 0.$$

Если, как указано,  $j$  представляет собой достаточно большое число, последнее уравнение с достаточной степенью приближения может быть написано следующим образом:

$$a_j \cos \delta = 0. \quad (17)$$

Этот результат оправдывает наше предположение о существовании предела для системы отношений  $q_{j+1,j}$ . Уравнению (17) можно удовлетворить посредством

$$\delta^2 = \left( \frac{1}{2} \pi \right)^2,$$

поэтому искомым предел равен

$$q = \lim q_{j+1,j} = 0.40524$$

в соответствии с данными выше результатами.

Подобным же путем находим:

$$q' = \lim q'_{j+1,j} = \lim (b_{j+1} : h^2 b_j) = 1 : \pi^2 = 0.10132,$$

опять-таки в соответствии с данными выше результатами.

Что же касается уравнений (14a) и (14b), то они решаются аналогичным образом. Для малых значений  $j$ , вводя количества

$$\bar{c} = c : h, \quad \bar{\gamma} = 1 : (c + 1),$$

получаем:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \left( \frac{\bar{c}}{1!} + \frac{1}{2!} \right) h^2, \quad \alpha_2 = \left[ \left( \frac{\bar{c}}{1!} + \frac{1}{2!} \right)^2 - \left( \frac{\bar{c}}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \right] h^4, \dots \quad (18)$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \left( \frac{\bar{c}}{2!} + \frac{1}{3!} \right) \bar{\gamma} h^2, \quad \beta_2 = \left[ \bar{\gamma}^2 \left( \frac{\bar{c}}{2!} + \frac{1}{3!} \right)^2 - \bar{\gamma} \left( \frac{\bar{c}}{4!} + \frac{1}{5!} \right) \right] h^4, \dots \quad (19)$$

Для больших же значений  $j$  находим:

$$\begin{aligned} \lim (\alpha_{j+1} : \alpha_j h^2) &= \delta_c^{-2}, \quad \text{ctg } \delta_c - \bar{c} \delta_c = 0; \\ \lim (\beta_{j+1} : \beta_j h^2) &= \epsilon_c^{-2}, \quad \text{tg } \epsilon_c + \bar{c} \epsilon_c = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Для обеспечения непрерывного перехода к решениям системы уравнений (14b) мы должны предписать:

$$0 \leq \delta_c^2 \leq \left(\frac{1}{2} \pi\right)^2 \leq \epsilon_c^2 \leq \pi^2. \tag{21}$$

**6. Определение функций  $F_j$ ,  $G_j$  и  $\Phi_j$ ,  $\Gamma_j$ .** Исходя из соотношений (15a), (15b) в связи с формулами (9), (10) для меньших значений  $j$  без труда получаем выражения:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, & F_1 &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!} p^2, & F_2 &= \frac{5}{4!} - \frac{1}{(2!)^2} p^2 + \frac{1}{4!} p^4, \\ F_3 &= \frac{61}{6!} - \frac{1}{2!} \frac{5}{4!} p^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{4!} p^4 - \frac{1}{6!} p^6, \end{aligned} \tag{22}$$

$$F_4 = \frac{1385}{8!} - \frac{1}{2!} \frac{61}{6!} p^2 + \frac{1}{4!} \frac{5}{4!} p^4 - \frac{1}{2!} \frac{1}{6!} p^6 + \frac{1}{8!} p^8, \dots$$

$$G_0 = p, \quad G_1 = \frac{1}{3!} p - \frac{1}{3!} p^3, \quad G_2 = \frac{7}{8} \frac{1}{5!} p - \frac{1}{(3!)^2} p^3 + \frac{1}{5!} p^5, \tag{23}$$

$$G_3 = \frac{31}{3} \frac{1}{7!} p - \frac{7}{3} \frac{1}{3!} \frac{1}{5!} p^3 + \frac{1}{3!} \frac{1}{5!} p^5 - \frac{1}{7!} p^7, \dots,$$

где

$$-1 \leq p = \frac{z}{h} \leq 1. \tag{24}$$

Для больших же значений  $j$  функции  $F_j$ ,  $G_j$  могут быть определены следующим образом.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^2 F_j}{dp^2} = -F_{j-1}; \quad \frac{d^2 G_j}{dp^2} = -G_{j-1} \quad (j=1, 2, 3, \dots). \tag{25}$$

Далее, мы знаем, что

$$\begin{aligned} F_j &= \frac{a_j}{a_0 h^{2j}} > 0, & \frac{dF_j}{dp} &= 0; & G_j &= 0, & \frac{dG_j}{dp} &= \frac{b_j}{b_0 h^{2j}} > 0 \text{ для } p=0; \\ F_j &= 0; & & & G_j &= 0 & & \text{для } p = \pm 1; \end{aligned} \tag{26}$$

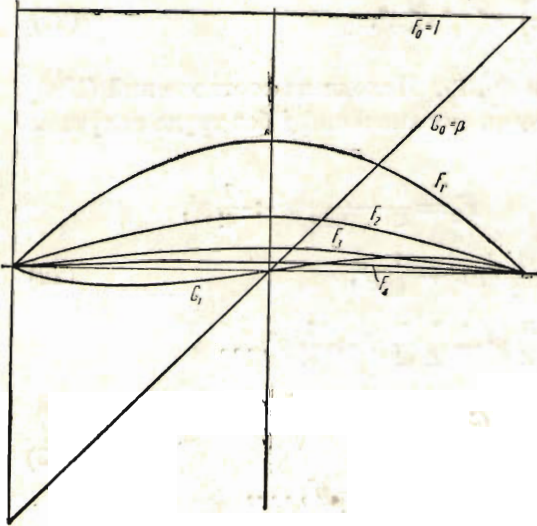
( $j=1, 2, 3 \dots$ ).

Из соотношений (25), (26) можно вывести следующие заключения. Поведение первых и вторых производных показывает, что каждая из функций  $F_j$  в точке  $p=0$  имеет положительный максимум, равный

$$\frac{a_j}{h^{2j}},$$

Начиная, в частности, с  $F_1$ , мы видим, что вторая производная этой функции, именно (постоянная) функция  $-F_0$ , отлична от нуля в интервале (24); следовательно, функция  $F_1$  не имеет точек перегиба в указанном интервале; это ведет к дальнейшему заключению, что  $F_1$  не может равняться нулю нигде внутри интервала (24), т. е.

$$F_1 > 0 \text{ в интервале } -1 < p < 1. \quad (27)$$



Фиг. 1.

одной лишь функции  $F_0$  все они равны нулю в пограничных точках  $p = \pm 1$  (и притом только в них) и что они не имеют точек перегиба внутри интервала, так что касательные представляющих эти функции кривых непрерывно вращаются в одном и том же направлении.

Аналогичным образом находим:

$$G_j > 0 \text{ для } 0 < p < +1,$$

$$G_j < 0 \text{ для } 0 > p > -1,$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots)$$

с точками перегиба в  $p = 0$  и (начиная с  $j = 2$ ) в  $p = \pm 1$ .

Функции  $F_j, G_j$  представлены графически на чертеже фиг. 1.

Другая система формул для этих функций дана будет в разд. 7.

Что же касается функций  $\Phi_j, \Gamma_j$ , то они могут быть определены подобным же образом, если дана постоянная  $\zeta$ . В этом случае опять имеем:

$$\frac{d^2\Phi_j}{dp^2} = -\Phi_{j-1}, \quad \frac{d^2\Gamma_j}{dp^2} = -\Gamma_{j-1} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\left(\frac{d\Phi_j}{dp}\right)_{p=0} = 0, \quad (\Gamma_j)_{p=0} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$



и опять функции  $\Phi_j$  и  $\frac{d\Gamma_j}{dp}$  принимают максимальные значения в точке  $p=0$ .

Для меньших значений  $j$  эти максимумы следуют из (18), (19), для больших же значений они следуют из (20). Согласно соотношениям (14a), (14b) функции  $\Phi_j, \Gamma_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) не равны нулю в точках  $p=\pm 1$ . Для меньших значений  $j$  пограничные значения функций  $\Phi_j, \Gamma_j$  могут быть вычислены непосредственно из соотношений (14a), (14b), для больших же значений  $j$  следует прибегнуть к формулам (20). Из последних находим, что пограничные значения функций  $\Phi_j$  и  $\Gamma_j$  соответственно равны

$$\delta_c^{-2j} \cos \delta_c, \quad \epsilon_c^{-(2j+1)} \sin \epsilon_c \quad (\text{для больших } j).$$

В итоге мы констатируем, что  $\Phi_j, \Gamma_j$  в качественном отношении представляют собой функции подобного же рода, что и  $F_j, G_j$ , с той, однако, разницей, что первые не равны нулю в пограничных точках  $p=\pm 1$  интервала (24).

**7. Другая форма функций  $F_j, G_j$ .** Нижеследующая форма выражения функций  $F_j, G_j$  может быть полезна при больших значениях  $j$ .

В интервале  $-1 \leq p \leq 1$  имеем разложения:

$$F_0 = 1 = \frac{4}{\pi} \left( \cos \frac{1}{2} \pi p - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2} \pi p + \frac{1}{5} \cos \frac{5}{2} \pi p - \dots \right), \quad (28)$$

$$G_1 = \frac{1}{6} (p - p^3) = \frac{2}{\pi^3} \left( \sin \pi p - \frac{1}{2^3} \sin 2\pi p + \frac{1}{3^3} \sin 3\pi p - \dots \right). \quad (29)$$

Из соотношений (25), (26) мы знаем, что функции  $F_j, G_{j+1}$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) могут быть получены путем  $2j$ -кратного интегрирования выражений (28), (29), умножения интегралов на  $(-1)^j$  и приравнивания их нулю в пограничных точках  $p=\pm 1$ . Нетрудно видеть, что, применяя указанный процесс к выражениям (28), (29), мы получим:

$$F_j = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2j} \left( \cos \frac{1}{2} \pi p - \frac{1}{3^{2j+1}} \cos \frac{3}{2} \pi p + \frac{1}{5^{2j+1}} \cos \frac{5}{2} \pi p - \dots \right), \quad (30)$$

$$G_{j+1} = \frac{2}{\pi^3} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{2j} \left( \sin \pi p - \frac{1}{2^{2j+3}} \sin 2\pi p + \frac{1}{3^{2j+3}} \sin 3\pi p - \dots \right), \quad (31)$$

$$(j=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Пользуясь этими формулами, можно сравнительно быстро и просто определить функции  $F_j, G_j$  для больших значений  $j$ , ибо сходимость рядов (30), (31) улучшается по мере возрастания значения  $j$ . Быстрая сходимость делает возможной также легкую проверку полученных выше результатов о пределах, к которым стремятся отношения максимумов функций  $F_j$  и отношения максимальных наклонов функций  $G_j$  для больших значений  $j$ .

**8. Примеры.** Пусть пограничные распределения температуры соответственно равны:

$$\bar{T}_h = 2(1 - A\xi^4)(1 - B\eta^2), \quad \bar{T}_{-h} = 0,$$

причем

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad A = \text{const.}, \quad B = \text{const.}$$

Следуя приведенным выше соображениям, заключаем, что решение получится путем подстановки выражений

$$\begin{aligned} \bar{T}^0 = \bar{P}^0 &= (1 - A\xi^4)(1 - B\eta^2), \quad \bar{D} \bar{T}^0 = \bar{D} \bar{P}^0 = -3 \cdot 4 A \xi^2 (1 - B\eta^2) - 1 \cdot 2 B (1 - A\xi^4), \\ \bar{D}^2 \bar{T}^0 = \bar{D}^2 \bar{P}^0 &= 4! A (-1 + B\eta^2 + 2B\xi^2), \quad \bar{D}^3 \bar{T}^0 = \bar{D}^3 \bar{P}^0 = 6 \cdot 4! AB \end{aligned}$$

в (10). Этот результат, разумеется, может быть проверен подстановкой в дифференциальное уравнение (1), при которой нужно учесть соотношения (22), (23), (24)

На краевых пограничных поверхностях, перпендикулярных к поверхностям  $z = \pm h$ , пограничные условия при помощи нашего решения, вообще говоря, не могут быть удовлетворены. Если такого рода добавочные пограничные условия должны быть приняты в расчет, то на приведенное решение приходится наложить некоторое вспомогательное решение. Такой случай будет нами разобран в части II работы.<sup>1</sup>

Рассмотрим теперь круговую пластинку той же толщины  $2h$  и диаметра  $2r_1$  в концентрических условиях, определяемых пограничными распределениями температуры по формулам:

$$\bar{T}_h = \bar{T}_{-h} = \rho^2, \quad 0 \leq \rho = \frac{r}{h} \leq \frac{r_1}{h} = \rho_1 = 5.$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$$

и решение дано посредством

$$\bar{T} = \bar{T}^0 + F_1 \bar{D} \bar{T}^0 = \rho^2 + 4F_1.$$

Это распределение температуры представлено графически на чертеже фиг. 2.

Подобный же случай представлен на чертеже фиг. 3. Распределение температуры на пограничных плоскостях дано посредством

$$\bar{T}_h = \bar{T}_{-h} = \bar{T}^0 = 2\rho_1^2 \rho^2 - \rho^4, \quad \bar{P}^0 = 0.$$

Принимая опять  $\rho_1$  равным 5, получаем решение:

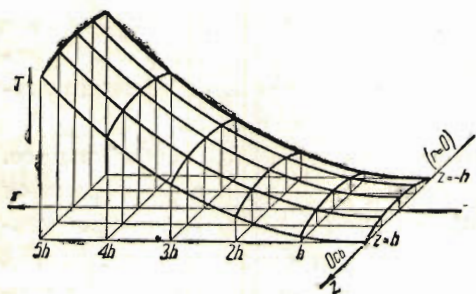
$$\bar{T} = 50\rho^2 - \rho^4 + 8(25 - 2\rho^2)F_1 - 64F_2.$$

<sup>1</sup> См. статью автора „К влиянию резких закруглений на стационарные распределения температуры в тонкостенных твердых телах“ в этом выпуске.

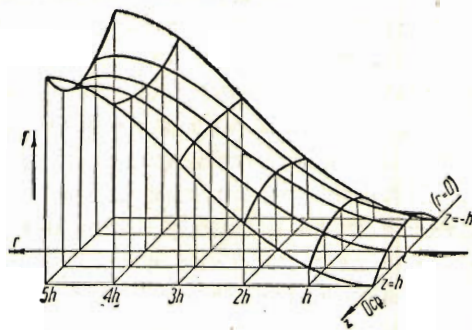
Решение определяется так же просто и в том случае, если в каждом из двух последних примеров

$$\bar{T}_{-h} = 0, \quad \bar{T}^0 = \bar{P}^0.$$

Упомянутое нами добавочное решение, необходимое для удовлетворения пограничных условий на поверхности  $r=r_1$ , принимает весьма простой вид в случае осевой симметрии, как будет показано в части II работы.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

**9. Общие замечания о природе решения.** Как уже указано выше, решение нашей задачи получается в конечном виде, если функции  $T^0$ ,  $P^0$  или  $\mathfrak{Z}^0$ ,  $\pi^0$  могут быть представлены при помощи конечных степенных рядов одной или двух переменных. В случае концентрических распределений температуры решение, будучи функцией величин  $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$  и притом независимой от  $\theta$ , должно быть многочленом четных степеней радиуса  $r$ . Пластинки с центральными круговыми отверстиями допускают решения более общего вида, которых мы здесь, однако, рассматривать не будем.

Решение (10), равно как и решение, соответствующее случаю не равной нулю постоянной  $c$ , интерпретируется физически весьма просто. Результат всегда представляет собой сумму температур, линейных вдоль толщины стенки, и некоторых поправок, обуславливаемых неравномерностью температурного градиента вдоль пограничных поверхностей. В том случае, когда даны пограничные распределения температуры самой пластинки, эти поправки в пограничных точках  $r = \pm 1$  принимают значение нуль. Величины  $F_j$ ,  $G_j$  и  $\Phi_j$ ,  $\Gamma_j$ , служащие для выражения поправок, суть функции одной лишь координаты, именно той, которая соответствует толщине пластинки. Они представляют собой количественный закон влияния, оказываемого неравномерностью температурного градиента пограничных плоскостей на поперечное распределение температуры. Их можно было бы назвать функциями неравномерности поперечного распределения температуры.

Математически данное выше решение можно рассматривать как обобщение плоской задачи стационарного распределения температуры в твердых телах. В этом последнем случае температура тела вполне и непосредственно определяется распределением температуры на пограничных плоскостях.

В изложенном же выше решении результат получается из распределений температуры в пограничных плоскостях при помощи элементарного процесса. Плоское решение содержится в названном процессе как специальный случай, характеризующийся отсутствием функций  $F_j, G_{j-1}$  или  $\Phi_j, \Gamma_{j-1}$ , начиная с  $j=1$ . Аналогия, далее, поддерживается тем обстоятельством, что в практических применениях решение часто можно будет получить при помощи конечного процесса, как уже указано выше.

В одном отношении, правда, наше решение носит более специальный характер, нежели решение плоской задачи, а именно, в нашем решении распределение температуры должно быть непрерывным и на пограничных поверхностях, включая линии и точки пересечения; однако в практических применениях названное ограничение часто окажется несущественным.

Некоторого внимания заслуживает, наконец, и следующий особый вопрос. Выражая пограничные условия с помощью многочленов, мы ограничиваемся рассмотрением конечных частей пластинки. При этом возникает вопрос об удовлетворении пограничных условий боковых (краевых) поверхностей (см. разд. 8). Если продольные размеры пластинки достаточно велики по сравнению с толщиной пластинки и если ограничиться рассмотрением таких частей ее, которые расположены в достаточном расстоянии от краев, то влиянием последних на распределение температуры можно пренебречь, как показывают известные решения в теории теплопроводности твердых тел. Более подробным образом мы на этом вопросе остановимся в части II работы.

В итоге мы констатируем, что приведенный выше процесс решения состоит:

1) в приближенном представлении данных функций  $T^0, P^0$  или  $\vartheta^0, \pi^0$  при помощи конечных степенных рядов,<sup>1</sup> для чего требуется конечное число частных или обыкновенных дифференцирований (предполагающихся возможными) указанных функций,

2) в применении операторов  $D, D^2, D^3, \dots$  к названным только что многочленам.

Таким образом процесс решения существенным образом требует лишь конечного числа дифференцирований, вследствие чего его применение в практических задачах может оказаться весьма полезным.

**10. Замечания о решении в форме бесконечного ряда.** При проверке решения в разд. 3 мы предположили, что пограничные функции выражены с помощью конечных степенных рядов. Вопрос, однако, может быть рассмотрен и в более общем виде. Мы ограничимся случаем распределений температуры, данных на пограничных плоскостях самой пластинки; общий случай, характеризуемый постоянной  $c \neq 0$ , может быть исследован подобным же образом.

<sup>1</sup> В практических задачах пограничные условия часто даются с помощью конечных многочленов.

Абсолютная величина остатка ряда (10) после удаления первых  $n$  пар членов есть:

$$\begin{aligned}
 |\bar{T}_n| &= F_n |\bar{D}^n \bar{T}^0| + F_{n+1} |\bar{D}^{n+1} \bar{T}^0| + \dots + G_n |\bar{D}^n \bar{P}^0| + G_{n+1} |\bar{D}^{n+1} \bar{P}^0| + \dots \leq \\
 &\leq \frac{a_n}{h^{2n}} |\bar{D}^n \bar{T}^0| + \frac{a_{n+1}}{h^{2n+2}} |\bar{D}^{n+1} \bar{T}^0| + \dots + \frac{b_n}{h^{2n}} |\bar{D}^n \bar{P}^0| + \frac{b_{n+1}}{h^{2n+2}} |\bar{D}^{n+1} \bar{P}^0| + \dots,
 \end{aligned} \tag{32}$$

причем предполагается, что функции  $\bar{T}^0$  и  $\bar{P}^0$  и встречающиеся в (32) производные их конечны и непрерывны по всей плоскости

$$-\infty < \xi < \infty, \quad -\infty < \eta < \infty. \tag{33}$$

Пользуясь данными выше определениями пределов  $q$  и  $q'$ , мы теперь вводим две постоянных  $Q$  и  $Q'$  при помощи соотношений

$$0 < Q < \frac{1}{q}, \quad 0 < Q' < \frac{1}{q'}$$

$$|\bar{D}^{n+j} \bar{T}^0 : \bar{D}^{n+j-1} \bar{T}^0| < Q, \quad |\bar{D}^{n+j} \bar{P}^0 : \bar{D}^{n+j-1} \bar{P}^0| < Q', \quad (j=1, 2, 3, \dots), \tag{34}$$

остающихся в силе во всем интервале (33). При соблюдении этих условий последняя сумма в (32) представляет собой остаток двух геометрических рядов с положительными отношениями, меньшими единицы. Отсюда можно заключить, что при соблюдении указанных условий ряд (10) сходится равномерно в каждой ограниченной частной области интервала (33) с включением пограничных плоскостей  $\zeta = \pm 1$ ; другими словами говоря, он представляет собой в каждой такой области непрерывную функцию.

Рассмотрим выражения, получающиеся из (10) путем формального применения операторов  $\bar{D}^j$  и  $\partial^{2j} : \partial \zeta^{2j}$ . Эти выражения на основании формул (34) опять-таки оказываются функциями равномерно сходящимися и непрерывными в названных частных областях. При этих условиях почленное дифференцирование допустимо и дифференциальное уравнение (2) бесконечным рядом (10) удовлетворяется. Заметим, что ряд (10) удовлетворяет и более общему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^{2j} \bar{T}}{\partial \zeta^{2j}} = (-1)^j \bar{D}^j \bar{T} \quad (j=1, 2, 3, \dots).$$

Если условия (34) соблюдены для некоторого определенного  $n$ , то при рассмотрении конечной части пластинки можно ограничиться конечным числом членов разложения (10). Отсюда следует возможность представления решения с помощью использованных выше многочленов.

## ON THE PROBLEMS OF THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE PLANE PLATES

I. F. MALKIN

(New York)

(Summary)

The article is the first part of a contribution to the problem of the conduction of heat in solids, especially in thin-walled solids. The present deals with the steady temperature distribution in plane plates. Such a temperature distribution can be represented by an expression of the form

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} D^n T_0 + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} D^n P_0 \right],$$

wherein  $T$  designates the temperature,  $z$  being the distance of a point considered from the middle plane of the plate, while  $T_0$  and  $P_0$  are certain functions of the coordinates in the middle plane, and  $D$  is the plane Laplacian differential operator. In choosing the functions  $T_0$  and  $P_0$  so as to satisfy the boundary conditions of the plane surfaces of the plate we finally arrive at a solution of the form

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n D^n T^{\circ} + G_n D^n P^{\circ}], \quad (\text{A})$$

wherein the functions  $T^{\circ}$  and  $P^{\circ}$  are determined from the boundary conditions, while the quantities  $F_n$  and  $G_n$  are certain functions of  $z$ , which can be calculated easily once for all.

A graphical representation of these functions for the case of prescribed boundary surface temperatures is given in fig. 1 of the article.

The practical procedure in calculating the temperature distribution from the formula (A) is comparatively very simple and might offer advantages as compared with other methods of computing temperature distributions in plates.

The question of convergence of the infinite series is discussed in the concluding section of the article.