

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

ЗАДАЧА О БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ БАЛКЕ НА УПРУГОЙ  
ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. Г. АЛЬПЕРИН

(Харьков)

В поисках более точных методов расчета балок на упругом основании проф. Герсевановым<sup>1</sup> было предложено рассматривать массу грунта как упругое полупространство, считая при этом, что это предположение является идеальным по сравнению с гипотезой Циммермана-Винклера. Из всех появившихся в этом направлении работ следует выделить два решения задачи о бесконечно длинной балке — проф. Герсеванова и Мачерета<sup>2</sup> и инженера Павлова.<sup>3</sup> Однако и эти последние страдают известными недостатками. Первое решение проф. Герсеванова и Мачерет при достаточно громоздких средствах дано лишь в пределах элементарной теории, т. е. при гипотезе Эйлера-Бернулли. Второе хотя и свободно от дополнительных гипотез, однако приводит к трудно решаемому в каждом отдельном случае интегральному уравнению и не может поэтому считаться достаточно эффективным.<sup>4</sup>

В настоящей работе, не вдаваясь в анализ провозмерности указанной гипотезы в применении к балкам, покоящимся на грунте, мы предлагаем точное решение задачи о бесконечно длинной балке конечной высоты, лежащей

<sup>1</sup> Сборник № 8 Трудов н.-иссл. сектора б. ВИОС: „Расчет балки на упругом основании без гипотезы Циммермана-Винклера“, изд. ОНТИ, 1937.

<sup>2</sup> Там же.

<sup>3</sup> Там же.

<sup>4</sup> В последнее время я узнал о существовании монографии проф. Б. Н. Жемочкина „Плоская задача расчета бесконечно длинной балки на упругом основании“, изд. Воен.-инж. акад. РККА им. В. В. Куйбышева, 1937, в первой части которой автор ищет решение рассматриваемой нами задачи при помощи тригонометрических рядов. Однако решения в конечном виде проф. Жемочкиным не получено. Кроме того, для полученного им приближенного решения (только для случая периодически распределенной нагрузки) оценка погрешности произведена лишь на одном численном примере.

В виду этого мы не можем считать указанную работу исчерпывающим решением поставленной задачи.



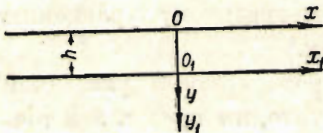
на упругой полуплоскости без трения, выраженное в виде быстро сходящихся контурных интегралов. Мы затем выделим из него приближенное решение и докажем полную идентичность его с решением проф. Герсеванова и Мачерета. Полученный вид последнего позволит нам установить его эквивалент в обыкновенном дифференциальном уравнении шестого порядка.

Вместе с тем мы будем параллельно отмечать связь задачи с классической задачей о балке на упругом основании при гипотезе Циммермана-Винклера, точного решения которой мы не встречали. Мы укажем также на практическую возможность обобщения задачи на случай пакета из  $n$  полос, покоящегося на упругой полуплоскости.

Рассматривая погрешность приближенного решения, мы установим связь задачи с обычными задачами плоского изгиба и покажем, что настоящая задача является обобщением задач плоского изгиба, которые содержатся в ней в качестве предельных случаев. Наконец, мы оценим в определенном смысле верхнюю границу абсолютной величины ошибки приближенного решения и установим предел его пригодности. При этом мы будем решать, как обычно, обобщенную плоскую задачу. Напомним, что в случае плоской деформации нужно будет лишь заменить в окончательных результатах упругие постоянные соответственно  $E$  на  $\frac{E}{1-\nu^2}$  и  $\nu$  на  $\frac{1}{1-\nu}$ .

### 1. Случай бесконечно длинной балки с гармонической нагрузкой на ее верхней грани

Пусть плоская полоса ширины 1, высоты  $h$  и с упругими постоянными  $E$  и  $\nu$ , покоящаяся своей нижней гранью без трения на бесконечной полуплоскости такой же ширины с упругими постоянными  $E_1$  и  $\nu_1$ , нагружена на верхней грани нормальной к ней гармонической нагрузкой:



Фиг. 1.

$$\sigma_y = a_m \cos mx, \quad \tau_{xy} = 0,$$

где  $a_m$  и  $m$  произвольные отличные от нуля действительные числа,  $m > 0$ .

Введем для удобства две системы координат  $XOY$  и  $X_1O_1Y_1$ , как показано на фиг. 1, так что

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - h.$$

Обозначим функцию напряжения задачи в области полосы через  $\varphi_m(x, y)$  и соответственно в области полуплоскости через  $\psi_m(x_1, y_1)$ . Тогда эти функции должны удовлетворять следующим условиям:

1) бигармоническим уравнениям:

$$\Delta \Delta \varphi_m = 0; \quad \Delta \Delta \psi_m = 0; \quad (1)$$



2) граничным условиям:

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} = a_m \cos mx, \quad \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} = 0; \quad (2)$$

$$y = h \quad (y_1 = 0), \quad \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1 \partial y_1} = 0; \quad (3)$$

$$y_1 \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1 \partial y_1} \rightarrow 0; \quad (4)$$

3) условиям сопряжения на грани  $y = h$  ( $y_1 = 0$ ):

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \right)_{y=h} \equiv \left( \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1^2} \right)_{y_1=0}; \quad (5)$$

$$(v)_{y=h} \equiv (v_1)_{y_1=0}, \quad (6)$$

где  $v$  и  $v_1$  — соответствующие вертикальные смещения.

Будем искать решение уравнения  $\Delta \Delta \varphi_m = 0$  в виде произведения:

$$\varphi_m(x, y) = F_0(y) \cos mx. \quad (7)$$

Тогда  $F_0(y)$  должна удовлетворять уравнению:

$$F_0^{IV} - 2m^2 F_0'' + m^4 F_0 = 0, \quad (1a)$$

общий интеграл которого равен:

$$F_0(y) = A_1 \operatorname{ch} my + A_2 \operatorname{sh} my + A_3 my \operatorname{ch} my + A_4 my \operatorname{sh} my. \quad (8)$$

Из условий (2) следует:

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -F_0(0) m^2 \cos mx = -A_1 m^2 \cos mx = a_m \cos mx,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{a_m}{m^2}, \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = -F_0'(0) m \sin mx = -m^2 (A_2 + A_3) \sin mx \equiv 0,$$

откуда

$$A_2 + A_3 = 0. \quad (10)$$

Первое из условий (3) дает:

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} \right)_{y=h} = -m F_0'(h) \sin mx \equiv 0,$$

откуда

$$F_0'(h) = 0. \quad (11)$$

Но так как

$$F_0'(y) = m [(A_1 + A_4) \operatorname{sh} my + (A_2 + A_3) \operatorname{ch} my + my (A_3 \operatorname{sh} my + A_4 \operatorname{ch} my)],$$

то, следовательно, из (11), (10) и (9) получаем:

$$A_3 m h \operatorname{sh} mh + A_4 (\operatorname{sh} mh + mh \operatorname{ch} mh) = \frac{a_m}{m^2} \operatorname{sh} mh. \quad (11a)$$

Переходим к определению функции  $\psi_m(x_1, y_1)$ , которая должна иметь вид аналогичный (8). Для этого рассмотрим функцию:

$$Z(x_1, y_1) = F_0(h)(1 + my_1)e^{-my_1} \cos mx_1 \equiv F_1(y_1) \cos mx_1. \quad (12)$$

Очевидно, что функция  $F_1(y_1)$  удовлетворяет уравнению (1а).

При  $y_1 = 0$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = -m^2 F_0(h) \cos mx_1 \equiv \left( \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \right)_{y=h}; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial y_1} = F_1'(0) = 0, \quad (12')$$

т. е.  $Z(x_1, y_1)$  удовлетворяет второму из условий (3) и первому из условий (6). При  $y_1 \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial y_1} \rightarrow 0,$$

как  $e^{-my}$ , т. е. удовлетворяются также и условия (4).

Функция  $Z(x_1, y_1)$  удовлетворяет, таким образом, уравнению (1), граничным условиям и одному из условий сопряжения. Поэтому можно положить:

$$\psi_m(x_1, y_1) \equiv Z(x_1, y_1) = F_1(y_1) \cos mx_1 = F_0(h)(1 + my_1)e^{-my_1} \cos mx_1, \quad (12a)$$

причем постоянные  $A_3$  и  $A_4$  определяются из равенства (11а) и последнего из условий сопряжения (6).

Переходим к определению перемещений. Заметим, что если функция напряжения  $\chi(x, y)$  имеет вид:

$$\chi(x, y) = \theta(y) \cos mx,$$

то деформации  $u$  и  $v$  связаны с ней следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = (\theta'' + \nu m^2 \theta) \cos mx, \\ E \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -(\nu \theta'' + m^2 \theta) \cos mx, \\ E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 2(1 + \nu) \theta' m \sin mx. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как в этом случае функция  $\theta(y)$  удовлетворяет уравнению вида (1а):

$$\theta^{IV} - 2m^2 \theta'' + m^4 \theta \equiv 0; \quad m^2 \theta \equiv -\frac{\theta^{IV}}{m^2} + 2\theta'',$$

то

$$\begin{aligned} Ev &= - \int (\nu \theta'' + m^2 \theta) \cos mx dy = - \int \left( \nu \theta'' - \frac{\theta^{IV}}{m^2} + 2\theta'' \right) \cos mx dy = \\ &= \left[ \frac{\theta'''}{m^2} - (2 + \nu) \theta' \right] \cos mx + f(x), \end{aligned} \quad (14)$$



где  $f(x)$  — произвольная функция. Дифференцируя первое из уравнений (13) один раз по  $y$ , третье — один раз по  $x$  и уравнение (14) — два раза по  $x$ , мы получим:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (\theta''' + \nu m^2 \theta') \cos mx,$$

$$E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -[\theta''' - m^2(2 + \nu)\theta'] \cos mx + f''(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} = E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 2(1 + \nu)\theta' m^2 \cos mx,$$

и, подставляя первые два выражения в последнее равенство, находим:

$$f''(x) = 0;$$

откуда

$$f(x) = Cx + D.$$

Следовательно,

$$\nu = \frac{1}{E} [\theta''' - (2 + \nu)m^2\theta'] \frac{\cos mx}{m^2} + C_1 x + D_1. \tag{15}$$

Применяя выражение (15) к определению смещений  $v$  и  $v_1$  нашей задачи, находим:

$$(v)_{y=h} = \frac{1}{E} [F_0'''(h) - (2 + \nu)m^2 F_0'(h)] \frac{\cos mx}{m^2} + C_1 x + D_1,$$

$$(v_1)_{y=0} = \frac{1}{E_1} [F_1'''(0) - (2 + \nu)m^2 F_1'(0)] \frac{\cos mx_1}{m^2} + C_2 x_1 + D_2. \tag{16}$$

Последнее из условий (6) дает:

$$\frac{1}{E} [F_0'''(h) - (2 + \nu)m^2 F_0'(h)] = \frac{1}{E_1} [F_1'''(0) - (2 + \nu)m^2 F_1'(0)],$$

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2.$$

Теперь очевидно, что линейные члены в выражениях для смещений представляют собой жесткое смещение всей системы в плоскости  $XOY$ , которое можно не учитывать.

Согласно (11) и (12') имеем:

$$F_0'(h) = F_1'(0) = 0.$$

Далее:

$$F_0'''(h) = m^3 \left\{ \frac{F_0'(h)}{m} + 2(A_3 \operatorname{ch} mh + A_4 \operatorname{sh} mh) \right\} = 2m^3 (A_3 \operatorname{ch} mh + A_4 \operatorname{sh} mh),$$

$$F_1'''(0) = m^3 [(2 - my_1) e^{-my_1}]_{y_1=0} F_0'(h) = 2m^3 F_0'(h).$$

Следовательно, первое из соотношений (16), если учесть (9) и (10) и ввести обозначение  $\frac{E_1}{E} = \epsilon$ , дает:

$$A_3 [(\epsilon - mh) \operatorname{ch} mh - \operatorname{sh} mh] + A_4 (\epsilon - mh) \operatorname{sh} mh = -\frac{\alpha_m}{m^2} \operatorname{ch} mh.$$

Присоединяя к нему равенство (11а):

$$A_3 m h \operatorname{sh} m h + A_4 (\operatorname{sh} m h + m h \operatorname{ch} m h) = \frac{a_m}{m^2} \operatorname{sh} m h,$$

мы получаем два уравнения для определения  $A_3$  и  $A_4$ .

Детерминант системы:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m h) \operatorname{ch} m h - \operatorname{sh} m h & (\varepsilon - m h) \operatorname{sh} m h \\ m h \operatorname{sh} m h & \operatorname{sh} m h + m h \operatorname{ch} m h \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \{ (\operatorname{ch} 2 m h - 1 - 2 m^2 h^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2 m h + 2 m h) \} > 0. \quad (17)$$

Следовательно, система имеет решения для всех  $m > 0$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A(mh) &= \varepsilon (e^{2mh} - 1) - (1 - 2mh - e^{2mh}), \\ B(mh) &= \varepsilon (e^{-2mh} - 1) + (1 + 2mh - e^{-2mh}), \\ C(mh) &= 2mh(mh - \varepsilon); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 2\Delta(mh) &= A(mh) - B(mh) - 2C(mh) = \\ &= 2 \{ (\operatorname{ch} 2mh - 1 - 2m^2 h^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2mh + 2mh) \}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$2F(my) = A(mh)(1 + my)e^{-my} - B(mh)(1 - my)e^{my} - 2C(mh) \operatorname{ch} my. \quad (20)$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} F_0(y) &= -\frac{a_m F(my)}{m^2 \Delta(mh)} = \\ &= -\frac{a_m}{m^2} \frac{A(mh)(1 + my)e^{-my} - B(mh)(1 - my)e^{my} - 2C(mh) \operatorname{ch} my}{A(mh) - B(mh) - 2C(mh)}, \end{aligned} \quad (21)$$

и мы будем иметь:

$$\varphi_m(x, y) = -\frac{a_m}{m^2} \frac{F(my)}{\Delta(mh)} \cos mx. \quad (22)$$

Функция  $\varphi_m$  определяется с точностью до линейного члена, не влияющего на окончательный результат, и поэтому для удобства дальнейшего изложения полагаем:

$$\varphi_m(x, y) = -a_m \left[ \frac{F(my) \cos mx}{\Delta(mh) m^2} + D \right], \quad (22a)$$

где  $D$  — некоторая постоянная.

Функция  $\psi_m$  согласно выражению (12а) имеет вид:

$$\psi_m(x_1, y_1) = F_0(h)(1 + my_1)e^{-my_1} \cos mx_1 = -\frac{a_m}{m^2} \frac{F(mh)}{\Delta(mh)} (1 + my_1)e^{-my_1} \cos mx_1.$$

Легко проверить, что

$$\frac{F(mh)}{\Delta(mh)} = -\frac{2\varepsilon (mh \operatorname{ch} mh + \operatorname{sh} mh)}{(\operatorname{ch} 2mh - 1 - 2m^2 h^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2mh + 2mh)}. \quad (23)$$



Таким образом по аналогии с функцией  $\varphi_m$  получаем окончательное выражение для  $\psi_m$  в виде:

$$\psi_m(x_1, y_1) = 2a_m \left[ \frac{\varepsilon (mh \operatorname{ch} mh + \operatorname{sh} mh) (1 + my_1) e^{-my_1}}{(\operatorname{ch} 2mh - 1 - 2m^2 h^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2mh + 2mh)} \cdot \frac{\cos mx_1}{m^2} + D_1 \right]. \quad (24)$$

### II. Случай сосредоточенной силы на грани $y=0$

К этому случаю можно прийти, рассматривая его как предельный от приведенного на фиг. 2. Итак, пусть

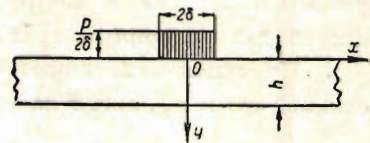
$$p(x) = \begin{cases} -\frac{P}{2\delta} & \text{при } |x| \leq \delta, \\ 0 & \text{при } |x| > \delta. \end{cases}$$

Функцию  $p(x)$ , как известно, можно представить в виде интеграла Дирихле:

$$p(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin m\delta \cos mx}{m\delta} dm.$$

Элементу интегрирования

$$a_m = -\frac{P}{\pi} \frac{\sin m\delta}{m\delta} dm$$



Фиг. 2.

будет соответствовать согласно (22а) функция напряжения:

$$\varphi_m(x, y/\delta) = \frac{P}{\pi} \frac{\sin m\delta}{m\delta} \left[ \frac{F(my)}{\Delta(mh)} \frac{\cos mx}{m^2} + D \right] dm.$$

Легко проверить, что первый член в квадратных скобках имеет единственный полюс в точке  $m=0$  вида  $1/m^2$ . Положим  $D = -1/m^2$ . Тогда функция

$$\varphi_m(x, y/\delta) = \frac{P}{\pi} \frac{\sin m\delta}{m\delta} \left[ \frac{F(my)}{\Delta(mh)} \cos mx - 1 \right] \frac{dm}{m^2}$$

не будет иметь особенностей на вещественной оси.

Так как задача линейная, то следует полагать, что решением рассматриваемой задачи будет функция напряжения:

$$\varphi(x, y/\delta) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin m\delta}{m\delta} \left[ \frac{F(my)}{\Delta(mh)} \cos mx - 1 \right] \frac{dm}{m^2}. \quad (25)$$

Заметим, что подынтегральная функция не имеет на пути интегрирования особенностей и стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ , как  $1/m^2$ . Следовательно, интеграл (25) сходится равномерно относительно  $\delta$ . Поэтому мы вправе перейти к пределу  $\delta=0$  под знаком интеграла и получим:

$$\varphi(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(x, y/\delta) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(my)}{\Delta(mh)} \cos mx - 1 \right] \frac{dm}{m^2}. \quad (26)$$



Положим еще

$$mh = \mu, \quad y/h = \eta; \quad x/h = \xi,$$

тогда

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(\mu\eta)}{\Delta(\mu)} \cos \mu\xi - 1 \right] \frac{d\mu}{\mu^2}. \quad (26a)$$

Построенная таким образом функция  $\varphi(\xi, \eta)$  решает поставленную в заголовке настоящего раздела задачу. Действительно, как мы уже отмечали, сама подынтегральная функция стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ , как  $1/m^2$ . Однако нетрудно проверить, что ее производная по любому из параметров  $\xi, \eta$  асимптотически эквивалентна функции  $\frac{e^{-\mu\eta}}{\mu}$ . Следовательно, для всех

$$\xi (-\infty < \xi < +\infty) \quad \text{и} \quad \eta (0 < \gamma \leq \eta \leq 1),$$

где  $\gamma$  — произвольно мало, как сам интеграл, так и любая его производная по параметрам  $\xi$  и  $\eta$  сходятся равномерно относительно последних. Таким образом дифференциальные уравнения (1) удовлетворяются. Условия на грани  $y = h$  как линейные дифференциальные также удовлетворяются. Что остающиеся два условия на грани  $y = 0$  также выполняются, будет показано ниже.

Поступая аналогично с функцией  $\psi_m(x_1, y_1)$ , обладающей теми же свойствами, что и  $\varphi_m$ , легко найдем:

$$\psi(\xi_1, \eta_1) = \frac{2Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)(1 + \mu\eta_1)e^{-\mu\eta_1}}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} \cos \mu\xi_1 - \frac{1}{2} \right] \frac{d\mu}{\mu^2}, \quad (27)$$

где положено

$$\eta_1 = y_1/h, \quad \xi_1 = x_1/h.$$

Как известно, решения задач об изгибе балок конечной высоты тесно связаны с известным решением Flamant задачи о бесконечной полуплоскости и содержит это последнее в себе. Займемся выделением этого решения из (26a).

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \frac{Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(\mu\eta)}{\Delta(\mu\eta)} \cos \mu\xi - 1 \right] \frac{d\mu}{\mu^2} = \\ &= \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(\mu\eta)}{\Delta(\mu)} - 1 \right] \frac{\cos \mu\xi}{\mu^2} d\mu + \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu\xi - 1}{\mu^2} d\mu \right\} = \\ &= \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{A(\mu)[(1 + \mu\eta)e^{-\mu\eta} - 1] - B(\mu)[(1 - \mu\eta)e^{\mu\eta} - 1] - 2C(\mu)[\operatorname{ch} \mu\eta - 1] \cos \mu\xi}{A(\mu) - B(\mu) - 2C(\mu)} \frac{d\mu}{\mu^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu\xi - 1}{\mu^2} d\mu \right\} = \\ &= \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{B(\mu)[(1 + \mu\eta)e^{-\mu\eta} - (1 - \mu\eta)e^{\mu\eta}] + 2C(\mu)[(1 + \mu\eta)e^{-\mu\eta} - \operatorname{ch} \mu\eta] \cos \mu\xi}{A(\mu) - B(\mu) - 2C(\mu)} \frac{d\mu}{\mu^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{(1 + \mu\eta)e^{-\mu\eta} - 1}{\mu^2} \cos \mu\xi d\mu + \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu\xi - 1}{\mu^2} d\mu \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$



Последние два интеграла в правой части (28) вычисляются в конечном виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu \xi - 1}{\mu^2} d\mu &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu \xi - 1}{\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu \xi - 1}{\mu^2} d\mu = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu \xi} - 1}{\mu^2} d\mu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu \xi} - 1}{\mu^2} d\mu \right\} = -\frac{\pi |\xi|}{2}, \\ \int_0^{\infty} [(1 + \mu \eta) e^{-\mu \eta} - 1] \frac{\cos \mu \xi}{\mu^2} d\mu &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L [(1 + \mu \eta) e^{-\mu \eta} - 1] \frac{\cos \mu \xi}{\mu^2} d\mu = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \left( \int_0^{\eta} -\theta e^{-\mu \theta} d\theta \right) \cos \mu \xi d\mu = -\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \theta d\theta \int_0^L \operatorname{Re} e^{-\mu(\theta + i\xi)} d\mu, \\ \int_0^L \operatorname{Re} e^{-\mu(\theta + i\xi)} d\mu &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\mu(\theta + i\xi)} d\mu = \frac{\theta}{\theta^2 + \xi^2} - \frac{e^{-\theta}}{\theta^2 + \xi^2} (\theta \cos L\xi + \xi \sin L\xi); \end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [(1 + \mu \eta) e^{-\mu \eta} - 1] \frac{\cos \mu \xi}{\mu^2} d\mu &= -\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\eta} \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^2 + \xi^2} + \int_0^{\eta} \frac{e^{-\theta} (\theta \cos L\xi + \xi \sin L\xi)}{\theta^2 + \xi^2} d\theta \right\} = \\ &= -\int_0^{\eta} \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^2 + \xi^2} = -\eta + \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}, \end{aligned}$$

так как в последнем выражении можно перейти к пределу под знаком интеграла. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [(1 + \mu \eta) e^{-\mu \eta} - 1] \frac{\cos \mu \xi}{\mu^2} d\mu + \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu \xi - 1}{\mu^2} d\mu &= \\ &= -\eta + \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} - \frac{\pi}{2} |\xi| = -\eta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta}. \end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя значения  $B(\mu)$  и  $C(\mu)$  из (18) в первый интеграл правой части (28) и произведя соответствующие преобразования, получаем окончательно (опуская несущественный линейный член):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \\ &= \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{[(1 + 2\mu + 2\mu^2 - e^{-2\mu}) + \epsilon(e^{-2\mu} - 1 - 2\mu)](\mu \eta \operatorname{ch} \mu \eta - \operatorname{sh} \mu \eta) + 2\mu^2 \eta (\epsilon - \mu) \operatorname{sh} \mu \eta}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \epsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} \cdot \frac{\cos \mu \xi}{\mu^2} d\mu - \right. \\ &\quad \left. - \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta} \right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Заметим, что подынтегральное выражение вместе с производными по  $\xi \xi$  и  $\eta \eta$  при  $\eta = 0$  обращаются в нуль; следовательно, интеграл не дает никаких



поверхностных напряжений. Во втором члене правой части (30) легко узнать функцию Flamant, удовлетворяющую условиям задачи на грани  $y = \eta = 0$ . Таким образом одновременно с выделением этой функции доказано выполнение условий на грани  $y = 0$ .

Может представить известный интерес следующее замечание, которое за отсутствием места приводим без доказательства.

Решение задачи о балке, лежащей на упругом основании, в классической ее постановке (т. е. при гипотезе Циммермана-Винклера о линейной зависимости между смещениями балки и сопротивлением основания) аналогично полученному. Именно, достаточно лишь в интеграле (30) заменить  $\epsilon$  на  $\frac{2}{k\mu}$ , где  $k = \frac{E}{Kh}$  ( $K$  — так называемый коэффициент оседания).

Решение, соответствующее (30), имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = & \\ = \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{[(1+2\mu+2\mu^2-e^{-2\mu})\mu k + 2(e^{-2\mu}-1-2\mu)](\mu\eta \operatorname{ch} \mu\eta - \operatorname{sh} \mu\eta) + 2\mu^2\eta(2-\mu^2k)\operatorname{sh} \mu\eta \cdot \cos \mu\xi}{\mu k (\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + 2(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} \cdot \frac{\cos \mu\xi}{\mu^2} d\mu - \right. & \\ \left. - \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta} \right\}. & \quad (30a) \end{aligned}$$

Выражение (30) подтверждает уже известный из решения проф. Герсеванова-Мачерета факт, что решение зависит не от величины отдельных упругих постоянных  $E_1$  и  $E$ , а от их отношения  $\epsilon$ .

Из выражения (30a) следует, что классическое решение не зависит прямо ни от коэффициента оседания  $K$ , ни даже от так называемого числа Шведлера  $L = \sqrt{\frac{Eh^3}{3K}}$ , а зависит от отношения  $k = \frac{E}{Kh} = 3\left(\frac{L}{h}\right)^4$ , что является вполне логичным.

### III. Обобщение предыдущих результатов

Пусть теперь будет дан пакет из  $n$  полос, каждая шириной 1, высотой  $h_k$  и упругими постоянными  $E_k$  и  $\nu_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), покоящихся без трения одна на другой. Пусть далее на верхнюю грань первой из них действует гармоническая сила

$$\sigma_y = a_m \cos mx, \quad \tau_{xy} = 0,$$

а последняя покоится на полуплоскости с упругими постоянными  $E_n$  и  $\nu_n$ .

Введем  $n$  параллельных систем координат, как показано на фиг. 3.

Функцию напряжения в области  $k$ -й полосы ищем в виде:

$$\varphi_k(m, x, y) = F_k(y_k) \cos mx_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1)$$

Тогда функция  $F_k(y_k)$ , удовлетворяющая уравнению

$$F^{IV} - 2m^2 F'' + m^4 F = 0,$$



имеет вид:

$$F_k(y_k) = A_k \operatorname{ch} my_k + B_k \operatorname{sh} my_k + C_k my_k \operatorname{ch} my_k + D_k my_k \operatorname{sh} my_k. \quad (2)$$

При этом должны быть удовлетворены следующие условия:

1) граничные:

$$y_k = 0, \quad y_k = h_k, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k \partial y_k} = 0; \quad (3)$$

2) условия сопряжения:

$$y_k = 0 \quad (y_{k-1} = h_{k-1}), \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} \right)_{y_k=0} \equiv \left( \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x_{k-1}^2} \right)_{y_{k-1}=h_{k-1}}, \quad (v_k)_{y_k=0} \equiv (v_{k-1})_{y_{k-1}=h_{k-1}}; \quad (4)$$

$$y_k = h_k \quad (y_{k+1} = 0), \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} \right)_{y_k=h_k} \equiv \left( \frac{\partial^2 \varphi_{k+1}}{\partial x_{k+1}^2} \right)_{y_{k+1}=0}, \quad (v_k)_{y_k=h_k} \equiv (v_{k+1})_{y_{k+1}=0}. \quad (5)$$

Из условий (3) находим:

$$C_k + B_k = 0, \quad F_k'(h_k) = 0. \quad (6)$$

Из первого условия (4) имеем:

$$A_k = F_{k-1}'(h_{k-1}). \quad (7)$$

Из второго (см. (16, I)), учитывая (6), получим:

$$C_k = \epsilon_{k-1} (C_{k-1} \operatorname{ch} mh_{k-1} + D_{k-1} \operatorname{sh} mh_{k-1}), \quad (8)$$

где  $\epsilon_{k-1} = E_k/E_{k-1}$ .

Из четырех уравнений (6), (7), (8) коэффициенты  $A_k, B_k, C_k, D_k$  легко выражаются через  $A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1}, D_{k-1}$  в явном виде.

Следовательно, после  $n-1$  последовательных подстановок мы выразим коэффициенты всех  $n-1$  функций  $\varphi_k$  ( $k > 0$ ) через  $A_0, B_0, C_0$  и  $D_0$  в явном виде. Для определения же последних остаются следующие четыре условия:

1) при  $y=0$ :

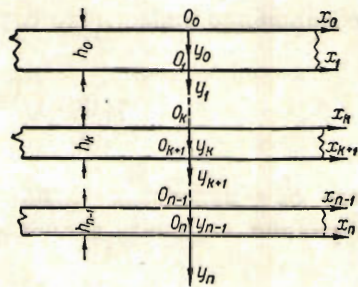
$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_0^2} \equiv a_m \cos mx_0, \quad \text{откуда} \quad A_0 = -\frac{a_m}{m^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_0 \partial y_0} \equiv 0, \quad \text{откуда} \quad B_0 + C_0 = 0;$$

2) при  $y_{n-1} = h_{n-1}$  ( $y_n = 0$ ):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1} \partial y_{n-1}} \equiv 0,$$

$$(v_{n-1})_{y_{n-1}=h_{n-1}} \equiv (v_n)_{y_n=0};$$



Фиг. 3.

где  $(v_n)_{y_n=0}$  есть смещение грани полуплоскости, связанное с функцией напряжения в ее области  $\varphi_n$ , которое, по аналогии с (12а, I), может быть выражено в виде:

$$\varphi_n = F_{n-1}(h_{n-1})(1 + my_n) e^{-my_n} \cos mx_n, \quad (10)$$



и мы имеем лишь систему двух неоднородных уравнений с двумя неизвестными постоянными  $C_0$  и  $D_0$  вида:

$$\begin{aligned} F'_{n-1}(h_{n-1}) &= 0, \\ \varepsilon_{n-1} F'''_{n-1}(h_{n-1}) &= 2m^3 F_{n-1}(h_{n-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

так как коэффициенты  $F_{n-1}$  выражены через них явно.

Можно было бы доказать, что детерминант системы (11) при любых  $m > 0$  отличен от нуля и, следовательно, существует всегда нетривиальное решение, но мы на этом останавливаться не будем. Мы лишь заметим, что изложенное решение не только не содержит никаких принципиальных трудностей, но, более того, практически вполне выполнимо.

В случае сосредоточенной силы на верхней грани пакета, действуя совершенно аналогично случаю одной полосы, получим решение в виде:

$$\varphi_k(x_k, y_k) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} [F_k(y_k) \cos mx_k + S_k] dm,$$

где  $S_k$  — некоторая функция  $m$ , выбираемая так, чтобы подынтегральная функция не имела единственно возможного полюса в точке  $m=0$ .

#### IV. Приближенное решение задачи о бесконечно длинной балке, лежащей на упругой полуплоскости без трения и нагруженной сосредоточенной силой

№ 1. Вывод решения. Будем теперь, исходя из полученного точного решения, искать его приближение для случая малого отношения  $h/x$ .

Рассмотрим снова функцию напряжения в виде (26а, II):

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(\mu, \eta)}{\Delta(\mu)} \cos \mu \xi - 1 \right] \frac{d\mu}{\mu^2} \quad \left( \eta = \frac{y}{h}, \xi = \frac{x}{h} \right). \quad (1)$$

Обозначая  $\sqrt[3]{6\varepsilon} = \alpha$  и полагая в подынтегральном выражении (1)

$$\mu = \alpha \nu, \quad \alpha \xi = \alpha x/h = \zeta,$$

имеем:

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{Ph}{\pi \alpha} \int_0^{\infty} \left[ \frac{F(\nu \alpha, \eta)}{\Delta(\nu \alpha)} \cos \nu \zeta - 1 \right] \frac{d\nu}{\nu^2}. \quad (1a)$$

Так как мы ищем решение для малого отношения  $h/x$ , то при конечном  $\zeta = \alpha x/h$  следует в (1а) положить  $\alpha$  малой того же порядка, что и  $x/h$ .



Разложим числитель и знаменатель подынтегрального выражения  $\frac{F(v\alpha, \eta)}{\Delta(v\alpha)}$  в ряды по степеням  $\alpha$  и, полагая в них  $\alpha$  малой, оставим лишь члены низшей степени. Мы получим согласно (19, I) и (20, I):

$$\begin{aligned} 2F(v\alpha, \eta) &= A(v\alpha)(1 + v\alpha\eta)e^{-v\alpha\eta} - B(v\alpha)(1 - v\alpha\eta)e^{v\alpha\eta} - 2C(v\alpha)\operatorname{ch} v\alpha\eta = \\ &= \left[ \frac{\alpha^3}{6}(e^{2v\alpha} - 1) - (1 - 2v\alpha - e^{2v\alpha}) \right] (1 + v\alpha\eta)e^{-v\alpha\eta} - \left[ \frac{\alpha^3}{6}(e^{-2v\alpha} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2v\alpha - e^{-2v\alpha}) \right] (1 - v\alpha\eta)e^{v\alpha\eta} - 4\alpha v \left( v\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) \operatorname{ch} v\alpha\eta = \\ &= \frac{4}{9} v\alpha^4 [(1 + v^3) + (2\eta - 3)\eta^2 v^3] + S\alpha^6 + \dots \end{aligned}$$

$$2\Delta(v\alpha) = 2 \left\{ (\operatorname{ch} 2v\alpha - 1 - 2v^2\alpha^2) + \frac{\alpha^3}{6} (\operatorname{sh} 2v\alpha + 2v\alpha) \right\} = \frac{4}{9} v\alpha^4 (1 + v^3) + t\alpha^6 + \dots$$

Итак, вместо (1a) мы получаем ее приближение для случая малой  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta, \eta) &= \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^\infty \left[ \frac{\eta^2(2\eta - 3)v^3 + (1 + v^3)}{1 + v^3} \cos v\zeta - 1 \right] \frac{dv}{v^2} = \\ &= \frac{Ph}{\pi\alpha} \left\{ \eta^2(2\eta - 3) \int_0^\infty \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv + \int_0^\infty \frac{\cos v\zeta - 1}{v^2} dv \right\}. \end{aligned}$$

Так как последний интеграл представляет собой линейный член, который мы можем опустить, то мы получаем окончательно приближенную функцию напряжения в виде:

$$\varphi_0(\zeta, \eta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \eta^2 (2\eta - 3) \int_0^\infty \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv. \quad (2)$$

Заметим, что, так как функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=h} \equiv 0,$$

то

1) нормальная сила в любом сечении  $x$  равна:

$$N(x) = \int_0^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_0^h = 0;$$

2) интегральный изгибающий момент равен:

$$M^*(x) = \int_0^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y dy = \left[ y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \right]_0^h = \varphi(x, 0) - \varphi(x, h).$$

Применяя последнее равенство к  $\varphi_0(\zeta, \eta)$ , получим элементарное выражение для изгибающего момента в сечении  $\zeta$  балки:

$$M(\zeta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv, \quad (2a)$$



пригодное для случаев малых  $\alpha$  и  $h/x$ , порядок которых мы выясним в дальнейшем. Заметим лишь, что функция от  $\eta = y/h$ , стоящая перед интегралом (2), определяет линейное распределение нормальных к сечению напряжений и, следовательно, полученное решение соответствует гипотезе Эйлера-Бернулли.<sup>1</sup>

п° 2. Иное представление функции  $M(\zeta)$ . Разлагая дробь подынтегрального выражения (2) на простые, находим:

$$\int_0^{\infty} \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv = \\ = \frac{1}{3} \left[ - \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v+1} dv + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})} dv + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})} dv \right]$$

или, обозначая для простоты  $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \beta$ , имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv = \frac{1}{3} \left[ - \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v+1} dv + 2\operatorname{Re} \left( \beta \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v-\beta} dv \right) \right]. \quad (3)$$

Будем для определенности считать  $\zeta > 0$ , тогда нетрудно заметить, что первый интеграл легко сводится к интегральному синусу и косинусу. Действительно, положим в нем  $\zeta(v+1) = \tau$ , тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v+1} dv = \cos \zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau + \sin \zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau. \quad (4)$$

Положим

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{iv\zeta}}{v-\beta} dv, \quad J_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv\zeta}}{v-\beta} dv, \quad (5)$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v-\beta} dv = \frac{1}{2} [J_1 + J_2]. \quad (6)$$

<sup>1</sup> Поступая аналогично в случае гипотезы Циммермана-Винклера, мы найдем приближенное выражение для функции напряжения:

$$\Phi_0(\xi, \eta) = \frac{Ph}{\pi} \eta^2 (2\eta - 3) \int_0^{\infty} \frac{\mu^2 \cos \mu\xi}{\frac{12}{k} + \mu^4} d\mu,$$

где  $k = \frac{E}{Kh}$ ,  $\xi = \frac{x}{h}$ ,  $\eta = \frac{y}{h}$ , вычисление которого приводит к известному решению Циммермана:

$$M(x) = \frac{PL}{4} e^{-\frac{x}{L}} \left( \cos \frac{x}{L} - \sin \frac{x}{L} \right), \quad L = \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{3K}}.$$



Рассмотрим интеграл по контуру:

$$J = \int_{(K)} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt,$$

где контур  $K$  состоит (фиг. 4) из отрезка вещественной оси  $OM=R$ , дуги окружности  $MN$  радиуса  $R$  и отрезка луча  $L$  (с обходом  $\beta$ ).

Так как подынтегральная функция голоморфна в области, ограниченной контуром  $K$ , то

$$J = \int_0^M + \int_{\widehat{MN}} + \int_N^0 = 0.$$

Замечая, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по  $\widehat{MN}$  стремится к нулю (см. доказательства леммы Жордана), мы в пределе получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt - \int_{(L)} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt = 0,$$

т. е.

$$J_1 = \int_{(L)} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt.$$

Положим  $t = \beta \left(1 + \frac{\tau}{\zeta}\right)$ , тогда

$$\int_{(L)} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt = e^{i\beta\zeta} \int_{-\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau$$

с обходом начала координат.

Последний интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau &= \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau = \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{e^{i\tau\beta} - 1}{\tau} d\tau + \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau = \\ &= \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\tau\beta} - e^{-i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \pi i + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

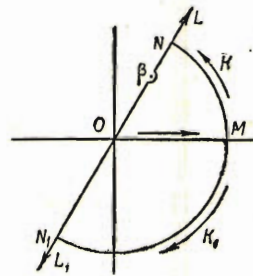
Итак,

$$J_1 = \int_{(L)} \frac{e^{it\zeta}}{t-\beta} dt = e^{i\beta\zeta} \left\{ \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\tau\beta} - e^{-i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \pi i \right\}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J^* = \int_{(K_1)} \frac{e^{-it\zeta}}{t-\beta} dt,$$

где  $K_1$  — контур, показанный на фиг. 4.



Фиг. 4.



Так как подынтегральная функция не имеет особенностей внутри области и регуларна на контуре, то

$$J^* = \int_0^M + \int_{MN_1} + \int_{N_1}^0 = 0.$$

Повторяя снова предыдущие рассуждения, получим:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\nu\zeta}}{\nu - \beta} d\nu = \int_{(L_1)} \frac{e^{-it\zeta}}{t - \beta} dt.$$

Пологая опять  $t = \beta \left(1 + \frac{\tau}{\zeta}\right)$ , получим:

$$J_2 = e^{-i\beta\zeta} \int_{-\zeta}^{-\infty} \frac{e^{-i\beta\tau}}{\tau} d\tau = e^{-i\beta\zeta} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\beta\tau}}{\tau} d\tau. \quad (8)$$

Подставляя теперь (7) и (8) в (6), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu\zeta}{\nu - \beta} d\nu &= \frac{1}{2} \left[ e^{i\beta\zeta} \left( \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\tau\beta} - e^{-i\tau\beta}}{\tau} d\tau + \pi i \right) + e^{-i\beta\zeta} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\beta\tau}}{\tau} d\tau \right] = \\ &= \cos \beta\zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{i\tau\beta}}{\tau} d\tau + i e^{i\beta\zeta} \left[ \int_0^{\zeta} \frac{\sin \tau\beta}{\tau} d\tau + \frac{\pi}{2} \right]; \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \left( \beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu\zeta}{\nu - \beta} d\nu \right) &= \operatorname{Re} \left\{ (1 - i\sqrt{3}) \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu\zeta}{\nu + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})} d\nu \right\} = \\ &= \left( \cos \frac{\zeta}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta - \sqrt{3} \sin \frac{\zeta}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta \right) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau} \cos \frac{\tau}{2}}{\tau} d\tau + \\ &+ \left( \sin \frac{\zeta}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta + \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta \right) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau} \sin \frac{\tau}{2}}{\tau} d\tau - \\ &- e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta} \left[ \left( \cos \frac{\zeta}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\zeta}{2} \right) \int_0^{\zeta} \frac{\cos \frac{\tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \tau}{\tau} d\tau + \right. \\ &\left. + \left( \sin \frac{\zeta}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \right) \left( \int_0^{\zeta} \frac{\sin \frac{\tau}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \tau}{\tau} d\tau + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$



Присоединяя к последнему выражение (4), получаем новое выражение для приближенной функции  $M(\zeta)$  в виде:

$$\begin{aligned}
 M(\zeta) = \frac{Ph}{3\pi\alpha} & \left\{ \left( \cos \frac{\zeta}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta - \sqrt{3} \sin \frac{\zeta}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta \right) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \tau} \cos \frac{\tau}{2}}{\tau} d\tau + \right. \\
 & + \left( \sin \frac{\zeta}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta + \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta \right) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \tau} \sin \frac{\tau}{2}}{\tau} d\tau - \\
 & - e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta} \left[ \left( \cos \frac{\zeta}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\zeta}{2} \right) \int_0^{\zeta} \frac{\cos \frac{\tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2} \tau}{\tau} d\tau + \right. \\
 & + \left. \left( \sin \frac{\zeta}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \right) \left( \int_0^{\zeta} \frac{\sin \frac{\tau}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} \tau}{\tau} d\tau + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \\
 & \left. - \cos \zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau - \sin \zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right\}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

который в точности совпадает с полученным проф. Герсевановым и Мачеретом (см. в цитированной выше работе стр. 51, формулу 71).

Возвращаясь к первоначальному виду функции  $M(\zeta)$

$$M(\zeta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv, \quad (2a)$$

выпишем выражение для нормальных напряжений на нижней грани балки которое нам понадобится впоследствии:

$$(\sigma_y)_{y=h} = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2 M}{d\zeta^2} \left( \frac{\alpha}{h} \right)^2. \quad (11)$$

Положим для определенности  $\zeta > 0$ , тогда

$$M(\zeta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} \frac{v \cos v\zeta}{v^3 + 1} dv = \frac{Ph}{\pi\alpha} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3 + 1} dv = \frac{Ph}{\pi\alpha} \operatorname{Re} \int_{(L)} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3 + 1} dv,$$

где  $L$  — луч с обходом  $\beta$ , указанный на фиг. 4. Последний интеграл мы в праве дифференцировать любое число раз:

$$(\sigma_y)_{y=h} = \left( \frac{\alpha}{h} \right)^2 \frac{d^2 M}{d\zeta^2} = \frac{Pa}{\pi h} \operatorname{Re} \int_{(L)} \frac{v^3 e^{iv\zeta}}{v^3 + 1} dv = \frac{Pa}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \int_{(L)} e^{iv\zeta} dv - \int_{(L)} \frac{e^{iv\zeta}}{v^3 + 1} dv \right\}. \quad (12)$$



Положим в первом интеграле (12)

$$v = \beta\mu,$$

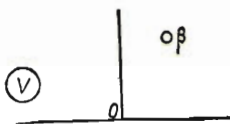
тогда

$$\operatorname{Re} \int_{(L)} e^{i\beta\mu\zeta} d\mu = \operatorname{Re} \left\{ \beta \int_0^{\infty} e^{i\beta\mu\zeta} d\mu \right\} = \operatorname{Re} \frac{1}{i\zeta} = 0.$$

Так как подынтегральной функцией во втором интеграле является голоморфная в области, ограниченной лучом  $L$  и вещественной осью, функция, то путь интегрирования может быть сведен на вещественную ось. Мы получаем:

$$(\sigma_y)_{y=h} = -\frac{P\alpha}{\pi h} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu\zeta}}{v^3+1} d\mu = -\frac{P\alpha}{\pi h} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v^3+1} dv. \quad (13)$$

п°3. Третье выражение для функции  $M(\zeta)$  и дифференциальное уравнение задачи. Рассмотрим опять



$$M(\zeta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} \frac{v \cos v\zeta}{v^3+1} dv = \frac{Ph}{\pi\alpha} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv.$$

Повторяя рассуждения п°2 настоящего раздела, мы можем написать:

Фиг. 5.

$$\int_0^{\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv = \int_0^{i\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv + 2\pi i \delta_{v=\beta} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} \quad \left( \beta = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}); \zeta > 0 \right),$$

где  $\delta$  есть знак интегрального вычета. Но

$$2\pi i \delta_{v=\beta} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} = 2\pi i \frac{e^{i\beta\zeta}}{3\beta} = \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta} \left[ \left( \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} - \sin \frac{\zeta}{2} \right) + i \left( \cos \frac{\zeta}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\zeta}{2} \right) \right],$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv = \operatorname{Re} \int_0^{i\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv + \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta} \left( \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} - \sin \frac{\zeta}{2} \right). \quad (14)$$

Далее:

$$\operatorname{Re} \int_0^{i\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{i\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv + \int_0^{-i\infty} \frac{v e^{-iv\zeta}}{v^3+1} dv \right\}. \quad (15)$$

Положим в первом из интегралов (15)  $v = it$ , а во втором  $v = -it$ , тогда

$$\operatorname{Re} \int_0^{i\infty} \frac{v e^{iv\zeta}}{v^3+1} dv = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}}{it^3-1} dt - \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}}{it^3+1} dt \right\} = - \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}}{t^3+1} dt. \quad (16)$$

Таким образом получаем функцию  $M(\zeta)$  в третьем ее выражении:

$$M(\zeta) = -\frac{Ph}{\pi\alpha} \left[ \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}}{t^3+1} dt + \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta} \left( \sin \frac{\zeta}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \right) \right], \quad (17)$$



являющемся наиболее удобным для вычислений. Обозначим

$$R(\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}}{t^6 + 1} dt, \quad T(\zeta) = \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta} \left( \sin \frac{\zeta}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\zeta}{2} \right), \quad (18)$$

тогда

$$M(\zeta) = -\frac{Ph}{\pi\alpha} [R(\zeta) + T(\zeta)]. \quad (17a)$$

Вычисление функции  $T(\zeta)$  и ее производных не представляет затруднений. Функция  $R(\zeta)$ , представленная быстро сходящимся интегралом, может быть легко вычислена численными методами вместе со своими производными и сведена в таблицу.

Легко проверить непосредственным дифференцированием, что функция  $T(\zeta)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$T^V + T = 0. \quad (19)$$

Покажем, что  $R(\zeta)$  удовлетворяет такому же уравнению с правой частью, именно:

$$R^{VI} + R = \frac{1}{\zeta^2} \quad (\zeta > 0). \quad (20)$$

В самом деле

$$R^{VI} + R = \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\zeta}(t^6+1)}{(t^6+1)} dt = \int_0^{\infty} te^{-t\zeta} dt = \frac{1}{\zeta^2},$$

что и требуется.

Таким образом из (17a) следует, что  $M(\zeta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$M^{VI}(\zeta) + M(\zeta) = -\frac{Ph}{\pi\alpha} \frac{1}{\zeta^2} \quad (\zeta > 0). \quad (21)$$

Это и есть дифференциальное уравнение нашей задачи в элементарной теории, которая является аналогом известного уравнения Циммермана:

$$M^{IV} + M = 0.$$

В заключение заметим, что выражение (10) для функции  $M(\zeta)$ , найденное впервые проф. Герсевановым и Мачеретом, легко получается из (21), если написать решение его в контурных интегралах с учетом краевых условий.

п° 4. Приближенная функция напряжения для полуплоскости. Выражение для функции напряжения в области полуплоскости согласно (27, II) имеет вид:

$$\psi(\xi_1, \eta_1) = \frac{2Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)(1 + \mu\eta_1) e^{-\mu\eta_1} \cos \mu\xi}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} - \frac{1}{2} \right] \frac{d\mu}{\mu^2}, \quad (22)$$

где  $\xi_1 = x_1/h$ ,  $\eta_1 = y_1/h$ .

Повторяя рассуждения п<sup>о</sup> 1 настоящего раздела, мы легко придем к приближенной функции напряжения при малых  $\alpha$  и  $h/x_1$  в виде:

$$\varphi_0(\zeta, \tau) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} \left[ \frac{(1 + \nu\tau) e^{-\nu\tau}}{\nu^3 + 1} \cos \nu\zeta - 1 \right] \frac{d\nu}{\nu^2}, \quad (23)$$

где  $\zeta_1 = \alpha x_1/h$ ,  $\tau = \alpha \eta_1 = \alpha y_1/h$ .

Во всех точках  $\tau > 0$  производные от интеграла (23) быстро сходятся и не представляют труда для вычислений. В точках  $\tau = 0$  функция  $\psi_0$  удовлетворяет условиям сопряжения с функцией  $\varphi_0$ .

### V. Связь задачи с задачами обычного плоского изгиба

Положим в подынтегральном выражении (2, IV)

$$\nu = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\mu}{\sqrt[3]{6\epsilon}}, \quad \zeta = \sqrt[3]{6\epsilon} \frac{x}{h} = \sqrt[3]{6\epsilon} \xi;$$

тогда

$$\varphi_0(\zeta, \eta) = \frac{Ph}{\pi\alpha} \eta^2 (2\eta - 3) \int_0^{\infty} \frac{\nu \cos \nu\zeta}{\nu^3 + 1} d\nu = \frac{Ph}{\pi} \eta^2 (2\eta - 3) \int_0^{\infty} \frac{\mu \cos \mu\xi}{\mu^3 + 6\epsilon} d\mu. \quad (1)$$

Рассмотрим разность между точной (30, II) и приближенной функциями напряжений в виде:

$$\Delta\varphi_{\epsilon}(\xi, \eta) = \frac{Ph}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{[(1 + 2\mu + 2\mu^2 - e^{-2\mu}) + \epsilon(e^{-2\mu} - 1 - 2\mu)] (\mu \eta \operatorname{ch} \mu\eta - \operatorname{sh} \mu\eta) + 2\mu^2 \eta (\epsilon - \mu) \operatorname{sh} \mu\eta}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \epsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} - \frac{\eta^2 (2\eta - 3) \mu^3}{\mu^3 + 6\epsilon} \right\} \frac{\cos \mu\xi}{\mu^2} d\mu - \frac{Ph}{\pi} \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta} \quad (a)$$

и будем называть ее, по аналогии с обычной задачей плоского изгиба, функцией „местных“ напряжений.

Вспомним, что через  $\epsilon$  обозначено было отношение модулей упругости полуплоскости и полосы, которое предполагалось конечным. Легко проверить, однако, что выражение (a) сохраняет смысл и в обоих предельных случаях  $\epsilon = \infty$  и  $\epsilon = 0$ .

При  $\epsilon = \infty$  мы получаем первый предельный случай:

$$\Delta\varphi_{\infty} = \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{(e^{-2\mu} - 1 - 2\mu)(\mu \eta \operatorname{ch} \mu\eta - \operatorname{sh} \mu\eta) + 2\mu^2 \eta \operatorname{sh} \mu\eta}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \frac{\cos \mu\xi}{\mu^2} d\mu - \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta} \right\}. \quad (b)$$

Это — известная функция напряжений задачи о бесконечной балке, покоящейся без трения на абсолютно жестком основании, полученная Filon<sup>1</sup> при рассмотрении задачи о балке, находящейся под действием двух равных, про-

<sup>1</sup> L. N. G. Filon. Philos. Trans. Roy. Soc. Vol. 201, London, 1903.



тивоположно направленных, приложенных по нормали к обеим граням ее сосредоточенных сил. Им же и была установлена связь между обеими задачами. Однако вопрос об области применения этого решения оставался открытым. Как мы увидим в следующем разделе, величина отношения  $\epsilon$ , при котором задачу можно считать предельной, не так уже велика.

Формально (b) является решением двух задач: 1) задачи о балке конечной упругости на абсолютно жестком основании и 2) задачи о бесконечно гибкой балке на основании конечной упругости.

Аналогично, при  $\epsilon = 0$ :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{Ph}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{(1 + 2\mu + 2\mu^2 - e^{-2\mu}) (\mu\eta \operatorname{ch} \mu\eta - \operatorname{sh} \mu\eta) - 2\mu^3 \eta \operatorname{sh} \mu\eta}{\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2} - \eta^2 (2\eta - 3) \right] \frac{\cos \mu\xi}{\mu^2} d\mu - \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{\eta} \right\}. \quad (c)$$

Это решение также давно известно и в несколько ином виде было получено впервые Filon (1903),<sup>1</sup> а впоследствии (1927) почти в аналогичном виде получено одновременно Kármán<sup>2</sup> и Seewald.<sup>3</sup> Последний вычислил интеграл при различных значениях параметров  $\xi$  и  $\eta$  и результаты представил в виде графиков.

Функция (c) является решением задачи о так называемых местных напряжениях (т. е. является поправкой к решению Эйлера) при обычном плоском изгибе балки одной сосредоточенной силой.

По аналогии с предыдущим мы заключаем, что она в то же время является решением задачи о балке практически весьма большой упругости по сравнению с основанием, на котором она покоится.

В заключение заметим, что те же результаты следуют из рассмотрения решения, основанного на предельном переходе по  $k$  в классическом решении (30а, II) при  $k=0$  и  $k=\infty$ . Заметим также, что решения любых иных задач плоского изгиба балок заключаются, как предельные случаи, в задачах об изгибе балок, лежащих на упругой полуплоскости или упругом основании в смысле Циммермана. Такой путь получения решений этих задач является, может быть, наиболее естественным.

## VI. Оценка погрешности приближенного решения

В общем случае произвольного  $0 < \epsilon < \infty$  погрешность приближенного решения определяется выражением (а, V).

Оценка этой величины в общем виде представляет значительные трудности вычислительного характера. Мы поставим поэтому перед собой более

<sup>1</sup> Loc. cit.

<sup>2</sup> Kármán. Arch. aerodyn. Inst. Hochschule. Bd. 7, Aachen, 1927.

<sup>3</sup> Seewald, там же.

узкую, но вместе с тем и наиболее важную для приложения задачу, а именно, оценим погрешность приближенного решения, отвлекаясь от чисто местных возмущений, вызываемых сосредоточенностью силы вблизи ее точки приложения. Этот вопрос мы считаем наиболее целесообразным выяснить на сравнении характерных для данной задачи нормальных напряжений на нижней грани полосы в точном и приближенном решениях.

Точное значение нормальных напряжений на грани  $y = \bar{h}$  ( $y_1 = 0$ ) получается из выражения (27, II):

$$\sigma(\xi, \varepsilon) = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right)_{y_1=0} = - \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^\infty \frac{(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) \cos \mu \xi}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} d\mu. \quad (d)$$

Согласно (13, III) приближенное значение того же напряжения равно:

$$\sigma_0(\xi, \varepsilon) = - \frac{P \sqrt[3]{6\varepsilon}}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\cos v \sqrt[3]{6\varepsilon} \xi}{v^3 + 1} dv = - \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^\infty \frac{3 \cos \mu \xi}{\mu^3 + 6\varepsilon} d\mu. \quad (e)$$

Вычисление обоих интегралов в общем случае может быть проведено лишь численными методами, причем второй из них зависит только от одного параметра:

$$\zeta = \sqrt[3]{6\varepsilon} \frac{x}{h},$$

в то время как (d) зависит от двух  $\xi$  и  $\varepsilon$ . Вычисление (d), однако, может быть значительно упрощено. Покажем, что  $\sigma(\xi, \varepsilon)$  может быть представлена разложением в ряд около произвольного значения  $\varepsilon_0 > 0$  по параметру  $\delta = \varepsilon - \varepsilon_0$ .

Полагая в подынтегральном выражении (d)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \delta, \quad |\delta| < \varepsilon_0,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi, \varepsilon) &= - \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^\infty \frac{(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) \cos \mu \xi}{\Delta(\mu\varepsilon_0) - \delta (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} d\mu = \\ &= - \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \frac{\cos \mu \xi}{1 - \delta \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)}} d\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

где для краткости обозначено:

$$\Delta(\mu\varepsilon) = (\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu).$$

Так как функция

$$|\delta| \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} = |\delta| \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon_0 (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)}$$

есть монотонно убывающая с наибольшим значением в точке  $\mu = 0$ , равным  $\frac{|\delta|}{\varepsilon_0} = |\theta| < 1$ , то можно написать:

$$\frac{1}{1 - \delta \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)}} = 1 + \delta \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} + \delta^2 \left[ \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \right]^2 + \dots$$



и, следовательно, будет:

$$\sigma(\xi, \varepsilon) = -\frac{2P\varepsilon}{\pi h} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \cos \mu \xi d\mu + \delta \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \cos \mu \xi d\mu + \dots + \delta^n \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \left[ \frac{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} \right]^n \cos \mu \xi d\mu + \dots \right\} \quad (2)$$

и ряд в правой части (2) сходится лучше ряда:

$$-\frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} d\mu (1 + |\theta| + |\theta|^2 + \dots) = \frac{1-\theta}{1-|\theta|} \sigma(0, \varepsilon_0).$$

Те же рассуждения остаются в силе и для  $\varepsilon_0 = \infty$ . В этом случае, однако, разложение подынтегральной функции (1) следует проводить по параметру  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ , именно:

$$\frac{\varepsilon(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} = \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\varepsilon^n} \left[ \frac{\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \right]^n + \dots \right\}$$

и этот ряд обладает теми же свойствами, что и выше, так как

$$\frac{\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} = \frac{\operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2}{\operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu + \mu} < \frac{\operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2}{(\operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2) + \mu(1 + \mu)} < 1. \quad (f)$$

В этом случае, следовательно,

$$\sigma(\xi, \varepsilon) = -\frac{2P}{\pi h} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \cos \mu \xi d\mu - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \frac{\operatorname{ch} 2\mu - 1 + 2\mu^2}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \cos \mu \xi d\mu + \dots \right\}, \quad (2')$$

где все интегралы имеют смысл и ряд сходится для всех  $\varepsilon > 1$ .

Итак, функция  $\sigma(\xi, \varepsilon)$  представлена рядом (2), коэффициенты которого зависят лишь от одного параметра  $\xi$  и начального значения  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , сходящимся в круге  $r = \varepsilon_0$ , и рядом (2'), сходящимся для всех  $\varepsilon > 1$ . Из полученных рядов особенно удобен ряд (2'), в то время как практическое пользование рядами вида (2), подобными геометрическому ряду, ограничено лишь небольшими значениями величины  $\theta = \delta/\varepsilon_0$ ; при этом остаточный член легко оценивается в виде:

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \left\{ \frac{|\delta|^n}{\varepsilon_0^n} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} d\mu (1 + |\theta| + |\theta|^2 + \dots) \right\} = \\ &= \frac{2P\varepsilon_0}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon_0)} d\mu \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{|\delta|^n}{\varepsilon_0^n} \cdot \frac{1}{1-|\theta|} = |\sigma(0, \varepsilon_0)| \frac{1-\theta}{1-|\theta|} |\theta|^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Тем не менее ряд (2) также удобен для применения. Ниже мы приводим первые коэффициенты разложений  $\sigma(\xi, \varepsilon)$  в точке  $\xi=0$  для трех значений  $\varepsilon = \infty, 1, 10^{-3}$ , вычисленных по Симпсону и правилу трапеций:

$$\left. \begin{aligned}
 & 1) \varepsilon_0 = \infty \quad (\varepsilon > 1): \\
 & \sigma(0, \varepsilon) = -\frac{2P}{\pi h} \left\{ 1.44385 - \frac{1}{\varepsilon} 0.60976 + \frac{1}{\varepsilon^2} 0.43343 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\varepsilon^3} 0.35113 + \frac{1}{\varepsilon^4} 0.30208 - \dots \right\}; \\
 & 2) \varepsilon_0 = 1 \quad (\delta = 1 - \varepsilon, \quad |\delta| < 1): \\
 & \sigma(0, \varepsilon) = -\frac{2P\varepsilon}{\pi h} \left\{ 1.08898 + 0.86868\delta + 0.72727\delta^2 + 0.63310\delta^3 + \dots \right\}; \\
 & 3) \varepsilon_0 = 10^{-3} \quad (\delta_1 = 1 - \varepsilon \cdot 10^3, \quad |\delta_1| < 1): \\
 & \sigma(0, \varepsilon) = -\frac{2P\varepsilon}{\pi h} \left\{ 111.7307 + 74.1476\delta_1 + 62.2865\delta_1^2 + \dots \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следует отметить, что первыми двумя рядами (4) с достаточной точностью охватываются все значения параметра  $\varepsilon$ , лежащие вне отрезка  $0 < \varepsilon \leq 0.5$ . Что касается последнего, то область его практического применения невелика, и это обстоятельство усиливается по мере приближения  $\varepsilon$  к 0, так как в этой точке подынтегральная функция имеет неустранимую особенность.

Относительно функции  $\sigma_0(\xi, \varepsilon)$  заметим, что в точке  $\xi=0$  она легко вычисляется;

$$\sigma_0(0, \varepsilon) = -\frac{P\sqrt[3]{6\varepsilon}}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^3+1} = -\frac{2P}{\pi h} \frac{\pi\sqrt[3]{3}}{9} \sqrt[3]{6\varepsilon} \approx -1.1 \sqrt[3]{\varepsilon} \frac{2P}{\pi h}. \quad (5)$$

Возвращаясь снова к выражениям (d) и (e), заметим, что

$$\begin{aligned}
 |\sigma(\xi, \varepsilon)| &= \frac{2P}{\pi h} \varepsilon \left| \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon)} \cos \mu\xi d\mu \right| \leq \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{\Delta(\mu\varepsilon)} d\mu = |\sigma(0, \varepsilon)|, \\
 |\sigma_0(\xi, \varepsilon)| &= \frac{2P}{\pi h} \left| \int_0^{\infty} \frac{3 \cos \mu\xi}{\mu^3 + 6\varepsilon} d\mu \right| \leq \frac{2P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{3}{\mu^3 + 6\varepsilon} d\mu = |\sigma_0(0, \varepsilon)| \approx 1.1 \sqrt[3]{\varepsilon} \frac{2P}{\pi h},
 \end{aligned}$$

т. е. обе величины принимают в точке  $\xi=0$  свои наибольшие значения. Рассматривая ближе эти последние, отметим существенное отличие между ними:

$$|\sigma(0, \varepsilon)| = \frac{2P\varepsilon}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} d\mu \quad \text{и} \quad |\sigma_0(0, \varepsilon)| \approx 1.1 \sqrt[3]{\varepsilon} \frac{2P}{\pi h},$$

очевидно, возрастающие функции от  $\varepsilon$ . Однако в то время как первая ограничена в своем росте предельным значением  $|\sigma(0, \infty)| \approx 1.444$  (см. первое разложение (4)), вторая растет неограниченно, как  $\sqrt[3]{\varepsilon}$ . Отсюда мы сразу полу-



чаем верхнюю границу пригодности приближенного решения. Именно, должно быть во всяком случае:

$$1.1 \sqrt[3]{\bar{\epsilon}} \leq 1.444, \quad \epsilon \leq 2.30,$$

т. е. наибольшее значение  $\bar{\epsilon}$ , при котором приближенное решение может еще иметь смысл, меньше (или равно) 2.30.

Это и есть первый критерий пригодности решения.<sup>1</sup>

Заметим между прочим, что, подставляя в первый из рядов (4)  $\epsilon = 2.30$ , получаем:

$$|\sigma(0, 2.30)| \simeq 1.24 \frac{2P}{\pi h},$$

и, следовательно, ошибка выражается примерно в  $\frac{1.44 - 1.24}{1.2} 100 \simeq 16\%$ .

Переходим к оценке погрешности в общем виде. Введем обозначение для ошибки:

$$\sigma_0(\xi, \epsilon) - \sigma(\xi, \epsilon) = \frac{P \sqrt[3]{6\epsilon}}{\pi h} \omega(\xi, \epsilon);$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \epsilon) &= \frac{(\sqrt[3]{6\epsilon})^2}{3} \int_0^\infty \left\{ \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{(\operatorname{ch}^2 \mu - 1 - 2\mu^2) + \epsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} - \frac{3}{\mu^3 + 6\epsilon} \right\} \cos \mu \xi d\mu = \\ &= \frac{(\sqrt[3]{6\epsilon})^2}{3} \int_0^\infty \left\{ \frac{[\mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3 (\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)] - 3\epsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \epsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\epsilon)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6\epsilon (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \epsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\epsilon)} \right\} \cos \mu \xi d\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко проверить, что выражение

$$\begin{aligned} \mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3 (\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) &= 8\mu^6 \left\{ \frac{1}{20} + \frac{13\mu^2}{3360} + \frac{\mu^4}{10800} + \frac{114\mu^6}{12!} - \right. \\ &- \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\mu^{2(n-1)}}{(2n+4)!} [3 \cdot 2^{2n+1} - (n+1)^2 (n+2) (2n+3)] \left. \right\} = \\ &= 8\mu^{12} \left\{ \left( \frac{1}{20\mu^6} + \frac{13}{3360\mu^4} + \frac{1}{10800\mu^2} + \frac{114}{12!} \right) - \right. \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{(2n+12)!} [3 \cdot 2^{2n+9} - (n+5)^2 (n+6) (2n+11)] \left. \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Из аналогичных рассуждений получаем верхнюю границу пригодности решения Циммермана в виде:

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{L} = \sqrt[4]{\frac{3Kh}{E}} < 1.84.$$

имеет корень  $6.5 < N < 7.0$ . Так как первый член в круглых скобках правой части (7) убывающая функция от  $\mu$ , а выражение под знаком суммы — возрастающая, то мы заключаем, что этот корень единственный. С другой стороны:

$$(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) - 2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) = 2(\operatorname{sh} \mu - \mu)(\operatorname{ch} \mu - 1) \geq 0. \quad (7a)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\omega(\xi, \varepsilon)| &\leq \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{3} \int_0^\infty \left| \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)} - \frac{3}{\mu^3 + 6\varepsilon} \right| d\mu < \\ &< \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{3} \left\{ \int_0^2 \frac{\mu^3(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)](\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu + \right. \\ &\quad \left. + \int_2^N \frac{\mu^3(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - \varepsilon\mu^2)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)](\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu + \right. \\ &\quad \left. + 3\varepsilon \int_0^N \frac{(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) - 2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)](\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu + 3 \int_N^\infty \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Из разложения (7) следует, что при  $\mu \leq N$

$$0 \leq \mu^3(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) < 8\mu^6 \left( \frac{1}{20} + \frac{13\mu^2}{3360} + \frac{\mu^4}{10800} + \frac{114\mu^6}{12!} \right);$$

кроме того,

$$(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) > \frac{2}{3}\mu^4 + 4\varepsilon\mu = \frac{2}{3}\mu(\mu^3 + 6\varepsilon).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \frac{\mu^3(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)](\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu < \\ &< 8 \int_0^2 \frac{\mu^6 \left( \frac{1}{20} + \frac{13.2^2}{3360} + \frac{2^4}{10800} + \frac{114.2^6}{12!} \right)}{\frac{2}{3}\mu(\mu^3 + 6\varepsilon)^2} d\mu < 12 \times 0.0672 \int_0^2 \frac{\mu^5}{(\mu^3 + 6\varepsilon)^2} d\mu < \\ &< 0.27 \int_0^{\frac{4}{3\varepsilon}} \frac{dv}{(v+1)^2} = 0.27 \left[ \lg \left( 1 + \frac{4}{3\varepsilon} \right) - \frac{4}{4 + 3\varepsilon} \right]. \quad (\alpha) \end{aligned}$$

При  $\mu > 2$ ,

$$1 + 2\mu^2 < \frac{e^{2\mu}}{6},$$

следовательно,

$$(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) > \frac{e^{2\mu}}{3} + \varepsilon \frac{e^{2\mu}}{2} = \frac{2 + 3\varepsilon}{6} e^{2\mu},$$



И ЗНАЧИТ

$$\int_2^N \frac{\mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3 (\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu < \\ < \frac{6 \cdot 8}{2 + 3\varepsilon} \int_2^\infty \frac{\left( \frac{1}{20} + \frac{13\mu^2}{3360} + \frac{\mu^4}{10800} + \frac{114\mu^6}{12!} \right) \mu^6}{\mu^3 e^{2\mu}} d\mu < \frac{0.74}{2 + 6\varepsilon}. \quad (\beta)$$

Далее, мы уже показывали ранее (см. (f, VI)), что

$$\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu > \operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2.$$

Поэтому согласно (7a):

$$3\varepsilon \int_0^N \frac{[(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) - 2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)]}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu < \\ < \frac{3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_0^N \frac{2(\operatorname{sh} \mu - \mu)(\operatorname{ch} \mu - 1)}{(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu = \\ = \frac{3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_0^N \frac{\operatorname{ch} \mu - 1}{(\operatorname{sh} \mu + \mu) (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu < \frac{3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_0^N \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon}, \quad (\gamma)$$

ТАК КАК

$$\frac{\operatorname{ch} \mu - 1}{\operatorname{sh} \mu + \mu} < \frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \operatorname{ch} \frac{\mu}{2}} < 1.$$

Следовательно,

$$3\varepsilon \int_0^N \frac{[(\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu) - 2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)]}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu + 3 \int_N^\infty \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon} < \\ < \frac{3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_0^N \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon} + 3 \int_N^\infty \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon} < \frac{3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu^3 + 6\varepsilon} + \frac{3}{1 + \varepsilon} \int_{6.5}^\infty \frac{d\mu}{\mu^3} < \\ < \frac{1}{1 + \varepsilon} (1.1 \sqrt[3]{\varepsilon} + 0.04). \quad (\delta)$$

Итак, собирая (α), (β) и (δ), получаем окончательно:

$$|\omega(\xi, \varepsilon)| < \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{3} \left\{ 0.27 \left[ \lg \left( 1 + \frac{4}{3\varepsilon} \right) - \frac{4}{4 + 3\varepsilon} \right] + \frac{0.74}{2 + 3\varepsilon} + \frac{1.1 \sqrt[3]{\varepsilon} + 0.04}{1 + \varepsilon} \right\}. \quad (9)$$

Из этой оценки видно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  как  $|\omega(\xi, \varepsilon)|$ , так и относительная ошибка  $\frac{|\sigma_0 - \sigma|}{|\sigma_0|}$  (см. (e, VI)) убывают, как  $\varepsilon^{\frac{2}{3}} \lg \frac{1}{\varepsilon}$ .

Так как  $|\sigma(\xi, \varepsilon)|$  и  $|\sigma_0(\xi, \varepsilon)|$ , как мы видели выше, имеют в точке  $\xi = 0$  абсолютный максимум, а  $\omega(\xi, \varepsilon)$ , как нетрудно проверить, имеет там же экстре-

мум, то представляет особый интерес привести оценку погрешности в этой точке.

Здесь будет:

$$\omega(0, \varepsilon) = \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{8} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{[\mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)] - 3\varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} + \frac{6\varepsilon (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} \right\} d\mu. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что если  $\omega(0, \varepsilon_1) < 0$ , а  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , то и  $\omega(0, \varepsilon_2) < 0$  и, значит, если  $\omega(0, \varepsilon)$  меняет знак, то она его меняет только один раз. Из второго из рядов (4) легко установить, что при  $\varepsilon = 0.9$

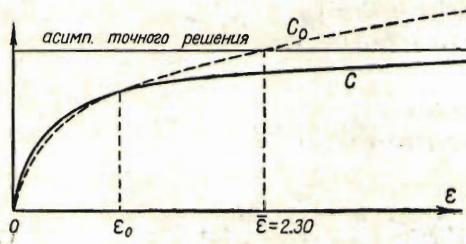
$$\omega(0, 0.9) > 0,$$

а при  $\varepsilon = 1$

$$\omega(0, 1) < 0.$$

Следовательно, этот единственный корень функции  $\omega(0, \varepsilon)$  лежит в пределах

$$0.9 < \varepsilon_0 < 1.$$



Фиг. 6

Исчисление ошибки в пределах  $(\varepsilon_0, \infty)$  может быть легко произведено с помощью первых двух рядов (4). Остается дать оценку для интервала  $(0, \varepsilon_0)$ , где  $\omega(0, \varepsilon) \geq 0$ .

В этом случае, из (7), (7а), (α) и (β) имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega(0, \varepsilon) &= \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{8} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{[\mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)] - 3\varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6\varepsilon (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} \right\} d\mu < \\ &< \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{8} \int_0^N \frac{[\mu^3 (\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - 3(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2)]}{[(\operatorname{ch} 2\mu - 1 - 2\mu^2) + \varepsilon (\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu)] (\mu^3 + 6\varepsilon)} d\mu < \\ &< \frac{(\sqrt[3]{6\varepsilon})^2}{8} \left\{ 0.27 \left[ \lg \left( 1 + \frac{4}{3\varepsilon} \right) - \frac{4}{4 + 3\varepsilon} \right] + \frac{0.74}{2 + 3\varepsilon} \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

и оценка относительной погрешности решения выражается в виде:

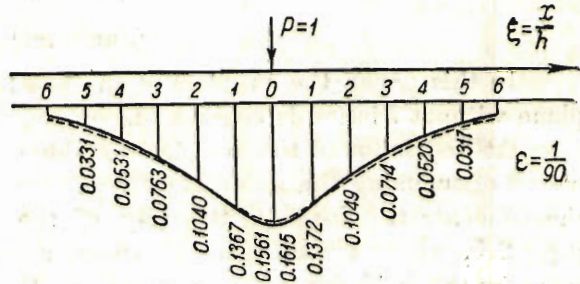
$$f = \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{|\sigma_0|} = \frac{P \sqrt[3]{6\varepsilon} \omega(0, \varepsilon)}{P \sqrt[3]{6\varepsilon} \frac{2 \times 1.1}{\pi h \sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{\varepsilon^2} \left\{ 0.245 \left[ \lg \left( 1 + \frac{4}{3\varepsilon} \right) - \frac{4}{4 + 3\varepsilon} \right] + \frac{0.68}{2 + 3\varepsilon} \right\}. \quad (12)$$



Эта оценка тем более точная, чем меньше  $\epsilon$ , дает:

$\epsilon$	1.0	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$f <$	0.15	0.21	0.19	0.165	0.06	0.02

Фактическая ошибка, вычисленная для некоторых случаев с помощью рядов (4), оказалась значительно меньшей. Однако уже эта оценка показывает, что приближенное решение с достаточной для большинства приложений (малых  $\epsilon$ ) точностью изображает действительную картину напряжений.



Фиг. 7

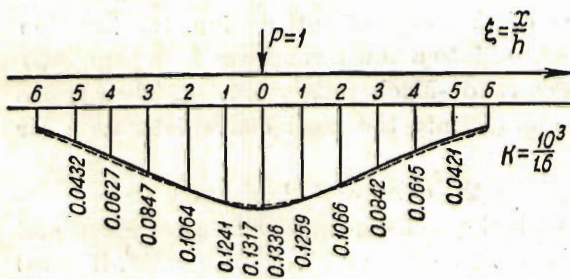
При этом напомним снова, что приближенное решение пригодно лишь для  $\epsilon < \bar{\epsilon} = 2.30$ . При  $\epsilon > \bar{\epsilon}$  картина напряжений в точном решении меняется очень мало, поэтому в этих случаях можно уже пользоваться предельным решением ( $\epsilon = \infty$ ), т. е. решением Filon (см. в. V). Что касается приближенного решения для случаев  $\epsilon > \bar{\epsilon} = 2.30$ , то таковым можно также пользоваться, полагая лишь в нем  $\epsilon = 2.30$ . Как мы видели (см. стр. 311), ошибка в окрестности точки  $\xi = 0$  при этом не будет превышать 16%.

Выше (фиг. 6) мы приводим схематическое сопоставление обоих решений в виде сравнения величин:

$$C(\epsilon) = \frac{\pi h}{2P} |\sigma(0, \epsilon)|$$

и

$$C_0(\epsilon) = \frac{\pi h}{2P} |\sigma_0(0, \epsilon)|.$$



Фиг. 8.

В заключение приведем сравнительные графики (фиг. 7) напряжений  $\sigma(\xi, \epsilon)$  и  $\sigma_0(\xi, \epsilon)$  для случая  $\epsilon = \frac{1}{90}$ ; последний (обозначенный пунктиром) позаимствован из работы проф. Герсеванова и Мачерета.

Для сравнения приводим графики напряжений (фиг. 8) для аналога этой же задачи в случае гипотезы Циммермана. Все данные, а также результаты приближенного решения (обозначенные пунктиром) позаимствованы из той же работы.

Поступила 29 IV 1938.

## THE PROBLEM OF AN INFINITE BAR REPOSING ON AN ELASTIC HALF-PLANE

J. G. ALPERIN

(Kharkov)

(Summary)

In this paper the problem of an infinite bar resting on an elastic half-plane without friction is considered.

At first is found the solution for the case of a harmonical load. Then, by means of summing the latter, the stress function is established for the case of the concentrated load in the way of the contour integrals (see form. (30), page 295, where  $\epsilon = E_1/E$ ;  $E$ —the modulus of Young for the bar and  $E_1$ —the same for the half-plane). For comparison the stress-function for an analogous problem in the case of the Zimmerman-Winkler's hypothesis is given without demonstration (see form. (30a), page 296, where  $k = \frac{E}{Kh}$ ;  $K$  is the so-called „bending factor“ for the ground). Further, the possibility of a generalization of the case of packet of any number of bars resting one on another without friction is pointed out (chap. III).

Expanding the received solution into a series by powers of  $\alpha = \sqrt[3]{6\epsilon}$  and assuming the latter quantity to be very small, then the elementary stress-function is derived (form. (2), page 299). This function satisfies the Euler-Bernoulli's hypothesis. By special choice of the way of integration, the function of the bending moment  $M(\zeta)$  is transformed into a new form (form. (10), page 303) which coincides exactly with the Gersevanov-Macheret's<sup>1</sup> solution. Then it has proved possible to bring the function  $M(\zeta)$  into the most convenient form for practical use.

In considering the difference between the exact and elementary stress-functions, the connection of the problem with the well-known solutions of Filon and Kármán for ordinary plane-bent is noted. (These solutions are gotten, if  $\epsilon = 0$  or  $\epsilon = \infty$ ; see chap. V.)

In conclusion the value of the inexactitude of the elementary solution is given by comparing the normal stress for the lower side of the bar. The value of the inexactitude decreases as the function  $\epsilon^{\frac{2}{3}} \lg \frac{1}{\epsilon}$ , when  $\epsilon \rightarrow 0$ . Moreover, the upper limit  $\bar{\epsilon} = 2.30$  of suitability of the elementary solution is given.

---

<sup>1</sup> See Transactions of the Science Research Sector of the State Union Building Trust „Building Foundation“, Symposium, № 8, form. (71), p. 51, ONTI, 1937.