А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. II, в. 2

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. II, № 2

1938

ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

Впервые трение качения изучалось Кулоном,[1] установившим экспериментально зависимость силы трения качения от силы давления катка на основание (грунт), по которому каток перемещается. Морен[2] в результате своих экспериментальных исследований дал для силы трения качения формулу:

$$F = \lambda \frac{Q}{R},$$

где F — сила трения качения, Q — сила давления катка на основание, R — радиус катка и λ — коэффициент, имеющий размерность длины, называемый коэффициентом трения качения.

Депюи[3] заметил, что коэффициент трения качения λ не является для данных материалов величиной постоянной и зависит от радиуса катка. На основании своих опытов он заключил, что

$$\lambda = c\sqrt{R},$$

и формула для силы трения качения приняла у него вид:

$$F = c\frac{Q}{\sqrt{R}}.$$

Осборн Рейнольдс[4] объяснил возникновение силы трения качения при качении абсолютно упругого катка по абсолютно упругому основанию относительным скольжением соприкасающихся поверхностей вследствие их деформации.

---

[1] Coulomb A., Théorie des machines simples. Paris, 1821.

[2] Morin A., Leçons de mécanique pratique. Paris, 1846.

[3] Depuit, Essai et expériences sur le tirage de voitures et sur le frottement de second espèce. Paris, 1867.

[4] Reynolds O., On Rolling Friction. Philos. Transact. of the Royal Soc. of London, Vol. 166 (1876), p. 155.

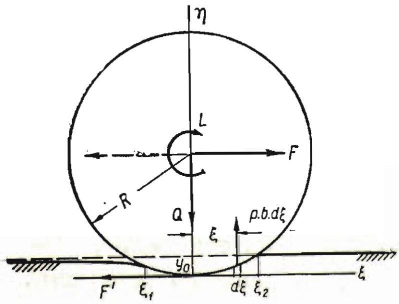
Фром[1] на основании теории Рейнольдса, сводившей изучение трения качения к изучению трения скольжения в соприкасающихся поверхностях решил задачу о подсчете силы трения при фрикционной передаче.

Трение при качении по не вполне упругим основаниям теоретически не изучалось.

Настоящая работа посвящена изучению двух задач трения качения: трение при качении абсолютно жесткого катка по релаксирующему грунту и трение при качении абсолютно жесткого катка по упруго-вязкому грунту.

Возникновение силы трения объясняется при этом несимметричным распределением сил давления катка на грунт по поверхности соприкосновения.

Законы, которым подчиняются напряжения и деформации в релаксирующем и упруго вязком грунтах, выбраны наиболее простыми. Математическая формулировка их аналогична известным законам релаксации и упруго вязкого течения, данным Максвеллом.[2]



Фиг. 1.

Пусть каток шириною b и радиусом R катится без скольжения с постоянной скоростью c по деформирующемуся грунту.

В этом случае все силы, действующие на каток, который примем абсолютно жестким, уравновесятся. Эти силы следующие (фиг. 1):

1. Силы, извне приложенные к катку (включая силу тяжести), которые будучи приведены к геометрическому центру катка дадут пару с моментом L, горизонтальную силу F и вертикальную силу Q (силу давления на грунт).

2. Сила сцепления грунта с катком F', удерживающая каток от скольжения и обусловленная главным образом трением первого рода поверхностей катка и грунта

3. Распределенные по поверхности соприкосновения катка с грунтом реакции грунта на каток. Удельное давление p, производимое этими силами, будем считать постоянным вдоль образующих цилиндрической поверхности катка и зависящим лишь от расстояния ξ до вертикальной плоскости, проходящей через ось катка. Поверхность соприкосновения катка с грунтом представляет часть цилиндрической поверхности, передний край которой удален от вертикальной плоскости, проходящей через ось катка на некоторое расстояние ξ_2 (начало соприкосновения катка с грунтом), а задний на расстояние ξ_1 ($\xi_1 < 0$, конец соприкосновения).

---

[1] Hans Fromm, Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech., Bd. 7, H. 1, Februar 1927.

[2] I. Clerk Maxwell, On the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions fo the R. Soc. of London, Vol. 157, Part I, 1867.

Условия равновесия сил, приложенных к катку, дадут:

$$F - F' = 0,$$

$$Q - \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$L + FR - \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, \xi\, d\xi = 0,$$

с малой погрешностью, происходящей за счет искривленности поверхности соприкосновения.

Для ведомого колеса момент $L = 0$, и последнее уравнение дает величину силы F, необходимой для поддержания постоянной скорости c движения катка:

$$F = \frac{1}{R} \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, \xi\, d\xi.$$

Сила F называется силой трения качения, а произведение $FR = M$ — моментом трения качения. Таким образом

$$M = \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, \xi\, d\xi.$$

Сила трения качения возникает вследствие смещения равнодействующей сил давления грунта на каток в сторону движения благодаря несимметрии поверхности соприкосновения ($\xi_2 > |\xi_1|$) и неравномерного распределения сил давления по этой поверхности. Это смещение λ может быть найдено из соотношения

$$FR = \lambda Q$$

и представляет собой плечо трения или коэффициент трения качения.

К ведущему катку приложен движущий момент L, а сила F, направленная в сторону, обратную движению катка (фиг. 1, пунктир), представляет собой сопротивление объекта, приводимого катком в движение.

Третье уравнение равновесия (равенство нулю суммы моментов всех сил относительно наинизшей точки катка) дает при этом:

$$L = FR + \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, \xi\, d\xi.$$

Здесь FR представляет момент полезного сопротивления, а

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} b\, p(\xi)\, \xi\, d\xi = M$$

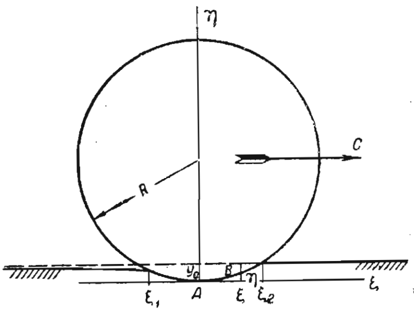
момент трения качения.

Для осуществления качения необходимо, чтобы имело место неравенство

$$F' = F < fQ,$$

где f — коэффициент трения скольжения поверхности катка по поверхности грунта.

При движении катка самая низшая его точка A опустится ниже поверхности недеформированного грунта на некоторую величину y_0, представляющую одновременно величину осадка грунта под осью катка (фиг. 2). Осадка в соседней точке B составит с точностью до малых четвертого порядка величину:



Фиг. 2.

$$y = y_0 - \frac{1}{2R}\xi^2,$$

ибо

$$\eta = R - \sqrt{R^2 - \xi^2} \approx \frac{1}{2R}\xi^2 \quad \text{и} \quad y = y_0 - \eta,$$

где ξ и η — координаты точки грунта B относительно подвижной системы координат $\xi\eta$, с началом в наинизшей точке катка и с вертикальной осью η. Так как эта система координат перемещается поступательно со скоростью c вправо вместе с катком, то абсцисса ξ с течением времени уменьшается и, очевидно,

$$\frac{d\xi}{dt} = -c.$$

Поэтому скорость оседания грунта в какой-либо точке B под катком составит величину:

$$\dot{y} = -\frac{1}{2R} 2\xi \frac{d\xi}{dt} = \frac{c}{R}\xi.$$

Заметим, что производную по времени от удельного давления p катка на грунт можно выразить через производную по абсциссе ξ соответствующей точки грунта. Действительно,

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -c\frac{dp}{d\xi}.$$

В начале соприкосновения катка с грунтом ($\xi = \xi_2 > 0$) осадка обращается в нуль (это будет следовать из законов, которым подчиняется грунт) и, следовательно,

$$0 = y_0 - \frac{1}{2R}\xi_2^2,$$

откуда

$$y_0 = \frac{1}{2R}\xi_2^2.$$

В конце соприкосновения ($\xi=\xi_1<0$) осадка, вообще говоря, не нуль, но удельное давление следует считать равным нулю, ибо грунт в этом месте отходит от катка. Таким образом

$$p(\xi_1)=0, \quad (\xi_1<0).$$

Что касается удельного давления в начале, то оно может быть и равно нулю и отлично от нуля в зависимости от того, какому закону подчиняется грунт.

Релаксирующим грунтом будем называть грунт, подчиняющийся закону

$$p=Ky+\mu\dot{y},$$

где K и μ — физические константы грунта. Константу K (размерность кг/см^3) назовем коэффициентом жесткости грунта, а μ (размерность кг. сек/см^3) — коэффициентом внутреннего трения. Площадка такого грунта, нагруженная постоянным давлением p_1, опускается вниз. При этом из дифференциального уравнения

$$\mu\dot{y}+Ky=p_1$$

следует:

$$y=Ce^{-\frac{K}{\mu}t}+\frac{1}{K}p_1,$$

и при любых начальных данных осадка с течением времени стремится к величине $y_1=\frac{1}{K}p_1$. Если нагрузку p_1 снять, то имеем:

$$y=Ce^{-\frac{K}{\mu}t}$$

и через каждый интервал времени $T=\frac{\mu}{K}$, называемый периодом релаксации, осадка уменьшается в $e=2.7181\ldots$ раз.

Таким образом этот грунт ведет себя аналогично абсолютно упругому основанию теории балок,[1] если рассматривать достаточно большие промежутки времени действия нагрузок. Возможность излома и разрыва поверхности при кусочно непрерывной нагрузке p_1 грунта, следующая из равенства

$$y_1=\frac{1}{K}p_1,$$

представляет определенный недостаток принятого закона грунта, который может быть в дальнейшем устранен так же, как это было сделано в теории балок Вигардом,[2] введением соответствующих функций влияний осадки одной

[1] По гипотезе Zimmermann $y=\frac{1}{\beta}p$, где β — коэффициент оседания грунта. См., например, Геккелер И. В. Статика упругого тела, стр. 73, 1934.

[2] K. Wieghardt, Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech., Bd. 2, 1922.

точки грунта на осадку в других точках и сведением задачи к интегральным уравнениям. Здесь же ограничимся простейшим законом, приведенным выше.

При качении с постоянной скоростью абсолютно жесткого катка по релаксирующему грунту удельное давление будет распределяться по поверхности соприкосновения согласно предыдущему следующим образом:

$$p = Ky + \mu\dot{y} = K\left(y_0 - \frac{1}{2R}\xi^2\right) + \mu\frac{c}{R}\xi.$$

Сила давления катка на грунт будет равна:

$$Q = \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\,p(\xi)\,d\xi = b\left\{K\left(y_0\xi_2 - \frac{1}{2R}\frac{1}{3}\xi_2^3\right) - K\left(y_0\xi_1 - \frac{1}{2R}\frac{1}{3}\xi_1^3\right) + \right.$$
$$\left. + \mu\frac{c}{R}\frac{1}{2}\left(\xi_2^2 - \xi_1^2\right)\right\},$$

а момент трения:

$$M = \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\,p(\xi)\,\xi\,d\xi = b\left\{K\left(y_0\frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{2R}\frac{1}{4}\xi_2^4\right) - K\left(y_0\frac{1}{2}\xi_1^2 - \frac{1}{2R}\frac{1}{4}\xi_1^4\right) + \right.$$
$$\left. + \mu\frac{c}{R}\frac{1}{3}\left(\xi_2^3 - \xi_1^3\right)\right\}.$$

Если учесть, что

$$0 = y_0 - \frac{1}{2R}\xi_2^2 \quad \text{и} \quad 0 = p(\xi_1) = K\left(y_0 - \frac{1}{2R}\xi_1^2\right) + \mu\frac{c}{R}\xi_1,$$

то выражения для Q и M могут быть упрощены исключением y_0; именно:

$$Q = b\left\{\frac{K}{R}\frac{1}{3}(\xi_2^3 - \xi_1^3) + \frac{\mu c}{R}\frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2)\right\}$$

и

$$M = b\left\{\frac{K}{R}\frac{1}{8}(\xi_2^4 - \xi_1^4) + \frac{\mu c}{R}\frac{1}{6}(2\xi_2^3 + \xi_1^3)\right\},$$

причем величины ξ_1 и ξ_2 оказываются связанными соотношением:

$$0 = K(\xi_2^2 - \xi_1^2) + 2\mu c\xi_1.$$

Если ввести для удобства дальнейших расчетов отвлеченные величины

$$u = \frac{1}{R}\xi_1 \quad (u < 0) \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{R}\xi_2 \quad (v > 0),$$

то три последние соотношения примут вид:

$$\frac{Q}{bKR^2} = q = \frac{1}{3}(v^3 - u^3) + \frac{1}{4}\alpha(v^2 + u^2),$$
$$\frac{M}{bKR^2} = m = \frac{1}{8}(v^4 - u^4) + \frac{1}{12}\alpha(2v^3 + u^3),$$
$$0 = v^2 - u^2 + \alpha u,$$

где q, m и $\alpha = \frac{2\mu c}{KR}$ — безразмерные величины.

Эти три соотношения решают задачу об определении силы трения качения. Действительно, исключив из первых двух соотношений посредством третьего величину v, получим:

$$\frac{Q}{bKR^2}=q=\frac{4}{3}[(u^2-\alpha u)^{3/2}-u^3]+\frac{\alpha}{4}(2u^2-\alpha u),$$
$$\frac{M}{bKR^3}=m=\frac{1}{8}[(u^2-\alpha u)^2-u^4]+\frac{\alpha}{12}[2(u^2-\alpha u)^{3/2}+u^3],$$

и теперь по данным Q, b, K, R, μ, а следовательно, и $\alpha=\frac{2\mu c}{KR}$ из первого соотношения определим величину u и, подставив ее значение во второе соотношение, получим величину момента трения качения и затем силу трения качения:

$$F=\frac{1}{R}M\cdot$$

Приведем числовой пример. Пусть каток радиуса $R=50$ см, ширины $b=5$ см, нагруженной силой $Q=250$ кг, катится со скоростью $c=2.5$ см/сек по релаксирующему грунту с константами $K=5$ кг/см^3 и $\mu=50$ кг/сек см^3 $\left(\text{период релаксации такого грунта } T=\frac{\mu}{K}=10 \text{ сек.}\right)$. Величина q при этом будет равна 0.004, а $\alpha=1$.

Из уравнения

$$0.004=\frac{1}{3}[(u^2-1\cdot u)^{3/2}]+\frac{1}{4}\cdot 1\,(2u^2-1\cdot u)$$

находится величина $u=0.0135$, после чего m оказывается равным 0.000290, а в момент трения

$$M=mbK^2R^2=902 \text{ кг/см},$$

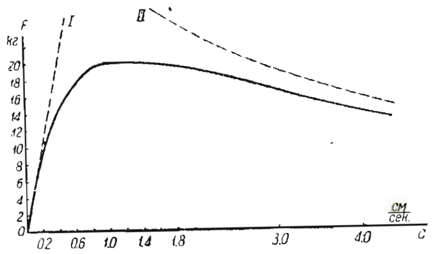
что соответствует силе трения $F=18.04$ кг. и плечу трения

$$\lambda=\frac{FR}{Q}=3.6 \text{ см.}$$

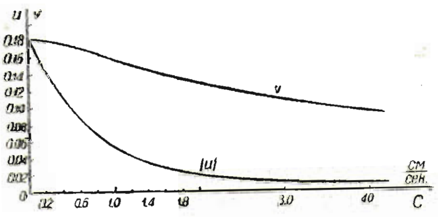
$c\,\frac{\text{см}}{\text{сек}}$	F кг	u	v
0.00	0.00	— 0.1817	0.1817
0.10	5.17	— 0.1623	0.1812
0.25	10.78	— 0.1357	0.1788
0.75	19.18	— 0.0734	0.1656
1.00	20.10	— 0.0538	0.1565
1.25	20.30	— 0.0403	0.1476
1.50	20.00	— 0.0310	0.1398
2.00	19.17	— 0.0198	0.1273
2.50	18.04	— 0.0135	0.1170
10.00	10.68	— 0.0010	0.0632
40.00	5.14	— 0.0001	0.0316
160.00	2.62	— 0.0000	0.0158

При этом, так как
$$v=(u^2-\alpha u)^{1/2}=0.1170,$$
то границы поверхности соприкосновения определятся значениями ξ:
$$\xi_1=Ru=-0.67 \text{ см} \quad \text{и} \quad \xi_2=Rv=5.85 \text{ см},$$
и осадка грунта под центром катка
$$y_0=\frac{1}{2R}\xi_2^2=0.34 \text{ см}.$$

В таблице приведены значения силы трения качения для данного числового примера при других значениях скорости c, а на фиг. 3 изображен график



Фиг. 3.



Фиг. 4.

построенный на основании этой таблицы. Сила трения, равная нулю, при скорости, равной нулю, возрастает в данном случае до значения 20.3 кг при $c=1.25$ см/сек, а затем, при дальнейшем повышении скорости, асимптотически падает к нулю. На фиг. 4 изображен график изменения величин u и v в зависимости от скорости движения катка c; они асимптотически стремятся к нулю при возрастании скорости, причем особенно быстро стремится к нулю величина u.

Если скорость движения катка столь мала, что величина $\alpha=\frac{2\mu c}{KR}$ оказывается во много раз меньше величин $|u|$ и v, то с точностью до малых высших порядков получим:
$$q=\frac{1}{3}\left[(u^2-\alpha u)^{3/2}-u^3\right]+\frac{\alpha}{4}(2u^2-\alpha u)\simeq\frac{1}{3}\left[(u^2)^{3/2}+|u|^3\right]=\frac{2}{3}|u|^3,$$
$$m=\frac{1}{8}\left[(u^2-\alpha u)^2-u^4\right]+\frac{\alpha}{12}\left[2(u^2-\alpha u)^{3/2}+u^3\right]\simeq\frac{1}{8}(-2\alpha u^3)+\frac{\alpha}{12}|u|^3=\frac{\alpha}{3}|u|^3$$
и исключая $|m|$:
$$m=\frac{1}{2}\alpha q \quad \text{или} \quad \frac{M}{bKR^3}=\frac{\mu c}{KR}\frac{Q}{bKR^2},$$
откуда
$$M=\frac{\mu c}{K}Q \quad \text{и} \quad F=\frac{\mu c}{KR}Q.$$

Эта формула, справедливая при достаточно малых скоростях, имеет структуру формулы Морена. Для абсолютно упругого грунта ($\mu=0$) и для абсолютно жесткого ($K=\infty$) сила трения качения обращается на основании этой формулы в нуль. При малых скоростях сила трения качения по релаксирующему грунту пропорциональна скорости, не зависит от ширины катка и обратна пропорциональна его радиусу.

Если скорость движения катка столь велика, что, обратно, величины $|u|$ и v оказываются во много раз меньше α, то, сохраняя в выражениях для q и m лишь члены с высшими степенями α, получим:

$$q=\frac{1}{3}\left[(u^2-\alpha u)^{3/2}-u^3\right]+\frac{\alpha}{4}(2u^2-\alpha u)\simeq\frac{\alpha}{4}(-\alpha u),$$

$$m=\frac{1}{8}\left[(u^2-\alpha u)^2-u^4\right]+\frac{\alpha}{12}\left[2(u^2-\alpha u)^{3/2}+u^3\right]\simeq\frac{\alpha}{6}(-\alpha u)^{3/2}\quad(u<0),$$

и, если исключить величину u, то

$$m=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{\alpha}q^3},$$

откуда, подставив

$$m=\frac{M}{bKR^3},\quad q=\frac{Q}{bKR^2},\quad \alpha=\frac{2\mu c}{KR},$$

получим $M=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{Q^3R}{2\mu cb}}$ и, следовательно, для силы трения качения выражение

$$F=\frac{4}{3\sqrt{2}}\frac{Q^{3/2}}{\sqrt{\mu cbR}}.$$

Эта формула, справедливая при достаточно больших скоростях движения катка, показывает падение силы трения качения при увеличении скорости катка и его ширины. Квадратный корень из радиуса, стоящий в знаменателе полученной формулы, сближает ее с экспериментальной формулой Депюи. Как любопытную особенность следует отметить независимость силы трения качения от коэффициента жесткости релаксирующего грунта при достаточно больших скоростях. Это объясняется малым значением осадки грунта под быстро перемещающимся катком, вследствие чего член Ky, стоящий в выражении закона релаксирующего грунта

$$p=Ky+\mu\dot{y},$$

становится малым по сравнению с $\mu\dot{y}$.

На фиг. 3 пунктирными линиями изображены графики зависимостей силы трения качения от скорости согласно полученным приближенным формулам

$$F=\frac{\mu c}{K}\frac{Q}{R}\quad\text{(пунктир 1)}\quad\text{и}\quad F=\frac{4}{3\sqrt{2}}\frac{Q^{3/2}}{\sqrt{\mu cbR}}\quad\text{(пунктир 2)}$$

для приведенного выше числового примера.

Обе приближенные формулы дают одно и то же значение

$$F_1=\sqrt[3]{\frac{8}{9}\frac{Q^4}{KR^2b}}$$

при значении скорости c, равной

$$c_1 = \frac{2}{\mu}\sqrt[3]{\frac{QRK^2}{b}}.$$

Вблизи этого значения скорости обе формулы, конечно, неверны, и для подсчета силы трения следует обратиться к исходным соотношениям. Тем не менее значения F_1 и c_1 могут служить для оценки порядка числового значения максимальной силы трения качения и скорости, при которой сила максимальна. Для приведенного числового примера имеем:

$$F_1 = 40.8 \text{ кг} \quad \text{и} \quad c = 0.762 \text{ см/сек.}$$

При значении скорости c, равной нулю, исходные соотношения

$$Q = b\left\{\frac{K}{R}\frac{1}{3}(\xi_2^3 - \xi_1^3) + \frac{\mu c}{R}\frac{1}{2}(\xi_2^2 + \xi_1^2)\right\},$$

$$0 = K(\xi_2^2 - \xi_1^2) + 2\mu c\xi_1$$

дают:

$$|\xi_1| = \xi_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{QR}{bK}},$$

что представляет половину длины поверхности смятия под достаточно долго стоявшим на одном месте катком.

Так как

$$y_0 = \frac{1}{2R}\xi_2^2,$$

то осадка релаксирующего грунта под осью катка составит величину:

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{16}\frac{Q^2}{b^2K^2R}}.$$

Выражения, полученные для ξ_2 и y_0, весьма сходны с формулами Гертца для смятия двух соприкасающихся тел.[1]

Обратимся теперь к упруго-вязкому грунту. Таким грунтом будем называть грунт, подчиняющийся закону

$$\dot{y} = k\dot{p} + \nu p,$$

где k и ν — физические константы грунта. Константу k назовем коэффициентом упругости грунта, а ν — коэффициентом текучести.

Площадка поверхности упруго-вязкого грунта, нагруженная постоянным давлением p_0, опускается вниз с постоянной скоростью

$$\dot{y}_0 = \nu p_0.$$

---

[1] См., например, А. и Л. Феппль, Сила и деформация, ч. II, стр. 229, Москва, 1936.

Если же площадку нагружать в течение весьма короткого времени τ до удельного давления p_1, то величина осадка y_1 площадки к концу этого промежутка времени может быть оценена интегрированием соотношения

$$\dot{y} = k\dot{p} + \nu p$$

в пределах от 0 до τ. Так как $y = 0$, $p = 0$ при $t = 0$, то

$$y_1 = kp_1 + \int_0^\tau \nu p\, dt.$$

При малом значении коэффициента текучести ν интегралом, стоящим в правой части равенства, можно пренебречь, ибо он менее величины $\nu p_1 \tau$. Поэтому при быстро меняющихся нагрузках

$$y \approx kp,$$

т. е. грунт ведет себя аналогично упругому основанию теории балок.[1] Одномерный характер закона упруго-вязкого грунта ведет к тем же недостаткам описания явлений, что и закон релаксирующего грунта.

Если каток катится по упруго-вязкому грунту, то согласно предыдущему следует положить:

$$\dot{y} = \frac{c}{R}\xi \quad \text{и} \quad \dot{p} = -c\frac{dp}{d\xi}.$$

Подставив эти выражения в исходное соотношение, получим:

$$\frac{c}{R}\xi = -ck\frac{dp}{d\xi} + \nu p,$$

т. е. однородное линейное дифференциальное уравнение, интегрируя которое, имеем:

$$p = Ce^{\frac{\nu}{ck}\xi} + \frac{c}{R\nu}\xi + \frac{c^2 k}{\nu^2 R},$$

где C — константа, определяемая из начального условия

$$p(\xi_2) = 0,$$

ибо при $\xi = \xi_2$ осадка грунта равна нулю и грунт лишь начинает деформироваться под катком.

Так как при $\xi = \xi_1$ в месте отхода грунта от катка давление также обращается в нуль, то имеем:

$$0 = Ce^{\frac{\nu}{ck}\xi_1} + \frac{c}{\nu R}\xi_1 + \frac{c^2 k}{\nu^2 R} \qquad (\xi_1 < 0),$$

$$0 = Ce^{\frac{\nu}{ck}\xi_2} + \frac{c}{\nu R}\xi_2 + \frac{c^2 k}{\nu^2 R} \qquad (\xi_2 > 0),$$

[1] См. примечание на стр. 249.

два соотношения, связывающие три неизвестные величины: C, ξ_1 и ξ_2. Сила давления на каток составит величину:

$$Q = \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\,p(\xi)\,d\xi = b\left\{C\frac{ck}{\nu}\left(e^{\frac{\nu}{ck}\xi_2} - e^{\frac{\nu}{ck}\xi_1}\right) + \frac{c}{\nu R}\frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{c^2 k}{\nu^2 R}(\xi_2 - \xi_1)\right\},$$

а момент трения

$$M = \int_{\xi_1}^{\xi_2} b\,p(\xi)\,\xi\,d\xi = b\left\{C\frac{ck}{\nu}\left(\xi_2 e^{\frac{\nu}{ck}\xi_2} - \xi_1 e^{\frac{\nu}{ck}\xi_1}\right) - \right.$$

$$\left. - C\frac{c^2 k^2}{\nu^2}\left(e^{\frac{\nu}{ck}\xi_2} - e^{\frac{\nu}{ck}\xi_1}\right) + \frac{c}{\nu R}\frac{1}{3}(\xi_2^3 - \xi_1^3) + \frac{c^2 k}{\nu^2 R}\frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2)\right\}.$$

Выражения для величин Q и M могут быть упрощены, если исключить из них константу C посредством двух предыдущих соотношений. Именно:

$$Q = b\,\frac{c}{\nu R}\,\frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2),$$

$$M = b\,\frac{c}{\nu R}\left[\frac{1}{3}(\xi_2^3 - \xi_1^3) - \frac{ck}{\nu}\,\frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2)\right].$$

Если теперь ввести безразмерную величину x, связанную с ξ равенством

$$\xi = \frac{ck}{\nu}x,$$

то получим:

$$0 = Ae^{x_1} + x_1 + 1 \qquad \left(x_1 = \frac{\nu}{ck}\xi_1 < 0\right),$$

$$0 = Ae^{x_2} + x_2 + 1 \qquad \left(x_2 = \frac{\nu}{ck}\xi_2 > 0\right),$$

$$Q\frac{\nu^3 R}{c^3 k^2 b} = q = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

$$M\frac{\nu^4 R}{c^4 k^3 b} = m = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

где $A = C\frac{\nu^2 R}{c^3 k}$, а q и m — безразмерные величины, пропорциональные силе давления Q и моменту трения M.

Легко видеть, что полученные четыре соотношения решают задачу о нахождении силы трения при качении абсолютно жесткого катка по упруго-вязкому основанию. Действительно, первые два соотношения исключением константы A дают величину x_1 в виде функции x_2, после чего и величины q и m оказываются функциями одного параметра x_2, исключая который, получим:

$$m = f(q) \quad \text{или} \quad M = FR = \frac{c^4 k^3}{\nu^4 R}\,b\,f\left(\frac{\nu^3 R}{c^3 k^2 b}Q\right).$$

Величины x_1, x_2, q и m оказываются при малом коэффициенте текучести ν и достаточно большой скорости движения весьма малыми, поэтому искомую функциональную зависимость $m = f(q)$ можно найти, оперируя разложением величин x_1, q и m в ряд по степеням x_2; однако эта задача оказывается столь тонкой, что требуется удержание малых величин высоких порядков.

Исключая константу A из первых соотношений, получим:

$$(1 + x_1)\, e^{-x_1} = (1 + x_2)\, e^{-x^2},$$

или с точностью до малых шестого порядка:

$$(1 + x_1)\left(1 - x_1 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^5}{120}\right) = (1 + x_2)\left(1 - x_2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6} + \frac{x_2^4}{24} - \frac{x_2^5}{120}\right),$$

откуда

$$-\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{3}(x_1^3 - x_2^3) - \frac{1}{8}(x_1^4 - x_2^4) + \frac{1}{30}(x_1^5 - x_2^5) = 0.$$

Получившееся равенство можно рассматривать как уравнение для определения величины x_1. Отбрасывая тривиальный корень $x_1 = x_2$, который, конечно, не подходит, ибо $x_2 > 0$ и $x_1 < 0$, можно получить первое приближение для величины x_1, пренебрегая величинами четвертого и пятого порядков малости. Именно

$$-\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

или

$$x_1^2 + \left(\frac{3}{2} - x_2\right) x_1 - \frac{3}{2} x_2 + x_2^2 = 0$$

и

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2} - x_2 \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 3x_2 - 3x_2^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2} + x_1 \pm \left(\frac{3}{2} - x_2 - \frac{4}{3} x_2^2\right)\right\}.$$

Решению задачи соответствует малое значение x_1, поэтому из двух возможных знаков в решении квадратного уравнения следует взять знак минус. Итак, с точностью до малых второго порядка

$$x_1 = -x_2 + \frac{2}{3} x_2^2.$$

Для получения величины x_1 с точностью до малых четвертого порядка положим:

$$x_1 = -x_2 + \frac{2}{3} x_2^2 + \alpha x_2^3 + \beta x_2^4$$

и подставим это выражение в исходное уравнение для x_1. Оно удовлетворится с точностью до малых шестого порядка, если взять

$$\alpha = -\frac{4}{9} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{44}{135}.$$

Таким образом получаем:

$$x_1 = -x_2 + \frac{3}{2} x_2^2 - \frac{4}{9} x_2^3 + \frac{44}{135} x_2^4$$

и, если подставить значение x_1 в выражения для величин q и m, то

$$q=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{2}{3}x_2^3+\ldots,$$

$$m=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)-\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{4}{15}x_2^5+\ldots,$$

где выписаны лишь первые члены разложения. Ограничиваясь ими и исключая x_2, имеем:

$$m=\frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\,q^{5/3}$$

или

$$M\frac{\nu^4 R}{c^4 k^3 b}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\left[Q\frac{\nu^3 R}{c^3 k^2 b}\right]^{5/3},$$

откуда момент трения равен:

$$M=\frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\,\frac{\nu}{c}\sqrt[3]{\frac{R^2}{kb^2}}\,Q^{5/3}$$

и сила трения качения:

$$F=\frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\,\frac{\nu}{c}\,\frac{Q^{5/3}}{\sqrt[3]{kb^2 R}}.$$

Таким образом сила трения при качении абсолютно жесткого катка по упруго-вязкому основанию оказывается прямо пропорциональной коэффициенту текучести ν и обратно пропорциональной скорости движения катка c. Сила трения качения уменьшается при увеличении радиуса катка R и его ширины b.

Приведем числовой пример. Пусть каток радиуса $R=50$ см, ширины $b=5$ см, нагруженный силой $Q=250$ кг, катится со скоростью $c=100$ см/сек по упруго-вязкому грунту с физическими константами $k=0.1$ см^3/кг и $\nu=0.1$ см^3/кг сек. Груз весом в 1 кг, опирающийся на такой грунт поверхностью в 1 см^2, опускается со скоростью $\nu p=0.1$ см/сек, а величина упругой осадки будет $kp=0.1$ см.

Силу трения определим по найденной формуле:

$$F=\frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\,\frac{\nu}{c}\,\frac{Q^{5/3}}{\sqrt[3]{kRb^2}}=1.04 \text{ кг},$$

при этом плечо трения λ окажется равным:

$$\lambda=\frac{FR}{Q}=0.208 \text{ см}.$$

Для безразмерной величины q получим значение:

$$q=\frac{\nu^3 R}{c^3 k^2 b}Q=0.000250,$$

а так как $q=\frac{2}{3}x_2^3$, то

$$x_2=0.0721 \quad \text{и} \quad x_1=-x_2+\frac{2}{3}x_2^2-\frac{4}{9}x_2^3+\ldots=-0.0686$$

и границы поверхности соприкосновения катка с грунтом определяются значениями ξ:

$$\xi_1 = \frac{ck}{\nu} x_1 = -6.86 \text{ см} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{ck}{\nu} x_2 = 7.21 \text{ см.}$$

Осадка грунта под катком будет:

$$y_0 = \frac{1}{2R} \xi_2{}^2 = 0.52 \text{ см.}$$

Поступила в редакцию 10 I 1938.

FROTTEMENT DE ROULEMENT

A. I. ICHLINSKY

(Moscou)

(Résumé)

L'ouvrage contient l'analyse du frottement de roulement d'un cylindre solide sur un fondement plastique, dont les propriétés sont définies par les équations

$$p = Ky + \mu\dot{y} \qquad \text{(cas premier)}$$
$$\dot{y} = k\dot{p} + \nu p \qquad \text{(cas second).}$$

Ici: p — pression (kg/cm^2), y — dénivellation du fondement, K, μ, k, ν — constantes physiques.

Le cas premier correspond a un fondement élastique „avec relactions“ et le cas second — a un fondement élastique „visqueux“.

Pour le mouvement uniforme du cylindre ont lieu les équations:

$$F = F'$$

$$Q = \int_{\xi_1}^{\xi_2} bp(\xi)\, d\xi,$$

$$FR = \int_{\xi_1}^{\xi_2} bp(\xi)\xi\, d\xi, \quad \dot{y} = \frac{c}{R}\xi, \quad \dot{p} = -c\frac{dp}{d\xi}.$$

Ici: F — la force motrice du cylindre, F — la résultante des forces tangentées aux points de contact, Q — le poids du cylindre, ξ_1 et ξ_2 — les frontières de contact de surface du cylindre avec le fondement, R — le rayon du cylindre, b — longueur du cylindre, c — la vitesse du centre du cylindre.

On trouve la force du frottement F dans le cas premier en résolvant des équations:

$$\frac{Q}{bKR^2} = \frac{1}{3}[(u^2 - \alpha u)^{3/2} - u^3] + \frac{\alpha}{4}(2u^2 - \alpha u),$$

$$\frac{M}{bKR^3} = \frac{1}{8}[(u^2 - \alpha u)^2 - u^4] + \frac{\alpha}{12}[2(u^2 - \alpha u)^{3/2} + u^3].$$

ou

$$M = F \cdot R, \quad \alpha = \frac{2\mu c}{KR}, \quad u = \frac{1}{R}\xi_1 < 0.$$

Pour les vitesses suffisamment petites une formule approximative a lieu:

$$F = \frac{\mu c}{KR} Q,$$

et pour les vitesses suffisamment grandes

$$F = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{Q^{3/2}}{\sqrt{\mu c b R}}.$$

On trouve que F est une fonction de la vitesse ayant un maximum et s'annulant pour les vitesses 0 et ∞.

Dans le cas second on trouve la valeur de F en résolvant les équations:

$$0 = Ae^{x_1} + x_1 + 1 \left(x_1 = \frac{\nu}{ck}\xi_1 < 0\right),$$

$$0 = Ae^{x_2} + x_2 + 1 \left(x_2 = \frac{\nu}{ck}\xi_2 > 0\right),$$

$$Q \frac{\nu^4 R}{c^3 k^2 b} = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

$$M \frac{\nu^4 R}{c^4 k^3 b} = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Pour une vitesse assez grande une formule approximative a lieu:

$$F = \frac{1}{5}\sqrt[3]{18}\,\frac{\nu}{c}\,\frac{Q^{5/3}}{\sqrt[3]{kb^2 R}}.$$