АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т. II, в. 2 1938 V. II, № 2

ЗАМЕТКИ

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

И. М. РУДЫЙ

(Харьков)

Очень часто при расчете балок на изгиб приходится определять статические или кинематические элементы, характеризующие состояние деформированного стержня (например, прогиб, реактивный момент и т. п.), вызванные одновременным действием распределенной нагрузки, сосредоточенными силами и парами. Во избежание лишних вычислений, связанных с аналогичными операциями при определении элементов для отдельных типов нагрузки, удобно пользоваться следующими формулами:

$$Z_q = qF(x, a), \tag{1}$$

$$Z_P = -P\frac{\partial F(x, a)}{\partial a}, \tag{2}$$

$$Z_M = M\frac{\partial^2 F(x, a)}{\partial a^2}, \tag{3}$$

где Z_q — статический или кинематический элемент от поперечной распределенной нагрузки на участке (a, b), q — нагрузка на единицу длины балки, Z_P и Z_M — соответственно элементы от сосредоточенной силы P и пары M, приложенных в точке a, x,— текущее значение координаты изгибаемого стержня.

Ниже приводится доказательство существования формул (1), (2), (3) для наиболее общего случая.

Пусть задача изгиба стержней приводится к уравнению

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}(x)\, y^{(n-k)} = U(x)\, f(x) \tag{4}$$

с соответствующими краевыми условиями, при которых последнее имеет решение и притом единственное.

Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ суть частные линейно независимые решения уравнения (4) без правой части, то

$$y = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(x) + \int_a^x V_n(x, t)\, U(t)\, f(t)\, dt, \tag{5}$$

где $V_n(x, t)$ — функция Коши, которая при $x = t$ равна нулю вместе со своими $n-2$ первыми производными по x, тогда как ее производная $n-1$-го порядка при, $x = t$ равна единице.

Легко показать, что на ряду с указанными свойствами $V_n(x, t)$ выполняются следующие соотношения:

$$[V_n(x, t)]_{x=t} = \left[\frac{\partial V_n(x, t)}{\partial t}\right]_{x=t} = \ldots = \left[\frac{\partial^{n-2} V_n(x, t)}{\partial t^{n-2}}\right]_{x=t} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^{n-1} V_n(x, t)}{\partial t^{n-1}}\right]_{x=t} = (-1)^{n-1}. \tag{6}$$

Действительно, условия

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, \varphi_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = n-1 \\ 0 & \text{при} \quad i \neq -1 \end{cases} \qquad (1 = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{7}$$

однозначно определяют $C_k(t)$, и, следовательно, функцию Коши можно записать в виде:

$$V_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, \varphi_k(x) = (-1)^{n-1} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots \varphi_n(x) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \ldots \varphi_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

Если теперь воспользоваться формулой Лейбница и найти производные по t до $n-1$-го порядка, то легко установить, что при $t = x$ все они исчезают, кроме $n-1$-й, которая будет равна $(-1)^{n-1}$.

Для более полной характеристики свойств функции Коши заметим, что в общем интеграле уравнения (4) при заданных условиях в точке $x = \alpha$:

$$y = \sum_{k=1}^{n} y^{(k-1)}(\alpha)\, V_k(x, \alpha) + \int_{\alpha}^{x} V_n(x, t)\, U(t)\, f(t)\, dt, \tag{9}$$

функции $V_k(x, \alpha)$, значение которых с их производными до $n-1$-го порядка включительно для $x = \alpha$ дают единичную матрицу, легко определяются по формуле:

$$V_{n-k}(x, \alpha) = -\frac{\partial V_{n-k+1}(x, \alpha)}{\partial \alpha} + b_{n-k}(\alpha)\, V_n(x, \alpha) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),^{*} \tag{10}$$

Применение формул (9) и (10) к задачам строительной механики значительно облегчает процесс определения произвольных постоянных.

---

* Для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $V_n(x, t)$ будет функцией от $x - t$ и может быть найдена по формуле:

$$V_n(x - t) = \operatorname{Res} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{F(\lambda)},$$

где

$$F(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\, \lambda^{n-k}.$$

Для доказательства формул (1), (2) и (3) необходимо частное решение уравнения (4) с правой частью представить в несколько ином виде. Для этого преобразуем тождество

$$U(t)\, V_n(x, t) = -\int\limits_t^x \frac{\partial\,[V_n(x, z)\, U(z)]}{\partial z}\, dz \tag{11}$$

интегрированием по частям:

$$U(t)\, V_n(x, t) = (-1)^n \int\limits_t^x \frac{\partial^n\,[V_n(x, z)\, U(z)]}{\partial z^n}\, \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dz + \frac{U(x)\,(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{12}$$

Введением новой функции

$$M(x) = \int\limits_\alpha^x \frac{(x-t)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\, f(t)\, dt \qquad (-1 \leqslant \mu \leqslant n-1) \tag{13}$$

и применением формулы Дирихле частное решение с правой частью

$$\Phi(x) = \int\limits_\alpha^x \left\{ (-1)^n \int\limits_t^x \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, \frac{\partial^n\,[V_n(x, z)\, U(z)]}{\partial z^n}\, dz + \frac{U(x)\,(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} f(t)\, dt \tag{14}$$

можно выразить следующим функционалом:

$$\Phi(x) = \int\limits_\alpha^x \left\{ (-1)^n \int\limits_t^x \frac{(z-t)^{n-\mu-2}}{\Gamma(n-\mu-1)}\, \frac{\partial^n\,[V_n(x, y)\, U(z)]}{\partial z^n}\, dz + U(x)\, \frac{(x-t)^{n-\mu-2}}{\Gamma(n-\mu-1)} \right\} M(t)\, dt. \tag{15}$$

Для целого μ, но не равного $n-1$, формула (15) принимает вид:

$$\Phi(x) = (-1)^{\mu+1} \int\limits_\alpha^x \frac{\partial^{\mu+1}\,[V_n(x, t)\, U(t)]}{\partial t^{\mu+1}}\, M(t)\, dt \qquad (-1 \leqslant \mu < n-1). \tag{16}$$

При $\mu = -1$ она принимает общепринятую форму, так как

$$\int\limits_\alpha^x M(t)\, dt = \left[\int\limits_\alpha^x dt \int\limits_\alpha^t \frac{(t-z)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\, f(z)\, dz \right]_{\mu \to -1} = \int\limits_\alpha^x f(z)\, dz,$$

а следовательно,

$$M(x) = f(x).$$

Для $\mu = n-1$ из формул (13) и (14) непосредственно следует, что

$$\Phi(x) = (-1)^n \int\limits_\alpha^x \frac{\partial^n\,[V_n(x, t)\, U(t)]}{\partial t^n}\, M(t)\, dt + M(x)\, U(x). \tag{17}$$

При изгибе балок, когда нагрузка изменяется по закону $f(x)$, а обратная величина жесткости поперечного сечения по закону $U(x)$, $M(x)$ для балок со свободными концами имеет следующий физический смысл,

$\mu = 0$, $M(x)$ — перерезывающая сила,
$\mu = 1$, $M(x)$ — изгибающий момент,
$\mu = 2$, $M(x)$ — перерезывающая сила от фиктивной нагрузки,
$\mu = 3$, $M(x)$ — фиктивный изгибающий момент.

При наличии сосредоточенных сил и пар, действующих по длине балки, применение формул (13), (16) и (17) дает существенное упрощение.

Статический или кинематический элемент Z в своем математическом представлении может быть выражен линейным оператором от $y(x)$

$$Z = L(y), \tag{18}$$

где y после определения произвольных постоянных будет, вообще говоря, такого вида:

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x)\int_a^{\beta_i} U(t) f(t)\left[\frac{\partial^{r_i} V_n(x, t)}{\partial x^{r_i}}\right]_{x=\beta_i} dt+\int_a^x V_n(x, t)\, U(t) f(t)\, dt, \tag{19}$$

где $\varphi_i(x)$ являются частными решениями уравнения (4) без правой части, а c_i, β_i и r_i — некоторые постоянные, определяемые краевыми условиями изгибаемого стержня.*

Для

$$f(x)=\Phi_a q, \quad \text{где} \quad \Phi_a=\begin{cases} 0 & \text{если} \quad x<a \\ 1 & \text{если} \quad x>a \end{cases} \qquad a \geqslant \alpha,$$

$$Z_q=qL\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x)\int_a^{\beta_i} U(t)\left[\frac{\partial^{r_i} V_n(x, t)}{\partial x^{r_i}}\right]_{x=\beta_i} dt+\Phi_a\int_a^x V_n(x, t)\, U(t)\, dt\right\}. \tag{20}$$

Для сосредоточенной силы P, приложенной в точке a, частное решение уравнения (4) с правой частью находим при помощи формул (13) и (16), полагая в них μ равным нулю.

Тогда

$$M(x)=\int_a^x f(t)\, dt=\Phi_a P$$

и

$$Z_P=PL\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x)\left[\frac{\partial^{r_i} V_n(x, a)}{\partial x^{r_i}}\right]_{x=\beta^i} U(a)+\Phi_a V_n(x, a)\, U(a)\right\}. \tag{21}$$

Аналогичным способом находим решение для пары M, приложенной в точке a, положив μ равным единице.

$$Z_M=-ML\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x)\left[\frac{\partial^{r_i+1} V_n(x, a)\, U(a)}{\partial x^{r_i}\, \partial a}\right]_{x=\beta_i}+\Phi_a \frac{\partial}{\partial a}\left[V_n(x, a)\, U(a)\right]\right\}. \tag{22}$$

Формулы (20), (21) и (22) остаются справедливыми, если считать c_i равным нулю для всех β_i, меньших a. Сравнение их доказывает существование формул (1), (2) и (3).

Следствие. Если $y=\sum_{i=1}^{k} C_i y_i$, то для $Z=L(y_i)$ полученные формулы справедливы.

Поступила в редакцию 18 XII 1937.

CONCERNING A DIFFERENTIAL DEPENDENCY IN BUILDING MECHANICS

I. M. RUDY

(Kharkov)

(Summary)

In the resistance of materials the static or kinematic element (deflection, deviation, reactive momentum) Z, involved by a distributed load applied along the length of the beam (a, b), is to be found by the formula (1).

In the present work the author proves that the same element, but arising from a concentrated load P or a pair of M applied to the point a will be correspondingly determined by formulae (2) and (3).

* В целях большей простоты принимаем $r_i=n-2$. Вообще же это ограничение не обязательно.