А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т. II, в. 2   1938   V. II, № 2

УДАР ПО КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. П. ФИЛИППОВ

(Харьков)

В предыдущей статье[1] нами дано решение задачи об ударе тяжелого тела по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании. В настоящей работе рассматривается вопрос об ударе тяжелого тела весом P по круглой пластинке, лежащей на упругом основании.[2] Упругость основания учитывается согласно общепринятой гипотезе, что прогиб для каждой точки пластинки пропорционален давлению упругого основания. В начальный момент $t=0$ (момент удара) тело имеет заданную скорость v. Сосредоточенная ударная нагрузка прикладывается в центре пластинки, ограниченной контуром $r=a$.

1. Задачу решаем при обычных предположениях, т. е. что после удара падающее тело остается в соприкосновении с пластинкой по крайней мере в течение полупериода основного тона для колеблющейся пластинки. Решение будем искать для случая центральной симметрии, т. е. в предположении, что узловыми линиями могут быть лишь концентрические окружности $r=\text{const}$. Перемещение $w(r, t)$ для этого случая должно удовлетворять дифференциальному уравнению изогнутой поверхности пластинки

$$\triangle\triangle w+\frac{k}{N}w+\frac{\gamma h}{gN}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

для всех точек пластинки за исключением начала координат, где имеется особенность в виду приложения сосредоточенного груза.

Здесь и в дальнейшем обозначено:

$$\triangle=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{оператор Лапласа,}$$

$$N=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad \text{жесткость пластинки.}$$

---

[1] „Прикладная математика и механика", т. I, вып. 3, стр. 325, 1938.

[2] Случай внезапного приложения силы к неограниченной свободной пластинке рассмотрен в заметке А. И. Лурье „Прикладная математика и механика", т. II, вып. 1, 1934.

E — модуль упругости материала пластинки,

h — толщина пластинки,

σ — коэффициент Пуассона,

k — сопротивление грунта оседанию, когда оседание равно единице, отнесенное к единице поверхности.

γh — вес пластинки на единицу поверхности,

$Q = \gamma h \pi a^2$ — вес всей пластинки,

P — вес падающего груза.

Решение задачи необходимо найти при определенных граничных и начальных условиях.

Граничные условия могут быть следующие.

Для заделанной по контуру пластинки:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = a; \tag{I}$$

для пластинки со свободным краем:

$$\Delta w + (\sigma - 1)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = a; \tag{II}$$

для опертой пластинки:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = a. \tag{III}$$

За начальные условия должны быть приняты следующие:

В начальный момент ($t = 0$)

$$w(r, 0) = 0 \tag{IV}$$

и, кроме того, для всех точек пластинки, за исключением $r = 0$, должно быть:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \text{для} \quad t = 0 \quad (r \neq 0). \tag{IV$_1$}$$

В точке $r = 0$ пластинка в начальный момент находится под действием импульса силы, величина которого Z. Для любого положительного t давление на пластинку в этой точке:

$$F = P - \frac{P}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{для} \quad r = 0. \tag{1}$$

2. Для разыскания решения применяем символический метод Heaviside. Если ввести безразмерную координату

$$\rho = \frac{r}{a},$$

то при указанных начальных условиях (IV) и (IV$_1$) для всех точек пластинки, за исключением $r \neq 0$, в символической форме уравнение (1) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \left(L^4 + \frac{p^2}{\nu^2}\right) w = 0, \tag{2}$$

где

$$L^4 = \frac{a^4 k}{N}, \qquad \nu^2 = \frac{gN}{\gamma h a^4}.$$

В точке $r = 0$ попрежнему имеется особенность в виду приложения сосредоточенной нагрузки, которая в нашем случае, при наличии для $t = 0$ импульса силы Z, в символической форме запишется так:

$$\frac{a^4}{N} F = \frac{a^4}{N} \left(P - \frac{P}{g} p^2 w + Zp\right). \tag{3}$$

Обозначая через $\frac{a^4}{N} G_1(r, 0, p)$ функцию Грина уравнения (2) для какого-либо из выбранных граничных условий, получим в любой точке, от нагрузки F согласно (3):

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{N} \left[P + Zp - \frac{P}{g} p^2 G(0, p)\right] G_1(\rho, 0, p). \tag{4}$$

Полагая здесь $\rho = 0$, найдем:

$$G(0, p) = \frac{a^4}{N} \frac{(P + Zp) G_1(0, 0, p)}{1 + \frac{a^4 P}{gN} p^2 G_1(0, 0, p)}.$$

После подстановки этого значения $G(0, p)$ в правую часть (4) найдем:

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{N} \frac{(P + Zp) G_1(\rho, 0, p)}{1 + \frac{P}{g}\frac{a^4}{N} p^2 G_1(0, 0, p)}. \tag{5}$$

Следовательно, согласно известной интерпретации символического метода:[1]

$$w(\rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{G(\rho, p)}{p} e^{pt} dp. \tag{6}$$

При этом прямая, параллельная мнимой оси, вдоль которой ведется интегрирование, расположена вправо от всех особенностей $G(\rho, p)$.

Полюсы мероморфной функции $G(\rho, p)$, которые, как следует ожидать, будут иметь чисто мнимые значения $p_k = \pm i\nu\lambda_k$, являются корнями трансцендентного уравнения:

$$1 + \frac{Pa^4}{gN} p^2 G_1(0, 0, p) = 0, \tag{7}$$

или

$$1 - \frac{P\pi a^2}{Q} \lambda^2 G(0, 0, \lambda) = 0, \tag{7'}$$

где

$$G_1(0, 0, \pm i\lambda\nu) = G(0, 0, \lambda).$$

---

[1] Н. М. Крылов, Методи наближеного і символічного розв'язання рівнань... Киев, 1931.

На основании теории вычетов получим из (6) следующее выражение для прогиба:

$$w(\rho, t) = w_{st} + \frac{a^4}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(P+zp)\ G_1(\rho, 0, p_k)\, e^{p_k t}}{\left[p_k + \frac{P}{g}\frac{a^4}{N} p_k^3\, G_1(0, 0, p_k)\right]'_{p_k}},$$

где

$$w_{st} = \frac{Pa^4}{N}\, G(\rho, 0, L)$$

статический прогиб пластинки под действием силы P.

После замены p_k через $\pm i\nu\lambda_k$ получим:

$$w(\rho, t) = w_{st} - \frac{a^4}{N} \sum_i \frac{G(\rho, 0, \lambda_i)\,[P\cos\nu\lambda_i t - Z\nu\lambda_i \sin\nu\lambda_i t]}{-\frac{1}{2}\left[\lambda_i - \frac{P\pi a^2}{Q}\lambda_i^3\, G(0, 0, \lambda_i)\right]'_{\lambda_i}}. \tag{8}$$

В частности, прогиб в центре пластинки будет:

$$w(0, t) = w_{st} - \frac{a^2}{N}\frac{Q}{\pi P} \sum_i \frac{P\cos\nu\lambda_i t - Z\nu\lambda_i \sin\nu\lambda_i t}{-\frac{1}{2}\lambda_i^2 \left[\lambda_i - \frac{P\pi a^2}{Q}\lambda_i^3\, G(0, 0, \lambda_i)\right]'_{\lambda_i}}. \tag{9}$$

3. Решение уравнения (2) необходимо записать в различной форме, в зависимости от знака величины $L^4 - \lambda^2$.

Для случая, когда $L^4 > \lambda^2$, имеем:

$$w(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{Re} J_0(u\rho\sqrt{i}) + A_2 \operatorname{Im} J_0(u\rho\sqrt{i}) + A_3 \operatorname{Re} H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{i}) + A_4 \operatorname{Im} H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{i}), \tag{10}$$

где через Re обозначена действительная часть, Im — множитель при i, соответствующей функции.

Здесь

$$u = \sqrt[4]{L^4 - \lambda^2}.$$

Вводя для функций Бесселя $J_0(u\rho\sqrt{\pm i})$ и Ганкеля $H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{\pm i})$ нулевого порядка первого рода обозначения, применяемые Hayaschi,

$$J_0(u\rho\sqrt{\pm i}) = \operatorname{ber}(u\rho) \pm i \operatorname{bei}(u\rho),$$
$$H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{\pm i}) = \operatorname{her}(u\rho) \pm i \operatorname{hei}(u\rho),$$

решение уравнения (2) запишем в виде:

$$w(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{ber}(u\rho) + A_2 \operatorname{bei}(u\rho) + A_3 \operatorname{her}(u\rho) + A_4 \operatorname{hei}(u\rho). \tag{10'}$$

Когда $\lambda^2 > L^4$, решение уравнения (2) будет:

$$w(\rho, \lambda) = A_1' J_0(u'\rho) + A_2' I_0(u'\rho) + A_3' N_0(u'\rho) + A_4' K_0(u\rho), \tag{11}$$

где

$$u' = \sqrt[4]{\lambda^2 - L^4}.$$

В выражении (11) $I_0(u\rho)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента:

$$I_n(u'\rho) = i^{-n} J_n(iu'\rho),$$

$N_0(u'\rho)$ — функция Неймана, $K_n(u'\rho)$ — функция Макдональда, связанная с функцией Ганкеля $H_n^{(1)}$ соотношением:

$$K_n(u'\rho) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\pi n i} H_n^{(1)}(iu'\rho).$$

В точке приложения единичной нагрузки в центре пластинки должна быть особенность вида:

$$\frac{1}{8\pi N} r^2 \ln r. \tag{12}$$

Так как[1]

$$\operatorname{her}(u\rho) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^8}{(4!)^2} - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^6}{(3!)^2} + \ldots\right] \ln\frac{\gamma u\rho}{2} - \frac{2}{\pi} R_1,$$

то

$$\operatorname{her}(u\rho) \to \frac{1}{2\pi}(u\rho)^2 \ln r, \quad \text{когда} \quad r \to 0.$$

Функция $\operatorname{hei}(u'\rho)$ имеет в начале координат особенность $\frac{2}{\pi}\ln r$.

Поэтому, чтобы для выражения (10′) получить в начале координат особенность (12), необходимо положить

$$A_3 = \frac{a^2}{4u^2 N}, \quad A_4 = 0.$$

Следовательно,

$$w(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{ber}(u\rho) + A_2 \operatorname{bei}(u\rho) + \frac{a^2}{4u^2 N}\operatorname{her}(u\rho). \tag{13}$$

Для случая, когда $\lambda^2 > L^4$, для получения особенности (12) необходимо взять решение (11) в виде:

$$w(\rho, \lambda) = A_1' J_0(u'\rho) + A_2' I_0(u'\rho) - \frac{A_3}{2}\left[N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi}K_0(u'\rho)\right], \tag{14}$$

так как

$$N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi}K_0(u'\rho) = \frac{2}{\pi}J_0(u'\rho)\ln\frac{\gamma u'\rho}{2} + \frac{8}{\pi}\left\{\frac{1}{2}J_0(u'\rho) - \frac{1}{4}J_4(u'\rho) + \ldots\right\} -$$

$$- \frac{2}{\pi}I_0(u'\rho)\ln\frac{\gamma u'\rho}{2} + \frac{8}{\pi}\left\{\frac{1}{2}I_2(u'\rho) + \frac{1}{4}I_4(u'\rho) + \ldots\right\} \to -\frac{(u'\rho)^2}{\pi}\ln r,$$

когда $r \to 0$.

[1] E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln..., стр. 96, 1923.

Теперь, определяя произвольные постоянные, входящие в (13) и (14) в зависимости от граничных условий, и получим функцию Грина.

4. Рассмотрим случай закрепленного и свободного края.

а) Для закрепленного края, подчиняя (13) условиям (I), получим:

$$A_1 \operatorname{ber}(u) + A_2 \operatorname{bei}(u) = -A_3 \operatorname{her}(u),$$
$$A_1 \operatorname{ber}'(u) + A_2 \operatorname{bei}'(u) = -A_3 \operatorname{her}'(u).$$

Определяя отсюда A_1 и A_2, вычислим после подстановки их значений в (13) функцию Грина:

$$G(\rho, 0, \lambda) = \frac{1}{4a^2 u^2} K(\rho, 0, u), \tag{15}$$

где

$$K(\rho, 0, u) = \operatorname{her}(u\rho) -$$
$$- \frac{[\operatorname{her}(u)\operatorname{bei}'(u) - \operatorname{her}'(u)\operatorname{bei}(u)]\operatorname{ber}(u\rho) + [\operatorname{ber}(u)\operatorname{her}'(u) - \operatorname{ber}'(u)\operatorname{her}(u)]\operatorname{bei}(u\rho)}{\operatorname{ber}(u)\operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u)\operatorname{bei}(u)}.$$

Значение $K(0, 0, u)$ будет:

$$K(0, 0, u) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{bei}'(u)\operatorname{her}(u) - \operatorname{bei}(u)\operatorname{her}'(u)}{\operatorname{ber}(u)\operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u)\operatorname{bei}(u)}. \tag{16}$$

Аналогичным образом для случая $\lambda^2 > L^4$ из (14) с помощью дифференциальных соотношений

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad I_0'(x) = I_1(x), \quad N_0'(x) = -N_1(x), \quad K_0'(x) = -K_1(x)$$

получим:

$$A_1 J_0(u') + A_2 I_0(u') = \frac{A_3}{2}\left[N_0(u') + \frac{2}{\pi} K_0(u)\right],$$

$$A_1 J_1(u') - A_2 I_1(u') = -\frac{A_3}{2}\left[N_1(u') + \frac{2}{\pi} K_1(u')\right].$$

После подстановки значений A_1, A_2, $A_3 = \frac{a^2}{4(u')^2 N}$ в (14), принимая во внимание известные соотношения

$$N_0(u') J_1(u') - N_1(u') J_0(u') = \frac{2}{\pi u'}, \quad I_0(u') K_1(u') + I_1(u') K_0(u') = \frac{1}{u'}, \tag{17}$$

получим значение

$$G(\rho, 0, \lambda) = \frac{a^2}{4(u')^2 N} K(\rho, 0, u'), \tag{15'}$$

где

$$K(\rho, 0, u') = -\frac{1}{2}\left[N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi} K_0(u'\rho)\right] +$$
$$+ \frac{\left[\frac{2}{\pi u'} + I_1(u') N_0(u') + I_0(u') N_1(u')\right] J_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{u'} + K_0(u') J_1(u') - K_1(u') J_0(u')\right] I_1(u'\rho)}{2[J_0(u') I_1(u') + J_1(u') I_0(u')]}.$$

В частности, для $\rho=0$ получим:

$$K(0,\,0,\,u')=$$
$$=\frac{\frac{4}{\pi u'}+I_1(u')\,N_0(u')+I_0(u')\,N_1(u')+\frac{2}{\pi}\left[K_0(u')\,J_1(u')-K_1(u')\,J_0(u')\right]}{2\left[J_0(u')\,I_1(u')+J_1(u')\,I_0(u')\right]}. \tag{16'}$$

Если введем вместо функции $G(0,\,0,\,\lambda)$ функцию $K(0,\,0,\,u)$ (15), то уравнение (7) для определения значения корней λ_i запишется в виде:

$$1-\frac{P\pi}{4Q}\frac{\lambda^2}{u^2}K(0,\,0,\,u)=0. \tag{7''}$$

Значение прогиба $w(\rho,\,t)$ (8) можно записать в виде:

$$w(r,\,t)=\frac{Pa^2\,K(0,\,0,\,L)}{4L^2\,N}-\frac{a^2}{4N}\sum_k\frac{K(\rho,\,0,\,u_k)}{D(u_k)}\left[P\cos\nu\lambda_k\,t-Z\nu\lambda_k\sin\nu\lambda_k\,t\right], \tag{18}$$

где $D(u_k)$ имеет значение:

$$\begin{gathered}D(u)=u^2+\frac{\lambda^2{}_1}{2u^2}-\frac{\pi P\lambda_1{}^4}{16Qu^3}K_u{}'(0,\,0,\,u)\quad\text{для}\quad L^4>\lambda_1{}^2,\\ D(u')=(u'_k)^2-\frac{\lambda_k^2}{2(u_k')^2}+\frac{\pi P\lambda_k^4}{16Q\,(u_k')^3}K_u{}'(0,\,0,\,u')\quad\text{для}\quad\lambda_k{}^2>L^4.\end{gathered} \tag{19}$$

В частности, прогиб в центре плиты:

$$w(0,\,t)=\frac{Pa^2}{4L^2\,N}K(0,\,0,\,L)-\frac{a^2}{4N}\frac{4Q}{\pi P}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2{}_k}{\lambda_k{}^2\,D(u_k)}\left[P\cos\nu\lambda_k\,t-Z\nu\lambda_k\sin\nu\lambda_k\,t\right]. \tag{18'}$$

Прогиб под грузом может быть записан также в виде:

$$w(0,\,t)=w_{st}+\sum_k A_k\sin(\nu\lambda_k\,t-\varepsilon_k), \tag{20}$$

где для Z взято значение $\frac{P}{g}v$ и введены обозначения:

$$w_{st}=\frac{Pa^2}{4N}K_0,$$

$$A_k=\frac{H_k}{K_0}\sqrt{w_{st}{}^2+\frac{v^2}{g}\frac{\pi P}{4Q}\lambda_k{}^2\,K_0\,w_{st}},\qquad \operatorname{tg}\varepsilon_k=\frac{1}{\lambda_k}\sqrt{\frac{g}{v^2}\frac{4Q}{\pi P}\frac{w_{st}}{K_0}},$$

причем

$$K_0=\frac{1}{L^2}K(0,\,0,\,L),\qquad H_k=\frac{4Q}{\pi P}\frac{u_k{}^2}{\lambda_k{}^2\,D(u_k)}.$$

Производные $K'(0,\,0,\,u)$, входящие в выражение для $D(u)$, вычисляются из (16) и (16'). Значения производных могут быть значительно упрощены, если воспользоваться формулами дифференцирования и функциональными соотношениями для функций Бесселя.

Из соотношений

$$\frac{d^2\,J_0(x)}{dx^2}=-J_0(x)+\frac{1}{x}J_1(x),$$

$$J_0(x)\,H_1{}'(x)-J_1(x)\,H_0{}'(x)=\frac{2}{\pi i x},$$

беря для аргумента x значение $u\sqrt{i}$, можно получить следующие зависимости (штрихами обозначены производные по u):

$$\begin{gathered}\operatorname{ber}''(u)=\operatorname{bei}(u)-\frac{1}{u}\operatorname{ber}'(u),\quad \operatorname{bei}''(u)=-\operatorname{ber}(u)-\frac{1}{u}\operatorname{bei}'(u),\\ \operatorname{her}''(u)=\operatorname{hei}(u)-\frac{1}{u}\operatorname{her}'(u),\quad \operatorname{her}''(u)=-\operatorname{her}(u)-\frac{1}{u}\operatorname{hei}'(u),\\ \operatorname{ber}(u)\operatorname{her}'(u)+\operatorname{bei}'(u)\operatorname{hei}(u)-\operatorname{ber}'(u)\operatorname{her}(u)-\operatorname{bei}(u)\operatorname{hei}'(u)=0,\\ \operatorname{ber}(u)\operatorname{hei}'(u)+\operatorname{bei}(u)\operatorname{her}'(u)-\operatorname{ber}'(u)\operatorname{hei}(u)-\operatorname{bei}'(u)\operatorname{her}(u)=\frac{2}{\pi u}.\end{gathered}\tag{21}$$

С помощью этих соотношений получим для $L^4>\lambda^2$:

$$K'(0,\,0,\,u)=\frac{2}{\pi u}\,\frac{\operatorname{bei}^2(u)}{[\operatorname{ber}(u)\operatorname{bei}'(u)-\operatorname{ber}'(u)\operatorname{bei}(u)]^2}.\tag{22}$$

Аналогичным образом, принимая во внимание соотношения (17), а также зависимости

$$\begin{gathered}J_1'(u)=J_0(u)-\frac{1}{u}J_1(u),\quad I_1'(u)=I_0(u)-\frac{1}{u}I_1(u),\\ N_1'(u)=N_0(u)-\frac{1}{u}N_1(u),\quad K_0'(u)=-K_0(u)-\frac{1}{u}K_1(0),\end{gathered}$$

получим для $\lambda^2>L^4$:

$$K'(0,\,0,\,u)=\frac{2}{\pi u}\,\frac{[I_0(u)-J_0(u)]^2}{[J_0(u)\,I_1(u)+I_0(u)\,J_1(u)]^2}.\tag{22'}$$

Для больших значений u удобно перейти к асимптотическим выражениям в вышеприведенных формулах для подсчета значений корней (7″) и прогибов (20).

Для этого следует воспользоваться следующими асимптотическими значениями для функций ber, bei, her, hei, J_p, N_p, I_p, $H_p^{(1)}$:[1]

$$\operatorname{ber}(u)=\frac{e^{\alpha(u)}}{\sqrt{2\pi u}}\cos\beta(u),\quad \operatorname{bei}(u)=-\frac{e^{\alpha(u)}}{\sqrt{2\pi u}}\sin\beta(u),$$

$$\operatorname{her}(u)=-\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\,e^{\alpha(-u)}\sin\beta(-u),\quad \operatorname{hei}(u)=-\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\,e^{\alpha(-u)}\cos\beta(-u),$$

$$J_p(u)=\left[P_p(u)\cos\left(u-\frac{2p+1}{4}\pi\right)-Q_p(u)\sin\left(u-\frac{2p+1}{4}\pi\right)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi u}},$$

$$N_p(u)=\left[P_p(u)\sin\left(u-\frac{2p+1}{4}\pi\right)+Q_p(u)\cos\left(u-\frac{2p+1}{4}\pi\right)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi u}},$$

$$I_p(u)=\frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}}S_p(-2u),\quad i^{p+1}H_p^{(1)}(iu)=\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\,e^{-u}S_p(2u),$$

[1] Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции. ОНТИ, 1935.

где

$$\alpha(u)=\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8u\sqrt{2}}-\frac{25}{384u^3\sqrt{2}}\cdots,$$

$$\beta(u)=\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8u\sqrt{2}}-\frac{1}{16u^2}-\frac{25}{384u^3\sqrt{2}}\cdots,$$

$$P_p(u)=1-\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8u)^2}+\cdots,$$

$$Q_p(u)=\frac{4p^2-1}{8u}-\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8u)^3}+\cdots,$$

$$S_p(u)=1+\frac{4p^2-1}{1!\,4u}+\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(4u)^2}+\cdots$$

С помощью этих выражений уравнение для определения значений λ ($7''$) примет вид:

для $L^4>\lambda^2$:

$$1-\frac{\pi P\lambda^2}{8Qu^2}\left\{1+4e^{\alpha(-u)-\alpha(u)}\left[\left(2-\frac{1}{2u^2}-\frac{\sqrt{2}}{4u^3}+\frac{1}{16u^4}\cdots\right)\sin\beta(u)\sin\beta(-u)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\sqrt{2}}{4u^3}\cdots\right)\sin\beta(-u)\cos\beta(u)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{8u^2}-\frac{\sqrt{2}}{4u^3}\cdots\right)\right]\right\}=0; \tag{23}$$

для $\lambda^2>L^4$:

$$1+\frac{\pi P\lambda^2}{8Qu'^2}\,\frac{\cos u'+U_1\sin\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)+U_2\cos\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin u'+U_2\sin\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)-U_1\cos\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)}=0, \tag{23'}$$

где

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{9}{64(u')^2}+\frac{39}{256\,(u')^3}+\frac{300}{32768\,(u')^4}+\cdots\right],$$

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4u'}+\frac{9}{64\,(u')^2}-\frac{300}{32768\,(u')^4}-\cdots\right].$$

Значение производных, входящих в выражение $D(u)$ (19), будет:

для $L^4>\lambda^2$:

$$K'(0,\ 0,\ u)=8e^{-2\alpha(u)}\left(1-\frac{1}{4u^2}-\frac{\sqrt{2}}{4u^3}-\frac{11}{32u^4}-\cdots\right)\sin^2\beta(u); \tag{24}$$

для $\lambda^2>L^4$:

$$K'(0,\ 0,\ u')=\frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{4u'}+\frac{5}{32\,(u')^2}+\frac{21}{128\,(u')^3}+\frac{507}{2048\,(u')^4}+\cdots}{\left[\sin u'+U_2\sin\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)-U_1\cos\left(u'-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}. \tag{24'}$$

б) Для пластинки со свободным краем $r=a$ необходимо удовлетворить на контуре условиям (II):

$$\Delta w+(\sigma-1)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial r}(\Delta w)=0\qquad \text{для } r=a\ (\rho=1).$$

Решение уравнения (2) имеет прежний вид (13) для $L^4 > \lambda^2$ и (14) для $\lambda^2 > L^4$.

Для первого случая $L^4 > \lambda^2$, подчиняя (13) условиям (II) и принимая во внимание соотношения:

$$\triangle \operatorname{ber}(u\rho) = u^2 \operatorname{bei}(u\rho), \quad \triangle \operatorname{bei}(u\rho) = -u^2 \operatorname{ber}(u\rho),$$
$$\triangle \operatorname{her}(u\rho) = u^2 \operatorname{hei}(u\rho), \quad \triangle \operatorname{hei}(u\rho) = -u^2 \operatorname{her}(u\rho),$$

получим следующее значение $K(\rho, 0, u)$:

$$\begin{aligned} K(\rho, 0, u) = \operatorname{her}(u\rho) + \frac{1}{\omega(u)}\Big\{\Big[&\operatorname{hei}(u)\operatorname{ber}'(u) - \operatorname{hei}'(u)\operatorname{ber}(u) - \\ &- \frac{1-\sigma}{u}(\operatorname{her}'(u)\operatorname{ber}'(u) + \operatorname{hei}'(u)\operatorname{bei}'(u))\Big]\operatorname{ber}(u\rho) - \\ &- \Big[\operatorname{bei}(u)\operatorname{hei}'(u) - \operatorname{hei}(u)\operatorname{bei}'(u) - \\ &- \frac{1-\sigma}{u}(\operatorname{her}'(u)\operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u)\operatorname{hei}'(u))\Big]\operatorname{bei}(u\rho)\Big\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\omega(u) = \operatorname{bei}'(u)\operatorname{ber}(u) - \operatorname{bei}(u)\operatorname{ber}'(u) + \frac{1-\sigma}{u}[\operatorname{ber}'^2(u) + \operatorname{bei}'^2(u)].$$

В частности, для $K(0, 0, u)$ получим:

$$\begin{aligned} K(0, 0, u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\omega(u)}\Big\{&\operatorname{hei}'(u)\operatorname{ber}(u) - \operatorname{hei}(u)\operatorname{ber}'(u) + \\ &+ \frac{1-\sigma}{u}[\operatorname{her}'(u)\operatorname{ber}'(u) + \operatorname{hei}'(u)\operatorname{bei}'(u)]\Big\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Для $L^4 < \lambda^2$ имеем:

$$\begin{aligned} K(\rho, 0, u') = \frac{1}{2\omega_1(u')}\Big\{\Big[&-\frac{2}{\pi u'} + N_0(u')I_1(u') + N_1(u')I_0(u') + \\ &+ \frac{2(\sigma-1)}{u}N_1(u')I_1(u')\Big]J_0(u'\rho + \\ + \Big[-\frac{2}{\pi u} + \frac{2}{\pi}(K_0(u')J_1(u') - J_0(u')K_1(u')) &- \frac{4}{\pi}\frac{\sigma-1}{u}J_1(u')K_1(u')\Big]I_0(u'\rho) - \\ &- \frac{1}{2}\left(N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi}K_0(u'\rho)\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{25'}$$

где

$$\omega_1(u') = J_0(u')I_1(u') + J_1(u')I_0(u') + \frac{2(\sigma-1)}{u'}J_1(u')I_1(u').$$

Для $\rho = 0$ получим:

$$\begin{aligned} K(0, 0, u') = \frac{1}{2\omega_1(u')}\Big\{&-\frac{4}{\pi u'} + N_0(u')I_1(u') + N_1(u')I_0(u') + \\ &+ \frac{2}{\pi}(K_0(u')J_1(u') - J_0(u')K_1(u')) + \\ &+ \frac{2(\sigma-1)}{u}\Big[N_1(u')I_1(u') - \frac{2}{\pi}J_1(u')K_1(u')\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{26'}$$

Прогиб пластинки определяется согласно прежним выражениям, только вместо $K(\rho, 0, u)$ должны быть взяты (25) и (26). Значения производных $K'(0, 0, u)$, входящих в $D(u)$, с помощью соотношений (21) можно записать в виде:

для $L^4 > \lambda^2$

$$K'(0, 0, u) = -\Big\{\frac{2}{\pi u}\operatorname{ber}^2(u) + \frac{1-\sigma}{u}[\operatorname{her}'(u)\operatorname{ber}'(u) + \operatorname{hei}'(u)\operatorname{bei}'(u)](\operatorname{ber}^2(u) + \operatorname{bei}^2(u)) - \frac{1-\sigma}{u}[\operatorname{ber}'^2(u) + \operatorname{bei}'^2(u)][\operatorname{her}(u)\operatorname{ber}(u) + \operatorname{hei}(u)\operatorname{bei}(u)] + \frac{2(1-\sigma)}{\pi u^2}\Big[\omega(u) + \frac{2\sigma}{u}\operatorname{ber}'^2(u)\Big]\Big\}\frac{1}{\omega^2(u)}; \tag{27}$$

для $L^4 < \lambda^2$:

$$K'(0, 0, u') = \frac{2}{\pi u'\,\omega_1^2(u')}\Big\{[J_0(u') + I_0(u')]^2 + \frac{2(\sigma-1)}{u'}\Big[\frac{\sigma}{u'}(I_1^2(u') + J_1^2(u')) + I_0(u')I_1(u') + J_0(u')J_1(u')\Big]\Big\}. \tag{27'}$$

Асимптотические выражения для уравнения (7″) и значения производных $K'(0, 0, u)$ для случая свободного края будут:

$$1 - \frac{\pi P\lambda^2}{8u^2 Q}\Big\{1 + \frac{4e^{\alpha(-u)-\alpha(u)}}{\omega_2(u)}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1 + \frac{1}{8u^2} + \cdots\Big) + \Big(2 - \frac{1}{2u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} - \cdots\Big)\cos\beta(u)\cos\beta(-u) + \Big(\frac{\sqrt{2}}{4u^3} + \cdots\Big)\sin\beta(-u)\cos\beta(u)\Big] + \frac{1-\sigma}{u}\sqrt{2}\Big(1 - \frac{3}{8u^2} - \cdots\Big)\sin(\beta(-u) - \beta(u)) - \frac{1-\sigma}{u^2}\Big(1 + \frac{1}{4u^2} + \cdots\Big)\cos\Big(\beta(-u) - \beta(u)\Big)\Big]\Big\} = 0, \tag{28}$$

где:

$$\omega_2(u) = 1 - \frac{1-\sigma}{u}\sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}u} + \frac{1}{8u^2} - \cdots\Big),$$

$$K'(0, 0, u) = -\frac{4e^{-2\alpha(u)}}{\omega_2^2(u)}\Big\{\Big(1 - \frac{1}{4u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} - \cdots\Big)(1 + \cos 2\beta(u)) - \frac{1-\sigma}{u}\Big[\sqrt{2}\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{u} + \frac{7}{8u^2} - \cdots\Big) = \Big(2 - \frac{1}{\sqrt{2}u} - \frac{1}{2u^2}\Big)\sin(\beta(-u) - \beta(u)) + \frac{1}{\sqrt{2}u}\Big(1 + \frac{1}{8u^2} + \cdots\Big)\cos(\beta(-u) - \beta(u))\Big] - \frac{2(1-\sigma)\sigma}{u^2}\Big[\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}u} + \cdots\Big)\sin 2\beta(u) + \frac{1}{\sqrt{2}u}\cos 2\beta(u)\Big]\Big\};$$

для $L^4 < \lambda^2$ получим:

$$1 + \frac{\pi P\lambda^2}{8Q(u')^2}\,\frac{\cos u' + U\sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) + V\cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin u' + V\sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) - U\cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right)} = 0, \tag{28'}$$

где

$$U = U_1 - \frac{2(\sigma - 1)}{u'}V_1, \quad V = U_2 + \frac{2(\sigma - 1)}{u'}V_2,$$

причем

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8u'} - \frac{9}{64(u')^2} - \frac{150}{1024(u')} - \ldots\right), \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{3}{8u'} - \frac{150}{1024(u')^3} - \frac{9900}{32768(u')^4} - \ldots\right), \end{aligned} \tag{29}$$

U_1 и U_2 имеют прежние значения;

$$\begin{aligned} K'(0, 0, u') = \frac{1}{4(\omega_2')^2}\Big\{ & 2 - \frac{7 - 8\sigma}{2u'} + \frac{21 - 16\sigma(5 - 4\sigma)}{16(u')^2} + \frac{45 + 8\sigma(21 - 24\sigma)}{64(u')^3} + \\ & + \frac{759 + 32\sigma(3 - 12\sigma)}{1024(u')^4} + \ldots\Big\}, \end{aligned} \tag{29'}$$

где

$$\omega_2' = \sin u' + V\sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) - U\cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Для примера взята круглая пластинка, для которой

$$L^4 = \frac{a^4 k}{N} = 1000, \qquad \sigma = 0.25. \tag{30}$$

Для этой пластинки с помощью таблиц функций Бесселя определяем значения корней уравнения (7) для случаев заделанного и свободного краев. Вычисления проделаны для некоторых значений $\frac{Q}{P}$. При этом пришлось задаться рядом значений аргумента u и определить для них из (7′) соответствующие отношения $\frac{Q}{P}$. Значения u для заданных $\frac{Q}{P}$ определялись с помощью интерполирования.

При этом $\lambda_1^2 = 1000 - u^4$; $\lambda_k = (u')^4 + 1000$.

Для $u' > 8$ значения все подсчеты для λ_k $(k = 2, 3, 4\ldots)$ проводились по асимптотическим формулам (23′), (24′) и (28′), (29′).

Таким образом были получены значения корней λ_k, приведенные в табл. I на стр. 273.

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

Первый случай: груз приложен внезапно без начальной скорости; второй случай: груз в начальный момент (момент удара) имеет заданную скорость v.

Таблица I

$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка					Свободная пластинка				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
18	27.24	42.84	76.79	132.20	208.44	26.98	41.70	75.44	130.73	207.00
15	25.79	42.24	75.86	131.11	207.57	25.91	41.09	74.24	129.64	206.36
10	23.36	41.17	73.86	129.24	206.07	23.21	40.17	72.51	127.64	204.37
6	19.52	40.26	72.22	127.68	204.65	19.44	39.10	70.80	126.12	202.98
4	16.58	39.80	72.14	126.77	203.80	16.50	38.67	69.92	125.40	—
2	12.20	39.37	70.54	126.09	—	12.17	38.25	69.01	124.44	—
1	8.81	38.16	70.05	—	—	8.79	38.10	68.48	—	—

Прогиб под грузом для первого случая определяется выражением (20) в предположении, что $v=0$:

$$w(0, t)=w_{st}\{1-[H_1' \cos\lambda_1 \nu t+H_2' \cos\lambda_2 \nu t+\cdots+H_k' \cos\lambda_k \nu t+\cdots]\}, \tag{20'}$$

где

$$w_{st}=\frac{a^2}{4N}K_0,\quad H_i'=\frac{H_i}{K_0}.$$

Значение $K_0=K(0, 0, L)$ определяется для закрепленного края согласно (16), для свободного из (26).

Для нашего примера $L=\sqrt{\frac{ka^4}{N}}=5.6234$.

Производя вычисления, получим для этих случаев значения:

$K(0, 0, L)=0.015781$ для закрепленной пластинки,

$K(0, 0, L)=0.015839$ для свободной пластинки.

Значения величин H_i' для взятых выше отношений $\frac{Q}{P}$ приводим в табл. II

Таблица II

$\frac{P}{Q}$	Закрепленная пластинка					Свободная пластинка				
	H_1'	H_2'	H_3'	H_4'	H_5'	H_1'	H_2'	H_3'	H_4'	H_5'
18	0.8253	0.1257	0.0380	0.0081	0.0020	0.8067	0.1398	0.0402	0.0082	0.0028
15	0.8630	0.0998	0.0296	0.0060	0.0015	0.8503	0.1090	0.032[illegible]	0.0061	0.0012
10	0.9277	0.0523	0.0160	0.0030	0.0007	0.9212	0.0577	0.0170	0.0030	0.0006
6	0.9715	0.0202	0.0066	0.0011	0.0002	0.9696	0.0219	0.0071	0.0012	0.0002
4	0.9868	0.0094	0.0031	0.0005	0.0001	0.9862	0.0099	0.0034	0.0005	0.0001
2	0.9962	0.0022	0.0008	0.0001	—	0.9965	0.0024	0.0009	0.0001	—
1	0.9992	0.0006	0.0002	—	—	0.9992	0.0006	0.0002	—	—

Вычисляя из (20′) значение максимального прогиба, получим следующие значения коэффициента динамичности $\delta = \frac{w_d}{w_{st}}$ (табл. III).

Таблица III

$\frac{Q}{P}$	1	2	4	6	10	15	18
δ для заделанной пластинки	1.999	1.998	1.982	1.948	1.909	1.863	1.844
δ для свободной пластинки	1.999	1.998	1.979	1.944	1.905	1.858	1.834

Как видно из этой таблицы, даже для сравнительно больших $\frac{Q}{P}$ коэффициент δ мало отличается от двойного.

Для второго случая, когда груз имеет в начальный момент скорость v, предположим, что скорость v такова, что в выражении для A_i (20) можно пренебречь значением w_{st} по сравнению с $\frac{v^2}{g}\frac{\pi}{4}\frac{P}{Q}K_0$. В таком случае значение прогиба под грузом (18′) можно записать в виде:

$$w(0, t) = A\left(H_1^{(2)} \sin \nu\lambda_1 t + H_2^{(2)} \sin \nu\lambda_2 t + \cdots + H_i^{(2)} \sin \nu\lambda_i t + \cdots\right), \qquad (18'')$$

где

$$H_i^{(2)} = \frac{P}{Q}\sqrt{\frac{\pi}{4}K_0}\,\lambda_i H_i^{(1)},$$

постоянная A, независящая от P, имеет для заделанной и свободной пластинок значения:

$$A = \sqrt{\frac{v^2}{g}\frac{w_{st}}{P}Q}\,.$$

Таким образом для постоянных $H_i^{(2)}$ получим значения, приведенные в табл. IV.

Таблица IV

$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка					Свободная пластинка				
	$H_1^{(2)}$	$H_2^{(2)}$	$H_3^{(2)}$	$H_4^{(2)}$	$H_5^{(2)}$	$H_1^{(2)}$	$H_2^{(2)}$	$H_3^{(2)}$	$H_4^{(2)}$	$H_5^{(2)}$
18	0.1390	0.0333	0.0181	0.0066	0.0026	0.1348	0.0366	0.0188	0.0066	0.0035
15	0.1655	0.0313	0.0166	0.0058	0.0023	0.1638	0.0333	0.0177	0.0059	0.0019
10	0.2412	0.0240	0.0132	0.0043	0.0016	0.2386	0.0259	0.0138	0.0043	0.0013
6	0.3518	0.0151	0.0088	0.0026	0.0009	0.3500	0.0159	0.0094	0.0027	0.0008
4	0.4558	0.0104	0.0063	0.0018	0.0006	0.4538	0.0107	0.0066	0.0019	0.0006
2	0.6775	0.0049	0.0033	0.0008	—	0.6770	0.0051	0.0034	0.0009	—
1	0.9806	0.0026	0.0017	—	—	0.9799	0.0025	0.0017	—	—

Вычисляя максимальное значение w_d из (18″), получим величины, приведенные в табл. V.

Таблица V

$\frac{Q}{P}$	1	2	4	6	10	15	18
w_d для заделанной пластинки	$0.981A$	$0.667A$	$0.452A$	$0.344A$	$0.244A$	$0.176A$	$0.150A$
w_d для свободной пластинки	$0.981A_1$	$0.667A_1$	$0.451A_1$	$0.343A_1$	$0.243A_1$	$0.175A_1$	$0.148A_1$

Как видно из этой таблицы, величина максимального прогиба при ударе груза по взятой пластинке мало зависит от условий на контуре.

Поступила в редакцию 26 II 1938.

EIN STOSS GEGEN EINE KREISFÖRMIGE PLATTE, DIE AUF ELASTISCHER UNTERLAGE RUHT

A. P. PHILIPPOW

(Charkow)

(Zusammenfassung)

In unserer Arbeit ist die Lösung der Aufgabe über den Stoss eines Körpers mit Gewicht P gegen eine kreisförmige Platte mit Radius $r=a$ gegeben, welche eine Biegungsfestigkeit von N hat. Die Platte ruht auf einer elastischen Unterlage, deren Federkonstante durch k ausgedrückt ist. Die Last wirkt in der Plattenmitte. Die Anfangsgeschwindigkeit ist v. Die Lösung der Aufgabe ist für den Fall von Zentralsymmetrie gegeben.

In § 1 sind Grenzbedingungen, wie auch Anfangsbedingungen angeführt, für welche wir die Lösung finden.

Die Aufgabe führt zur Integration der Differenzialgleichung (2), § 2. Die Lösung (2) wird nach der Heaviside'schen Methode gefunden, mit Annahme, dass es im Punkte $r=0$ eine Singularität gibt, — die Wirkung von Einzelkräften (3) (Z — Kraftimpuls). Der Wert der Durchbiegung $w(\rho, t)$ wird aus (8) bestimmt, $w(0, t)$ — der Ausdruck (9). Die Pole λ_i der meromorphen Funktion $G(\rho, \lambda)$ werden aus der Gl. (7) bestimmt.

Die Lösung der Gl. (2) wird in Anbetracht auf das Differenzzeichen

$$L^4 - \lambda^2 \left(L^4 = \frac{ka^4}{N}\right)$$

verschieden aussehen.

Für $L^4 > \lambda^2$ wird die Lösung der Gleichung aus dem Ausdruck (13) bestimmt, für $\lambda^2 > L^4$ aus (14).

Laut dieser Ausdrücke sind in § 4-a die Werte der Green'schen Funktion (15) gegeben für den Fall eines eingespannten Plattenrandes. Die Werte $K(0, 0, t)$ und $K'(0, 0, t)$ werden aus Gl. (16), (22) bestimmt für $L^4 > \lambda^2$ und aus Gl. (16'), (22') für $\lambda^2 > L^4$, die Durchbiegung $w(\rho, t)$ und $w(0, t)$ — laut (18) und (20).

Der Wert λ_i wird aus der Gl. (7') bestimmt.

Im Falle von grossдm u sind Ausdrücke für die Gl. (7') angeführt, die mit Hilfe von asymptotischen Reihen (23), (23') und $K'(0, 0, u)$ — (24), (24') erhalten wurden.

In § 4-a geben wir analogische Ausdrücke für den Fall einer Platte mit freiem Rande.

In § 5 ist ein Zahlenbeispiel gegeben für eine kreisförmige Platte mit $L^4 = 1000$ (30), für den Fall einer eingespannten Platte, sowie auch einer freien. In der Zahlentafel I sind die Werte λ_i für einige Beziehungen $\frac{Q}{P}$ (Q — das gesamte Plattengewicht) angeführt. Der Wert des dynamischen Koeffizienten für den Fall einer plötzlichen Lastwirkung ($v = 0$), der aus (20') berechnet ist, wurde für die genannten Randbedingungen in Zahlentafel III gezeigt.

In Zahlentafel V sind Werte w gegeben, die aus (20'') berechnet wurden für den Fall, wenn die statische Durchbiegung w_{st} im Vergleich zu $\frac{\pi}{4}\frac{v^2}{g}\frac{P}{Q}\lambda_i^2 K_0$ gering ist.

Die Resultate der Berechnungen zeigen, dass der Wert der dynamischen Durchbiegung für die gegebene Platte nur unbedeutend von den Randspannungsbedingungen abhängt.