АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 2 1938 V. II, № 2

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К. Н. ШЕВЧЕНКО

(Москва)

В настоящей заметке мы ставим себе целью доказать существование и построить решение уравнения

$$\Delta^* \mathbf{U} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} - \mu\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{U} = 0 \tag{1}$$

при заданных на границе области значениях вектора $\mathbf{U}$.

Здесь $\mathbf{U}(u, v, w)$ — вектор смещения, λ, μ — константы Ляме. Компоненты $\Delta^* \mathbf{U}$ по осям координат обозначим через $\Delta^*_x \mathbf{U}$, $\Delta^*_y \mathbf{U}$, $\Delta^*_z \mathbf{U}$, а производные по координатам через $[\Delta^*_x \mathbf{U}]_x'$, $[\Delta^*_x \mathbf{U}]_y'$ и т. д.

Область, занятую упругим телом, будем считать конечной, причем замкнутая граница ее состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей.

Решение поставленной задачи эквивалентно следующей задаче вариационного исчисления.

Построить три функции u, v, w, сообщающих функционалу

$$D(u, v, w) = \int_J \left\{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)[\mathrm{div}\mathbf{U}]^2 + \frac{2}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\tau \tag{2}$$

минимум при заданных на границе области J значениях u, v, w.

Пользуясь, например, методом Ritz, можно построить соответствующую этой задаче минимизирующую последовательность.

Нашей задачей является доказательство сходимости этой последовательности к функциям, решающим поставленную задачу. В основу доказательства сходимости минимизирующей последовательности мы положили идею, предложенную Р. Курантом.[1] Будем считать, что минимизирующая последовательность построена. Мы имеем, таким образом, последовательность векторов $\mathbf{U}_n(u_n, v_n, w_n)$, для которой справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n, v_n, w_n) = d, \tag{3}$$

где d есть точная нижняя граница функционала (2). Следуя методу Куранта, будем в дальнейшем рассматривать вместо функционала (2) функционал

$$D_1(u, v, w) = \int_J \{F(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + (\Delta_x{}^* \mathbf{U})^2 + (\Delta_y{}^* \mathbf{U})^2 + (\Delta_z{}^* \mathbf{U})^2 + \\ + [\Delta_x{}^* \mathbf{U}]_x'^2 + \ldots + [\Delta_z{}^* \mathbf{U}]_z'^2\} \, d\tau, \tag{4}$$

где $F(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ — подинтегральная функция функционала (2).

Очевидно, точная нижняя граница d_1 функционала $D_1(u, v, w)$ больше или равна d. В дальнейшем под $\mathbf{U}_n(u_n, v_n, w_n)$ будем понимать минимизирующую последовательность для функционала (4).

На границе области при любых n и m вектор

$$\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_m = 0.$$

Пользуясь этим, нетрудно установить равенство

$$\lim_{n, m \to \infty} D_1(u_n - u_m, \; v_n - v_m, \; w_n - w_m) = 0, \tag{5}$$

равносильное системе девятнадцати предельных равенств

$$\lim_{n, m \to \infty} \int_J \left[\frac{\partial}{\partial x}(u_n - u_m)\right]^2 d\tau = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{6}$$

$$\lim_{n, m \to \infty} \int_J \{[\Delta^*_z(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_m)]_z'\}^2 \, d\tau = 0.$$

Вектор напряжения на поверхности некоторой области, соответствующий вектору смещения $\mathbf{U}(u, v, w)$, обозначим через $P(\Xi, H, Z)$. Далее введем так называемый тензор смещения Somiglian:

$$P = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}\left[\frac{\lambda + 3\mu}{2} E + (\lambda + \mu)\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}\right], \tag{7}$$

где E — единичная матрица. Соответственный ему тензор напряжений на границе области обозначим через S:

$$S = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}\left[\frac{\mu E}{r^2} + \frac{3(\lambda + \mu)}{r^2}\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^2}\right]. \tag{8}$$

Обозначим вектора перемещений, составленные из элементов столбца тензора Somiglian, через $\mathbf{U}_1(u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{U}_2(u_2, v_2, w_2)$ и $\mathbf{U}_3(u_3, v_3, w_3)$ и вектора напряжения, составленные из элементов столбца тензора (8), через $\mathbf{P}_1(\Xi_1, H_1, Z_1)$, $\mathbf{P}_2(\Xi_2, H_2, Z_2)$, $\mathbf{P}_3(\Xi_3, H_3, Z_3)$.

Из известной формулы Бэтти следует:

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \int_{J_1} (\mathbf{U}_{1R} - \mathbf{U}_1)\, \Delta^* \mathbf{U} d\tau + \int_{J_1} F(\mathbf{U}_{1R}, \mathbf{U})\, d\tau + \int_{O_1} \mathbf{P}_1 \mathbf{U} d o, \tag{9}$$

где $\mathbf{U}_{1R}$ — вектор смещения с компонентами

$$u_{1R}=\frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{R^2}+(\lambda+\mu)\frac{(x-\xi)^2}{R^3},\quad v_{1R}=\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{R^2},$$

$$w_{1R}=\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{R^3},$$

$F(\mathbf{U}, \mathbf{U}_{1R})$ — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $F(\mathbf{U}, \mathbf{U})$, O_1 — поверхность, а J_1 — область сферы радиуса R.

Заменяя в (9) вектор $\mathbf{U}$ на вектор $\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m$, будем иметь:

$$\begin{aligned}U_n-U_m=\int_{J_1}\{(u_{1R}-u_1)\Delta_x^*(\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)+(v_{1R}-v_1)\Delta_y^*(\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)+\\+(w_{1R}-w_1)\Delta_z^*(\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)\}\,d\tau+\\+\int_{J_1}F(\mathbf{U}_{1R},\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)\,d\tau+\int_{O_1}[\Xi_1(u_n-u_m)+H_1(v_n-v_m)+Z_1(w_n-w_m)]\,do'.\end{aligned}\tag{10}$$

Из формул Бэтти можно получить еще два соотношения:

$$U_n-U_m-\int_J F(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)\,d\tau=0,\tag{11}$$

$$\int_{O_1}(U_n-U_m)\mathbf{P}'\,dv+\int_{J_1}F(\mathbf{U}',\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m)\,d\tau=0,\tag{12}$$

где $\mathbf{U}'$ — вектор, удовлетворяющий уравнению (1), с компонентами по осям координат $-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}x^2$, xy, xz, и $\mathbf{P}'$ вектор напряжения на границе области J_1, соответствующий вектору $\mathbf{U}_1$.

Аналогичные формулы получим и для других компонентов вектора U_n-U_m. Полученных формул (6), (11) и (12) достаточно для доказательства равномерной сходимости вектора $\mathbf{U}_n$ во всей области к некоторому предельному вектору $\mathbf{U}(u, v, w)$.

Принимая во внимание симметричность дифференцирования по ξ и x и то, что на поверхности сферы радиуса R

$$\mathbf{U}_{1R}-\mathbf{U}_1=0,$$

получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}=\int_{J_1}\{(u_{1R}-u_1)[\Delta_x^*\mathbf{U}]_x'+(v_{1R}-v_1)[\Delta_y^*\mathbf{U}]_x'+(w_{1R}-w_1)[\Delta_z^*\mathbf{U}]_x'\}\,d\tau+\\+\int_{J_1}F(\mathbf{U}'_{1R\xi},\mathbf{U})\,d\tau+\int_{O_1}[\Xi'_{1\xi}u+H'_{1\xi}v+Z'_{1\xi}w]\,do.\end{aligned}\tag{13}$$

Заменив вектор $\mathbf{U}$ на вектор $\mathbf{U}_n-\mathbf{U}_m$, при помощи неравенства Шварца и формул (6), (11), (12) мы доказываем равномерную сходимость $u'_{n\xi}$ внутри области J_1.

Точно таким же образом получаем сходимость производных от u_n по η и ζ и для других компонентов вектора $\mathbf{U}_n$. Аналогичным образом получаем равномерную сходимость внутри области производных более высокого порядка. Из равномерной сходимости вектора $\mathbf{U}_n(u_n, v_n, w_n)$ во всей области J и равномерной сходимости производных внутри области J вытекает:

$$D_1(u, v, w) = d_1. \tag{14}$$

Следуя методу Куранта, легко показать, что полученный вектор $\mathbf{U}(u, v, w)$ удовлетворяет уравнению (1), откуда немедленно следует, что

$$d_1 = d.$$

Поступила в редакцию 15 III 1938.

APPLICATION DU CALCUL DE VARIATION AU PROBLÈME STATIQUE DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ

K. N. CHEVTCHENKO

(Moscou)

(Résumé)

Dans son mémoire connu R. Courant[1] a démontré la convergence de la méthode de Ritz pour le problème de Dirichlet. En généralisant les raisonnements de R. Courant, l'auteur démontre la convergence de la méthode de Ritz pour le problème statique de la théorie d'élasticité. On suppose donnés les déplacements élastiques sur la frontière du milieu élastique.

---

[1] R. Courant. Über ein Konvergenzerzeugenden des Prinzips in der Variationsrechnung, Nachrichten, 1922.