

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРИТОКА ВОДЫ К ОСУШИТЕЛЬНЫМ КАНАЛАМ

М. И. БАЗАНОВ

(Ленинград)

Настоящая работа представляет продолжение работы покойного акад. Н. Н. Павловского по применению комплексов Жуковского и Кирхгоффа к решению задач по исследованию различных случаев безнапорной фильтрации. Этим вопросом покойный Н. Н. Павловский начал впервые заниматься в начале 1932 г., и в декабре того же года в Ленинградском доме техники им был сделан доклад об общих основах гидромеханического метода решения задач по безнапорному движению фильтрационных потоков из открытых русел с применением комплекса Жуковского.

В мае 1933 г. он сделал доклад в технической группе Академии Наук СССР, в котором показал общие принципы решения задач по безнапорному движению с применением комплекса Кирхгоффа.

В последующий же период своей деятельности покойный Н. Н. Павловский на ряду с другими вопросами занимался исследованием различных конкретных случаев фильтрации, применяя комплексы Жуковского и Кирхгоффа.

При жизни он успел рассмотреть случаи: „Свободная фильтрация из открытых русел криволинейного очертания“, „Фильтрация из прямоугольных русел“, „Фильтрация через земляные плотины на непроницаемом основании“, „Приток к горизонтальным фильтрам“ и некоторые другие.

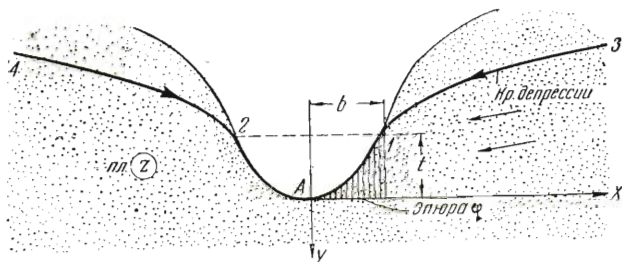
В XIX томе „Известий Ленинградского научно-исследовательского института гидротехники“ напечатаны две его статьи, в которых, кроме общих методов решения фильтрационных задач с применением комплекса Жуковского, приводится исследование фильтрации из открытых русел криволинейного очертания, а также приближенное рассмотрение фильтрации из русел трапециoidalного профиля при помощи его метода фрагментации.

В XX томе „Известий Ленинградского научно-исследовательского института гидротехники“ напечатана его статья о применении комплекса Кирхгоффа, где рассматривается ряд конкретных случаев фильтрации. Его работы „О фильтрации через прямоугольные массивы“, а также „О фильтрации через земляные плотины на непроницаемом основании“ заканчиваются его сотрудниками и в ближайшем будущем также могут быть напечатаны.

Настоящая работа представляет один из возможных случаев применения комплексов Жуковского и Кирхгоффа к решению задач о безнапорной фильтрации; она выполнена мною по заданию покойного Н. Н. Павловского, которым были получены, в последние дни своей жизни, основные изображающие зависимости (7) и (8) положенные в основу настоящей работы.

1. Постановка задачи и вывод основных зависимостей

В данной работе рассматривается приток грунтовых вод к руслу, лишенному сколько-нибудь заметного слоя воды, так что граница русла является поверхностью высачивания грунтовой воды в воздух, причем поверхность не является эквипотенциальной (в отличие от наполненных водою русел), а имеет пере-



Фиг. 1.

менное значение потенциала скорости $\varphi = kh$, меняющееся от 0 до значения выходной глубины фильтрационного потока на откосе канала t ; эпюра изменения потенциальной функции φ по смоченной поверхности русла показана на фиг. 1.

Решение задачи проводится в приведенных усло-

виях при значении коэффициента фильтрации $k=1$, так что для перехода от приведенных величин к действительным необходимо первые умножать на величину коэффициента фильтрации k . Так, например, в действительных условиях

$$\varphi_a = k\varphi, \quad \psi_a = k\psi, \quad q_a = kq,$$

где φ , ψ и q — приведенные значения потенциальной функции, функции тока и расхода.

Далее необходимо отметить, что задача решается не прямым методом, а обратным, т. е. на „смоченной“ поверхности принимается изменение величины

$$\zeta = \frac{1}{u_x - iu_y}$$

(где u_x и u_y — компоненты скорости фильтрации, плоскость ζ — плоскость Кирхгоффа; фиг. 3) по закону окружности; в результате этого форма русла получается криволинейной и зависит лишь от величины радиуса окружности на плоскости Кирхгоффа ρ (фиг. 3).

Как показали приводимые ниже расчеты, наиболее близкие к практическим (трапециoidalным) формы русел получаются при значениях параметра $1.5 < \rho < 2.5$ (см. чертежи форм русел для пяти рассмотренных в данной работе случаев, приводимые в конце работы); случаи $\rho < 1$ невозможны.

При выводе основных зависимостей введем в рассмотрение функцию комплексного переменного:

$$\Omega = \omega + iz, \tag{1}$$

где ω — характеристическая функция.

Функция Ω впервые была введена Жуковским, и поэтому мы называем ее комплексом Жуковского. При отделении вещественной и мнимой части в выражении (1) получим:

$$\Phi = \varphi - y, \tag{2a}$$

$$\Psi = \psi + x, \tag{2b}$$

так как как вдоль свободной, так и вдоль смоченной поверхности $\varphi = y$, то, как видно из (2a), контуру области движения отвечает на плоскости Ω вертикальная прямая $\Phi = 0$, внутри же области $y > \varphi$, и, следовательно, область движения располагается влево от указанной прямой (фиг. 2).

При помощи комплекса Жуковского (1), как нетрудно в этом убедиться, область фильтрационного потока на плоскости z преобразовывается в полуплоскость Ω (фиг. 2). Точки 3 и 4 на плоскости Ω лежат в бесконечности, положение же точек 1 и 2 на этой плоскости определяем из (2b), именно, для точки 1, обозначая длину отрезка $A-1$ через Δ , будем иметь:

$$\Delta = q + b;$$

для точки 2 получим:

$$-\Delta = -(q + b),$$

где q — „приведенный“ полурасход фильтрации, b — полуширина русла по верху.

Далее, введя известное понятие комплекса Кирхгоффа

$$\zeta = \frac{dz}{d\omega},$$

где $\omega = \varphi + i\psi$ — характеристическая функция, мы можем написать следующее:

$$\zeta = \frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{\frac{d\omega}{dz}},$$

но

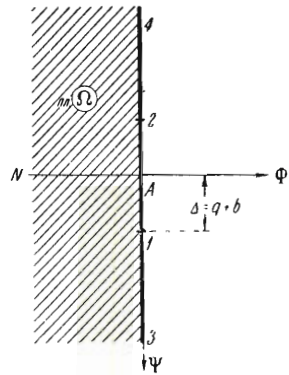
$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

а так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (x + iy)}{\partial x} = 1,$$

то

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial (\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - iu_y,$$



Фиг. 2.

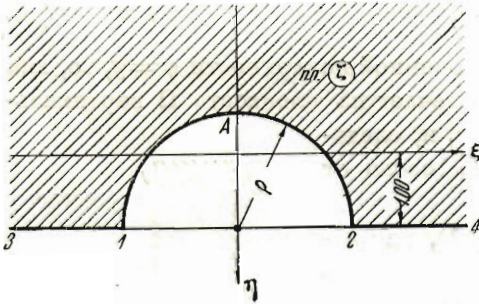
так как из теории движения жидкости с потенциалом скоростей для случая плоской задачи известно, что

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Итак, мы получили, что координата плоскости Кирхгоффа ζ выражается через комплексы z и ω , с одной стороны, и компоненты скоростей фильтрации — с другой, следующим образом:

$$\zeta = \frac{1}{u_x - iu_y}, \quad (3a)$$

$$\zeta = \frac{dz}{d\omega}. \quad (3b)$$



Фиг. 3.

Для выяснения некоторых свойств плоскости Кирхгоффа ζ преобразуем выражение (3a): обозначая буквою ϑ угол, составленный скоростью с осью x , можем написать:

$$\zeta = \frac{1}{u_x - iu_y} = \frac{1}{|U| \cdot (\cos \vartheta - i \sin \vartheta)} = \frac{1}{|U|} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \quad (4)$$

На основании формулы (4) можно сказать, что длина вектора, проведенного из начала координат на плоскости Кирхгоффа, равна величине, обратной модулю скорости, т. е.

$$|\zeta| = \frac{1}{|U|};$$

направление же вектора на плоскости Кирхгоффа совпадает с направлением скорости фильтрации U .

Очертание области ζ (фиг. 3) легко объясняется из следующих соображений.

Как уже отмечалось, $\zeta = \frac{dz}{d\omega}$; преобразуя это выражение так же, как преобразовывалось выражение $\frac{d\omega}{dz}$, получим:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

С другой стороны, так как на свободной поверхности

$$\Phi = \varphi - y$$

(фиг. 2), то $\varphi = y$, откуда видно, что мнимая часть

$$J(\zeta) = 1$$

и, следовательно, на плоскости ζ свободная поверхность должна располагаться на расстоянии, равном единице от вещественной оси ξ , и быть параллельной ей, что и имеется (фиг. 3). (Мнимую ось мы везде направляем книзу, считая в связи с этим положительный отсчет углов по часовой стрелке.)

Далее, как уже было сказано выше, мы задаемся круговой основой на плоскости ζ и форму русла получаем как функцию радиуса заданной окружности на плоскости Кирхгоффа ρ .

Имея в виду, что

$$\Omega = \omega + iz, \tag{5a}$$

$$\zeta = \frac{dz}{d\omega}, \tag{5b}$$

продифференцируем Ω один раз по z :

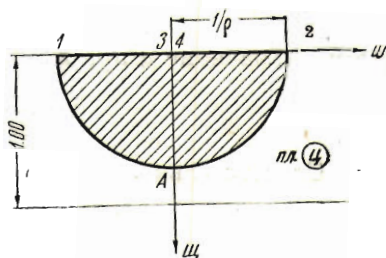
$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d\omega}{dz} + i, \tag{6}$$

но, имея в виду (5b), вместо (6) будем иметь:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{\zeta} + i, \text{ или } dz = \frac{\zeta d\Omega}{1 + i\zeta},$$

откуда

$$z = \int \frac{\zeta d\Omega}{1 + i\zeta} + C. \tag{7}$$



Фиг. 4.

Далее, выполняя элементарные конформные преобразования, получим изображающую функцию $\Omega = f(\zeta)$ в следующем виде:

$$\Omega = \frac{\Delta}{2i} \left(\frac{\zeta - i}{\rho} + \frac{\rho}{\zeta - i} \right). \tag{8}$$

Для удобства интегрирования (7) полезно принять

$$\zeta - i = \frac{1}{u}. \tag{9}$$

При этом плоскость Кирхгоффа ζ преобразуется во вспомогательную плоскость u (фиг. 4).

Соответственные точки нанесены на фиг. 4

2. Преобразование основных зависимостей

Имея в виду (9), для Ω по (8) будем иметь:

$$\Omega = \frac{\Delta}{2i} \left(\frac{1}{\rho u} + \rho u \right), \tag{10}$$

откуда

$$d\Omega = \frac{\Delta}{2i} \left(\rho - \frac{1}{\rho u^2} \right) du, \tag{11}$$

$$\frac{\zeta}{1 + i\zeta} = \frac{i\zeta}{i - \zeta} = -i \frac{\zeta}{\zeta - i} = u - i. \tag{12}$$

Учитывая (11) и (12), вместо (7) будем иметь:

$$z = \frac{\Delta\rho}{2i} \int \left(1 - \frac{1}{\rho^2 u^2}\right) (u - i) du,$$

или, после интегрирования:

$$z = \frac{\Delta\rho}{2i} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{\ln u}{\rho^2} - \frac{i}{\rho^2 u} - iu \right] + C. \quad (13)$$

Для определения постоянной интегрирования C из (10), пользуясь условием $\Omega = 0$ при $z = 0$, имеем:

$$\frac{\Delta}{2i} \left(\frac{1}{\rho u_0} + \rho u_0 \right) = 0,$$

где u_0 — значение u при $z = 0$, откуда

$$\frac{1}{\rho u_0} + \rho u_0 = 0.$$

Следовательно,

$$u_0 = \frac{i}{\rho}.$$

Далее, подставляя в уравнение (13) $z = 0$ и $u = u_0 = \frac{i}{\rho}$, найдем постоянную интегрирования:

$$C = \frac{\Delta\rho}{2i} \left[\frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \ln \left(\frac{i}{\rho} \right) \right]. \quad (14)$$

Но

$$\ln \left(\frac{i}{\rho} \right) = \frac{\pi i}{2} + 2n\pi i - \ln \rho$$

и, следовательно, при $n = 0$

$$\ln \left(\frac{i}{\rho} \right) = \frac{\pi i}{2} - \ln \rho.$$

Поэтому вместо (14) для постоянной C будем иметь:

$$C = \frac{\Delta\rho}{2i} \left[\frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\pi i}{2} - \ln \rho \right) \right].$$

Следовательно, вместо (13) для z будем иметь:

$$z = \frac{\Delta\rho}{2i} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{1}{\rho^2} \ln u - \frac{i}{\rho^2 u} - iu + \frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\pi i}{2} - \ln \rho \right) \right]. \quad (15)$$

Отделяя в (15) вещественную и мнимую части, после несложных преобразований получаем:

$$x = \frac{\Delta\rho}{2} \left[uu - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{arctg} \frac{u}{u} - \frac{u}{\rho^2(u^2 + u^2)} - u + \frac{\pi}{2\rho^2} \right], \quad (16)$$

$$y = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{u}{\rho^2(u^2 + u^2)} - \frac{1}{2}(u^2 - u^2) + \frac{1}{\rho^2} \ln \sqrt{u^2 + u^2} - u + \frac{\ln \rho}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho^2} \right] \quad (17)$$

Координаты плоскости Жуковского Ω и вспомогательной области u легко выразить через координаты области Кирхгоффа и обратно, пользуясь равенством (9), где:

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad u = w + iw.$$

Отделяя вещественную и мнимую части и решая полученные уравнения, легко найдем:

$$w = \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}, \quad w = -\frac{\eta - 1}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}, \quad (18)$$

а также:

$$\zeta = \frac{w}{w^2 + w^2}, \quad \eta = 1 - \frac{w}{w^2 + w^2}. \quad (18')$$

Вводя в равенство (8)

$$\Omega = \Phi + i\Psi; \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

отделяя вещественную и мнимую части, а затем, решая полученные уравнения, найдем:

$$\Phi = \frac{\Delta}{2\rho} \frac{(\eta - 1) [\xi^2 + (\eta - 1)^2 - \rho^2]}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}, \quad (19)$$

$$\Psi = -\frac{\Delta}{2\rho} \frac{\xi [\xi^2 + (\eta - 1)^2 + \rho^2]}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}. \quad (20)$$

Для выражения координат плоскости Жуковского Ω через координаты вспомогательной плоскости u пользуемся (10), где:

$$\Phi + i\Psi = \Omega, \quad w + iw = u.$$

Отделяя в полученном равенстве вещественную и мнимую части и решая получающиеся уравнения, найдем:

$$\Phi = \frac{\Delta}{2\rho} \frac{w [\rho^2 (w^2 + w^2) - 1]}{w^2 + w^2}, \quad (21)$$

$$\Psi = -\frac{\Delta}{2\rho} \frac{w [\rho^2 (w^2 + w^2) + 1]}{w^2 + w^2}. \quad (22)$$

3. Дополнительные зависимости

Для конкретного определения коэффициента $\Delta = q + b$ необходимо в уравнениях (16) и (17) для точки 2 (фиг. 1 и 4) принять:

$$x = -b, \quad y = -t; \quad w = \frac{1}{\rho}, \quad w = 0,$$

при этом получаем:

$$b = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\pi}{2\rho^2} \right] = \frac{\Delta}{4\rho} (4\rho - \pi); \quad (23)$$

$$t = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \ln \rho + \frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \ln \rho \right] = \frac{\Delta}{2\rho}. \quad (24)$$

Из (23) имеем:

$$\Delta = \frac{4\rho b}{4\rho - \pi},$$

из (24):

$$\Delta = 2\rho t.$$

Следовательно,

$$2\rho t = \frac{4\rho b}{4\rho - \pi},$$

откуда

$$b = \frac{4\rho - \pi}{2} t, \quad t = \frac{2}{4\rho - \pi}.$$

Но так как $\Delta = q + b$, находим:

$$b = \frac{4\rho - \pi}{\pi} q, \quad t = \frac{2}{\pi} q$$

и отношение

$$\frac{b}{t} = \frac{4\rho - \pi}{2}. \quad (25)$$

Как видно из зависимости (25), величина ρ определяет величину отношения полуширины канала поверху b к глубине его t ; таким образом для изменения величины $\left(\frac{b}{t}\right)$ необходимо лишь изменение ρ — радиуса окружности (фиг. 3) на плоскости Кирхгоффа.

4. Исследование формы кривой смоченной поверхности

Как видно (фиг. 1 и 4), смоченной поверхности на плоскости $z(1-A-2)$ соответствует окружность радиуса $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ на плоскости u . Координаты w_0 и u_0 (фиг. 5) на плоскости u могут быть выражены в функции радиуса и угла следующими зависимостями:

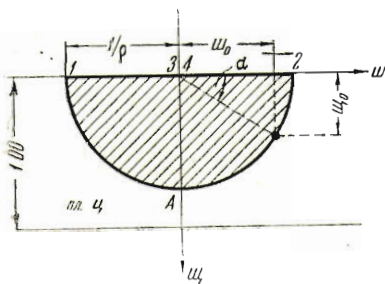
$$w_0 = \frac{1}{\rho} \cos \alpha; \quad u_0 = \frac{1}{\rho} \sin \alpha.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (16) и (17) вместо w и u получим:

$$x_0 = \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sin 2\alpha + \pi}{2} - \alpha \right) - 2 \cos \alpha \right], \quad (26)$$

$$y_0 = -\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = -\cos^2 \alpha. \quad (27)$$

Задавая некоторые значения ρ , а затем изменяя в уравнениях (26) и (27) значения угла α от нуля до $\frac{\pi}{2}$, мы и будем получать значения координат смоченной поверхности x_0 и y_0 на плоскости z при заданном ρ [как было указано выше, задание ρ дает нам определенную величину отношения $\left(\frac{b}{t}\right)$]. Вычислен-



Фиг. 5.

ные координаты x_0 и y_0 смоченной поверхности для случаев: $\rho = 1.0$; $\rho = 1.5$; 2.0; 3.0 и 5.0 приводятся ниже, в таблицах I—V.

Необходимо отметить, что вычисления как для этих таблиц, так и для всех последующих произведены на логарифмической линейке.

Т а б л и ц ы I — II

| № точки | Угол α | $\rho = 1.00$ | | $\rho = 1.50$ | |
|---------|-------------------|---------------|--------|---------------|--------|
| | | x_0 | y_0 | x_0 | y_0 |
| 2 | 0.00 | -0.430 | -1.000 | -1.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | -0.352 | -0.905 | -1.304 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | -0.201 | -0.655 | -1.010 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | -0.069 | -0.345 | -0.665 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | -0.012 | -0.095 | -0.321 | -0.095 |
| e | $\frac{4\pi}{9}$ | -0.004 | -0.030 | -0.177 | -0.030 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Т а б л и ц ы III — IV

| № точки | Угол α | $\rho = 2.00$ | | $\rho = 3.00$ | |
|---------|-------------------|---------------|--------|---------------|--------|
| | | x_0 | y_0 | x_0 | y_0 |
| 2 | 0.00 | -2.430 | -1.000 | -4.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | -2.254 | -0.905 | -4.150 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | -1.820 | -0.655 | -3.439 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | -1.250 | -0.345 | -2.424 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | -0.628 | -0.095 | -1.245 | -0.095 |
| e | $\frac{4\pi}{9}$ | -0.350 | -0.030 | -0.699 | -0.030 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица V

(ρ = 5.0)

| Угол α | x ₀ | y ₀ | Угол α | x ₀ | y ₀ |
|-------------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|
| 0.00 | -8.430 | -1.000 | $\frac{2\pi}{5}$ | -2.480 | -0.095 |
| $\frac{\pi}{10}$ | -7.960 | -0.905 | $\frac{4\pi}{9}$ | -1.395 | -0.030 |
| $\frac{\pi}{5}$ | -6.675 | -0.655 | 85° | -0.695 | -0.008 |
| $\frac{3\pi}{10}$ | -4.775 | -0.345 | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.000 |

Графически формы русел представлены отдельно на чертежах, которые прилагаются к данной работе (фиг. 8).

5. Построение кривых депрессии

Как усматривается из фиг. 4, на плоскости u кривой депрессии соответствует прямая $u = 0$.

Принимая в уравнениях (16) и (17) $u = 0$, мы и получим зависимости для координат кривой депрессии x и y в следующем виде:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u} [(\rho u)^2 + 1], \quad (28)$$

$$y = \ln(\rho u) - \frac{1}{2} [(\rho u)^2 + 1]. \quad (29)$$

Ниже приводим таблицы VI—X для координат кривых депрессий, вычисленных по формулам (28) и (29), для пяти различных случаев.

Таблицы VI—VII

| ρ = 1.00 | | | | ρ = 1.50 | | | |
|----------|-------|--------|--------|----------|-------|---------|--------|
| № точки | u | x | y | № точки | u | x | y |
| 2 | 1.000 | -0.430 | -1.000 | 2 | 0.667 | -1.430 | -1.000 |
| a' | 0.875 | -0.450 | -1.016 | a' | 0.445 | -1.554 | -1.073 |
| b' | 0.750 | -0.506 | -1.073 | b' | 0.333 | -2.179 | -1.319 |
| c' | 0.625 | -0.652 | -1.165 | c' | 0.222 | -3.429 | -1.656 |
| d' | 0.500 | -0.930 | -1.319 | d' | 0.166 | -4.804 | -1.918 |
| e' | 0.375 | -1.470 | -1.550 | e' | 0.111 | -7.679 | -2.306 |
| f' | 0.250 | -2.680 | -1.918 | f' | 0.056 | -16.555 | -2.991 |
| g' | 0.000 | -∞ | -∞ | g' | 0.000 | | |

Таблицы VIII—IX

$\rho = 2.00$

$\rho = 3.00$

| № точки | u | x | y | № точки | u | x | y |
|---------|-------|-----------|-----------|---------|-------|-----------|-----------|
| 2 | 0.500 | -2.480 | -1.000 | 2 | 0.333 | -4.480 | -1.000 |
| a' | 0.438 | -2.480 | -1.016 | a' | 0.222 | -4.679 | -1.078 |
| b' | 0.375 | -2.604 | -1.073 | b' | 0.166 | -5.929 | -1.319 |
| c' | 0.313 | -2.880 | -1.165 | c' | 0.111 | -8.429 | -1.656 |
| d' | 0.250 | -3.432 | -1.319 | d' | 0.083 | -11.179 | -1.918 |
| e' | 0.188 | -4.512 | -1.550 | e' | 0.056 | -16.929 | -2.306 |
| f' | 0.125 | -6.932 | -1.918 | f' | 0.028 | -34.679 | -2.991 |
| g' | 0.000 | $-\infty$ | $-\infty$ | g' | 0.000 | $-\infty$ | $-\infty$ |

Таблица X

($\rho = 5.00$)

| u | x | y | x | y | u |
|-------|---------|--------|-----------|-----------|-------|
| 0.200 | -8.480 | -1.000 | -19.679 | -1.918 | 0.050 |
| 0.133 | -8.846 | -1.073 | -29.264 | -2.306 | 0.033 |
| 0.100 | -10.929 | -1.319 | -58.849 | -2.991 | 0.016 |
| 0.067 | -15.094 | -1.656 | $-\infty$ | $-\infty$ | 0.000 |

6. Построение эпор φ и ψ по смоченной поверхности

Выразим φ и ψ через переменные u и w . Имея в виду, что

$$\Omega = \omega + iz,$$

после отделения вещественной и мнимой частей получим:

$$\Phi = \varphi - y, \quad \Psi = \psi + x. \tag{30}$$

Подставляя в уравнения (30) вместо x, y, Φ и Ψ их выражения по (16), (17), (21) и (22), получим:

$$\varphi = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\ln \rho \sqrt{w^2 + u^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (w^2 - u^2) \right], \tag{31}$$

$$\psi = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{w}{u} - \frac{\pi}{2} \right) - wu \right]. \tag{32}$$

Но на смоченной поверхности

$$w_0 = \frac{1}{\rho} \cos \alpha, \quad u_0 = \frac{1}{\rho} \sin \alpha,$$

поэтому

$$\varphi_0 = -\cos^2 \alpha, \tag{33}$$

$$\psi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \tag{34}$$

Формула (33) показывает, что на смоченной поверхности потенциальная функция изменяется по закону вертикальных ординат этой поверхности (от 0 до 1).

Ниже приводим результаты вычислений для функций φ и ψ по смоченной поверхности в таблицах XI—XV.

Таблицы XI—XII

 $\rho = 1.00$ $\rho = 1.50$

| № точки | Угол α | $\rho = 1.00$ | | | | $\rho = 1.50$ | | | |
|---------|---------------|---------------|--------|-------------|----------|---------------|--------|-------------|----------|
| | | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 |
| 2 | 0.00 | -0.430 | -1.000 | -1.000 | -1.570 | -1.430 | -1.000 | -1.000 | -1.570 |
| a | 0.1 π | -0.352 | -0.903 | -0.903 | -1.551 | -1.304 | -0.903 | -0.903 | -1.551 |
| b | 0.2 π | -0.201 | -0.654 | -0.654 | -1.421 | -1.010 | -0.654 | -0.654 | -1.421 |
| c | 0.3 π | -0.069 | -0.346 | -0.346 | -1.108 | -0.665 | -0.346 | -0.346 | -1.108 |
| d | 0.4 π | -0.012 | -0.097 | -0.097 | -0.610 | -0.321 | -0.097 | -0.097 | -0.610 |
| A | 0.5 π | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблицы XIII—XIV

 $\rho = 2.00$ $\rho = 3.00$

| № точки | Угол α | $\rho = 2.00$ | | | | $\rho = 3.00$ | | | |
|---------|---------------|---------------|--------|-------------|----------|---------------|--------|-------------|----------|
| | | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 |
| 2 | 0.00 | -2.430 | -1.000 | -1.000 | -1.570 | -4.430 | -1.000 | -1.000 | -1.570 |
| a | 0.1 π | -2.254 | -0.903 | -0.903 | -1.551 | -4.150 | -0.903 | -0.903 | -1.551 |
| b | 0.2 π | -1.820 | -0.654 | -0.654 | -1.421 | -3.439 | -0.654 | -0.654 | -1.421 |
| c | 0.3 π | -1.250 | -0.346 | -0.346 | -1.108 | -2.424 | -0.346 | -0.346 | -1.108 |
| d | 0.4 π | -0.628 | -0.097 | -0.097 | -0.610 | -1.245 | -0.097 | -0.097 | -0.610 |
| A | 0.5 π | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица XV

 $(\rho = 5.00)$

| Угол α | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 | x_0 | y_0 | φ_0 | ψ_0 | Угол α |
|---------------|--------|--------|-------------|----------|--------|--------|-------------|----------|---------------|
| 0.00 | -8.430 | -1.000 | -1.000 | -1.570 | -4.475 | -0.346 | -0.346 | -1.108 | 0.3 π |
| 0.1 π | -7.960 | -0.903 | -0.903 | -1.551 | -2.480 | -0.097 | -0.097 | -0.610 | 0.4 π |
| 0.2 π | -6.675 | -0.654 | -0.654 | -1.421 | -0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.5 π |

7. Построение эпюр скоростей фильтрации на смоченной поверхности

Как указывалось выше (§ 1), вектор, проведенный из начала координат на плоскости Кирхгоффа (фиг. 3), дает направление скорости фильтрации, длина же его $l = \frac{1}{|U|}$, где $|U|$ — модуль приведенной скорости фильтрации в данной точке области z . Пользуясь этим свойством плоскости Кирхгоффа, можно без особого труда построить эпюры скоростей фильтрации по смоченной поверхности с указанием их направления.

Для этой цели будем поступать следующим образом: будем задавать на вспомогательной плоскости ζ (фиг. 4) точки, находящиеся на окружности радиуса $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ при различных значениях угла α (фиг. 5), например, $\alpha = 0; \frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{10}; \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2}$; затем по формулам (18') будем определять значения координат ξ и η этих точек на плоскости ζ (на окружности радиуса ρ), после чего будем определять длину вектора l от начала координат до найденной точки на окружности; имея длину данного радиуса вектора, определяем приведенную скорость фильтрации в данной точке смоченной поверхности по формуле

$$U = \frac{1}{l}.$$

Координаты точки (x, y) на плоскости z определяем по формулам (16) и (17); направление же скорости фильтрации в данной точке будем получать путем параллельного перемещения радиуса вектора из данной точки плоскости ζ в найденную точку на плоскость z ; эти построения наглядно показаны на прилагаемом чертеже в конце работы.

Нами произведены вычисления для эпюр скоростей для пяти различных случаев формы русла: при $\rho = 1.0; 1.5; 2.0; 3.0$ и 5.0 .

Результаты вычислений сведены в таблицы XVI—XX.

($\rho = 1.0$)

Таблица XVI

| № точки | Угол α | u_0 | w_0 | ξ_0 | η_0 | l_0 | U_0 | x_0 | y_0 |
|---------|-------------------|-------|-------|---------|----------|-------|----------|--------|--------|
| 2 | 0.00 | 1.000 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.414 | 0.707 | -0.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | 0.951 | 0.309 | 0.951 | 0.691 | 1.177 | 0.850 | -0.352 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | 0.809 | 0.588 | 0.809 | 0.412 | 0.908 | 1.100 | -0.201 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | 0.588 | 0.809 | 0.588 | 0.191 | 0.618 | 1.617 | -0.069 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | 0.309 | 0.951 | 0.309 | 0.049 | 0.314 | 3.181 | -0.012 | -0.095 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | ∞ | 0.000 | 0.000 |

Таблица XVII

 $(\rho = 1.50)$

| № точки | $\gamma_{\text{гол}} \alpha$ | w_0 | w_0 | ξ_0 | η_0 | l_0 | U_0 | x_0 | y_0 |
|---------|------------------------------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|--------|--------|
| 2 | 0.00 | 0.667 | 0.000 | 1.500 | 1.000 | 1.803 | 0.555 | -1.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | 0.634 | 0.206 | 1.429 | 0.536 | 1.525 | 0.656 | -1.304 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | 0.540 | 0.392 | 1.217 | 0.117 | 1.222 | 0.818 | -1.010 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | 0.392 | 0.540 | 0.883 | -0.217 | 0.910 | 1.100 | -0.665 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | 0.206 | 0.634 | 0.464 | -0.429 | 0.632 | 1.584 | -0.321 | -0.095 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.667 | 0.000 | -0.500 | 0.250 | 4.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица XVIII

 $(\rho = 2.0)$

| № точки | $\gamma_{\text{гол}} \alpha$ | w_0 | w_0 | ξ_0 | η_0 | l_0 | U_0 | x_0 | y_0 |
|---------|------------------------------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|--------|--------|
| 2 | 0.00 | 0.500 | 0.000 | 2.000 | 1.000 | 2.238 | 0.447 | -2.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | 0.475 | 0.155 | 1.900 | 0.381 | 1.925 | 0.519 | -2.254 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | 0.405 | 0.294 | 1.620 | -0.177 | 1.611 | 0.620 | -1.820 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | 0.294 | 0.405 | 1.177 | -0.620 | 1.330 | 0.762 | -1.250 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | 0.155 | 0.475 | 0.619 | -0.900 | 1.094 | 0.914 | -0.628 | -0.095 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.500 | 0.000 | -1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица XIX

($\rho = 3.0$)

| № точки | Угол α | w_0 | u_0 | ξ_0 | η_0 | l_0 | U_0 | x_0 | y_0 |
|---------|-------------------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|--------|--------|
| 2 | 0.00 | 0.333 | 0.000 | 3.000 | 1.000 | 3.163 | 0.316 | -4.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | 0.317 | 0.103 | 2.858 | 0.073 | 2.860 | 0.348 | -4.150 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | 0.270 | 0.196 | 2.430 | -0.766 | 2.547 | 0.392 | -3.439 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | 0.196 | 0.270 | 1.766 | -1.430 | 2.273 | 0.440 | -2.424 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | 0.103 | 0.317 | 0.927 | -1.858 | 2.078 | 0.482 | -1.245 | -0.095 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.333 | 0.000 | -2.000 | 2.000 | 0.500 | 0.000 | 0.000 |

Таблица XX

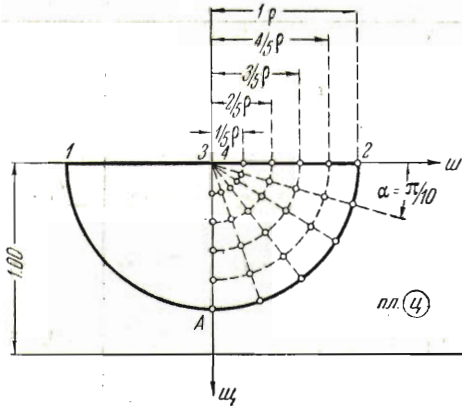
($\rho = 5.0$)

| № точки | Угол α | w_0 | u_0 | ξ_0 | η_0 | l_0 | U_0 | x_0 | y_0 |
|---------|-------------------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|--------|--------|
| 2 | 0.00 | 0.200 | 0.000 | 5.000 | 1.000 | 5.100 | 0.196 | -8.430 | -1.000 |
| a | $\frac{\pi}{10}$ | 0.190 | 0.062 | 4.750 | -0.550 | 4.770 | 0.210 | -7.960 | -0.905 |
| b | $\frac{\pi}{5}$ | 0.162 | 0.117 | 4.050 | -1.926 | 4.480 | 0.223 | -6.675 | -0.655 |
| c | $\frac{3\pi}{10}$ | 0.117 | 0.162 | 2.926 | -3.050 | 4.230 | 0.236 | -4.775 | -0.345 |
| d | $\frac{2\pi}{5}$ | 0.062 | 0.190 | 1.550 | -3.750 | 4.060 | 0.246 | -2.480 | -0.095 |
| A | $\frac{\pi}{2}$ | 0.000 | 0.200 | 0.000 | -4.00 | 4.000 | 0.250 | 0.000 | 0.000 |

8. Построение сеток течения

В виду математической сложности полученных зависимостей для x, y, φ и ψ нет возможности выразить φ и ψ через x и y ни в параметрической форме, ни тем более в явном виде, поэтому построение сеток течения можно произвести лишь следующим образом.

Имея зависимости (16), (17), (31) и (32), будем задавать на плоскости u различные значения u и w ; для каждой точки будем определять по этим зависимостям x, y, φ и ψ ; результаты вычислений сведем в таблицу. Пользуясь данными таблицы, по координатам x и y будем наносить точки на плоскости z и присваивать им соответствующие значения φ и ψ ; затем по имеющимся нанесенным точкам будем иметь возможность построить сетку течения по известным правилам топографии.



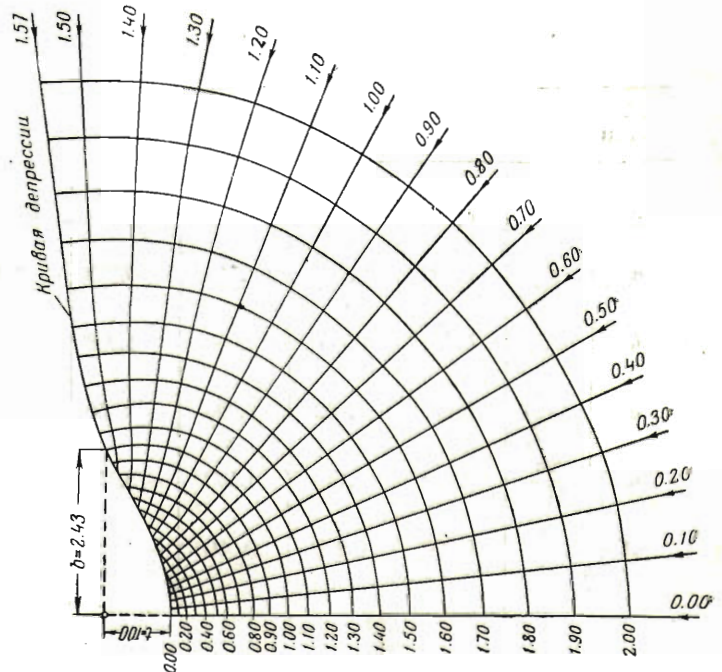
Фиг. 6.

В виду сравнительной сложности метода построения займемся здесь построением сетки течения только для одного из рассмотренных выше пяти случаев, именно, для случая $\rho = 2.0$ (на плоскости ζ).

Для определения координат x, y и величин φ и ψ (на плоскости z) будем задаваться на плоскости u различными значениями координат u и w точек, лежащих на окружностях различных радиусов.

На чертеже фиг. 6 светлыми кружочками на пересечении окружностей с радиусами показаны точки плоскости u , для которых произведены вычисления.

Для каждой из групп точек, лежащих на одной окружности



Фиг. 7.

Таблица XXI

| Угол α | w | w | x | y | φ | ψ |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-----------|--------|
| 0.00 | 0.500 | 0.000 | -2.430 | -1.000 | -1.000 | 1.570 |
| 0.1 π | 0.475 | 0.155 | -2.254 | -0.905 | -0.905 | 1.551 |
| 0.2 π | 0.405 | 0.294 | -1.820 | -0.644 | -0.644 | 1.421 |
| 0.3 π | 0.294 | 0.405 | -1.250 | -0.356 | -0.356 | 1.108 |
| 0.4 π | 0.155 | 0.475 | -0.628 | -0.095 | -0.095 | 0.610 |
| 0.5 π | 0.000 | 0.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица XXII

| Угол α | w | w | x | y | φ | ψ |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-----------|--------|
| 0.00 | 0.400 | 0.000 | -2.528 | -1.040 | -1.040 | 1.570 |
| 0.1 π | 0.380 | 0.124 | -2.453 | -0.696 | -0.976 | 1.444 |
| 0.2 π | 0.324 | 0.236 | -2.077 | -0.288 | -0.820 | 1.244 |
| 0.3 π | 0.236 | 0.324 | -1.484 | 0.108 | -0.620 | 0.936 |
| 0.4 π | 0.124 | 0.380 | -0.768 | 0.392 | -0.464 | 0.504 |
| 0.5 π | 0.000 | 0.400 | 0.000 | 0.500 | -0.400 | 0.000 |

Таблица XXIII

| Угол α | w | w | x | y | φ | ψ |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-----------|--------|
| 0.00 | 0.300 | 0.000 | -2.964 | -1.192 | -1.192 | 1.570 |
| 0.1 π | 0.285 | 0.093 | -2.948 | -0.496 | -1.156 | 1.360 |
| 0.2 π | 0.243 | 0.177 | -2.556 | 0.188 | -1.068 | 1.116 |
| 0.3 π | 0.177 | 0.243 | -1.868 | 0.772 | -0.956 | 0.804 |
| 0.4 π | 0.093 | 0.285 | -0.984 | 1.160 | -0.868 | 0.420 |
| 0.5 π | 0.000 | 0.300 | 0.000 | 1.304 | -0.832 | 0.000 |

Таблица XXIV

| Угол α | u | u' | x | y | φ | ψ |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-----------|--------|
| 0.00 | 0.200 | 0.000 | -4.228 | -1.496 | -1.496 | 1.570 |
| 0.1 π | 0.190 | 0.062 | -4.212 | -0.176 | -1.480 | 1.804 |
| 0.2 π | 0.162 | 0.118 | -3.684 | +1.036 | -1.440 | 1.020 |
| 0.3 π | 0.118 | 0.162 | -2.712 | 2.008 | -1.392 | 0.708 |
| 0.4 π | 0.062 | 0.190 | -1.436 | 2.644 | -1.352 | 0.864 |
| 0.5 π | 0.000 | 0.200 | 0.000 | 2.864 | -1.336 | 0.000 |

Таблица XXV

| Угол α | u | u' | x | y | φ | ψ |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-----------|--------|
| 0.00 | 0.100 | 0.000 | -8.838 | -2.132 | -2.132 | 1.570 |
| 0.1 π | 0.095 | 0.031 | -8.612 | 0.848 | -2.128 | 1.268 |
| 0.2 π | 0.081 | 0.059 | -7.454 | 3.548 | -2.122 | 0.964 |
| 0.3 π | 0.059 | 0.081 | -5.490 | 5.260 | -2.106 | 0.652 |
| 0.4 π | 0.031 | 0.095 | -2.897 | 7.032 | -2.096 | 0.328 |
| 0.5 π | 0.000 | 0.100 | 0.000 | 7.508 | -2.092 | 0.000 |

На фиг. 7 изображается сетка течения, построенная по данным этих таблиц вышеизложенным методом.

Поступила в редакцию 10 X 1937.

7 V 1937.

INVESTIGATION OF FILTRATION FOR THE CASE OF A FLOW OF WATER TO DRAINING CHANNELS

M. I. BAZANOV

(Leningrad)

(Summary)

The present work submits one of the possible cases of combined application of the Zhukovsky and Kirchoff complexes for the investigation of pressureless filtration and represents a development of the thoughts of the late Academician N. N. Pavlovsky in relation to this question.

The Zhukovsky and Kirchoff complexes represent what are named as complex variable functions, presented correspondingly by formulae

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega + iz, \\ \zeta &= \frac{dz}{d\omega}.\end{aligned}\quad (\alpha)$$

The work considers the flow of ground waters to a bed void of any perceptible layer of water (Fig. 1). The raised problem is solved by the inverse method, i. e. the moistened surface on the Kirchoff plane is circumscribed as a result of which the form of the bed is curvilinear and depends only on the radius of this circle. The nearest approach to practical (trapezoidal) bed forms are obtained under values parameter $1.5 < \rho < 2.5$; cases of $\rho < 1$ are not possible. In the solution of the problem the domain of the filtrational flow is transformed into the Zhukovsky plane (Fig. 2) by the aid of the Zhukovsky complex (1) after which the latter is transformed into the Kirchoff plane (Fig. 3) by means of dependency

$$\Omega = \frac{\Delta}{2i} \left(\frac{\zeta - i}{\rho} + \frac{\rho}{\zeta - i} \right). \quad (8)$$

Further, utilising above-mentioned dependencies (α), we find the value of plane coordinates z in the form

$$z = \int \frac{\zeta d\Omega}{1 + i\zeta} + C. \quad (7)$$

For the convenience of integration (7) we introduce the auxiliary plane u (Fig. 4) by dependency).

$$\zeta - i = \frac{1}{u}. \quad (9)$$

After integration (17) and separating its real and imaginary parts, we find the dependency for coordinates of the given domain x and y in the variable u and w of the auxiliary plane u in the form

$$x = \frac{\Delta\rho}{2} \left[wu - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{w}{u} - \frac{w}{\rho^2(w^2 + u^2)} - u + \frac{\pi}{2\rho^2} \right], \quad (16)$$

$$y = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{u}{\rho^2(w^2 + u^2)} - \frac{1}{2}(w^2 - u^2) + \frac{1}{\rho^2} \ln \sqrt{w^2 + u^2} - u + \frac{\ln \rho}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho^2} \right]. \quad (17)$$

Dependencies

$$\begin{aligned}w &= \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}; \\ u &= \frac{\eta - 1}{\xi^2 + (\eta - 1)^2},\end{aligned}\quad (18)$$

and

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{w}{w^2 + u^2}, \\ \eta &= 1 - \frac{u}{w^2 + u^2}.\end{aligned}\quad (18')$$

are then rendered for transition from the auxiliary plane u coordinates to the coordinates of Kirchoff and vice versa.

Dependencies

$$\Phi = \frac{\Delta}{2\rho} \cdot \frac{u [\rho^2 (u^2 + u^2) - 1]}{u^2 + u^2}, \tag{21}$$

$$\Psi = - \frac{\Delta}{2\rho} \cdot \frac{u [\rho^2 (u^2 + u^2) + 1]}{u^2 + u^2} \tag{22}$$

are given for the transition from the auxiliary plane u coordinates to the Zhukovsky plane coordinates.

A concrete expression is given in the form of supplementary dependencies for the coefficient Δ which is in all the foregoing formulae in the forms

$$\Delta = \frac{4\rho b}{4\rho - \pi},$$

and

$$\Delta = 2\rho t.$$

By introducing polar coordinates in the investigation of forms of the moistened surface of the curve, we easily obtain the dependency

$$x_0 = \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sin 2\alpha + \pi}{2} - \alpha \right) - 2 \cos \alpha \right], \tag{26}$$

$$y_0 = - \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = - \cos^2 \alpha, \tag{27}$$

for the construction of a curve of the moistened surface. Calculations for five different beds are rendered on the basis of these dependencies. The results of the calculations are given in tables I—V.

Drawings of the forms of the beds are given at the end of the present work (fig. 8).

For the construction of the curves of depression are assumed in the equations (16) and (17) $u=0$ and as a result of which the dependencies are obtained for the depression curve coordinates in the form

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u} [(\rho u)^2 + 1], \tag{28}$$

$$y = \ln (\rho u) - \frac{1}{2} [(\rho u)^2 + 1]. \tag{29}$$

The results of the calculations are cited in Tables VI—X.

Formulae

$$\varphi_0 = - \cos^2 \alpha, \tag{33}$$

$$\psi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \tag{34}$$

are rendered for the construction of epure φ and ψ and calculations effected thereon are given in Tables XI—XV.

For the construction of epures of the velocity of filtration on the moistened surface the property of the Kirchoff plane is utilized: (the length of the vector radius from the beginning of the coordinates to any point on this plane equals the value of the inverse moduli velocity in the given point; the direction of the velocity coinciding with the direction of the radius vector).

Utilizing formulae (18), (18'), (16), (17) and the above-mentioned properties of the Kirchoff plane, calculations have been conducted for the epures, of the velocity, the results of which are given in Tables XVI—XX. These epures are also presented at the end of the present work (fig. 8).

The following method is applied for the construction of a net of the current: utilizing (16) (17), and the dependencies

$$\varphi = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\ln \rho \sqrt{u^2 + w^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}(u^2 - w^2) \right], \quad (31)$$

$$\psi = \frac{\Delta\rho}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{w}{u} - \frac{\pi}{2} \right) - wu \right] \quad (32)$$

we determine the values of functions φ and ψ and coordinates x and y for the given points on the plane u after which, plotting these points on the plane occupied by the filtrational flow z , and having the computed values φ and ψ in them, we obtain the equipotential lines (lines $\varphi = \text{const}$) and the current lines ($\psi = \text{const}$), by graphical interpolation method (like that effected in topography). We thus calculate the coordinates of the current net for one case $\rho = 2.0$; the results of these calculations are given in Tables XXI—XXV; the current net diagram is given at the end of the present work (fig. 7).