АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 2 1938 V. II, № 2

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ И СВОДОВ[1]

И. Я. ШТАЕРМАН

(Киев)

В технической литературе приводятся различные методы расчета труб и сводов на устойчивость. Наиболее характерными являются метод Mises (см. цитируемые ниже книги С. П. Тимошенко) и метод Engesser—Mayer.[2] Эти авторы рассматривают только случай деформаций, не выходящих за пределы пропорциональности; между тем в этом последнем случае задача сильно осложняется тем, что труба или свод являются статически неопределимой системой и, если напряжения в одном направлении выходят за пределы пропорциональности, и, следовательно, деформации в этом направлении начинают быстро возрастать, то это не только отразится на сопротивляемости в этом направлении, но вызовет также общее перераспределение усилий во всей оболочке. Таким образом обычный прием учета пластических деформаций тем, что в окончательные формулы для расчета на устойчивость вводится измененный модуль упругости, даст по отношению к оболочкам далеко не всегда удовлетворительные результаты.

В настоящей статье задача об устойчивости труб и цилиндрических сводов рассматривается с той же точки зрения, с какой нами в одной из прежних работ изучалась задача о расчете оболочек вращения,[3] а именно, мы рассматриваем оболочки анизотропной структуры, т. е. такие, в которых модули упругости при растяжении в различных направлениях, при сдвиге, изгибе и кручении представляют в общем случае независимые друг от друга величины [см. ниже уравнения (11)]. Задаваясь действительными значениями модулей упругости в различных направлениях и соответственно этому значениями коэффициентов уравнений (11), мы получаем по нашему методу в первом приближении величины критических нагрузок на свод. Заметим, что при этих

---

[1] Статья поступила в редакцию в связи с конференцией по пластическим деформациям при отделении технических наук Акад. Наук СССР. — *Прим. ред.*

[2] См. Die Knickfestigkeit, R. Mayer, Berlin, § 27, 1921.

[3] См. наши статьи: „К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек". Известия Киевского политехнического и сельскохозяйственного институтов, Киев, 1924, а также Zeitschr. f. angew. Math. u Mech., 1925.

предположениях можно получить решение не только для сплошной гладкой оболочки, но и для ребристой, а во многих случаях также для оболочки сетчатой (пространственная ферма). Во всех этих случаях надо ввести коэффициенты, входящие в уравнения (11) из рассмотрения деформации либо бесконечно малого элемента оболочки, либо, если речь идет о стержневой системе, из условий деформации отдельных форм.

Ввиду возможности подбирать коэффициенты в уравнениях (11) различными способами, наша теория дает возможность анализировать и изучить влияние на устойчивость различных факторов.

Особенно интересно то, что несогласные между собой теории Mises и Engesser—Mayer вытекают как частные случаи некоторых более общих результатов, причем выявляются особенности обеих теорий.

Переходя к изложению наших результатов, напомним основные уравнения теории цилиндрических оболочек.[1]

а) Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial y}-N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_2\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)-S_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-T_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}-N_1\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)-N_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+T_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\\ +S_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+S_1\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)+S_2\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)+\\ +T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+p=0,\end{aligned} \tag{3}$$

где T_1, T_2 — усилия растяжения в срединной поверхности, S_1 и S_2 — усилия сдвига, N_1 и N_2 — перерезывающие силы и u, v и w — перемещения средней поверхности в направлении осей x, y, z, причем оси x и y лежат в срединной поверхности, ось x направлена по образующей, а ось z направлена по нормали к ней, a — радиус цилиндрической поверхности до деформации, p — гидростатическое давление.

Аналогичную форму имеют остальные условия равновесия:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}-\frac{\partial M_2}{\partial y}-M_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-H_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+N_2=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial y}+H_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-M_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-N_1=0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}M_1\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)-M_2\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)+H_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\ +H_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+S_1-S_2=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где M_1 и M_2 — изгибающие моменты, H_1 и H_2 — крутящие моменты.

---

[1] См. С. П. Тимошенко, Вопросы устойчивости упругих систем, Изд. КУБУЧ, Л., 1935, или, его же, Теория упругости, ч. II, 1916.

b) Зависимости между деформациями и перемещениями:
растяжения

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{a}, \tag{7}$$

сдвиг средней поверхности

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

изменения кривизны

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{9}$$

кручение

$$\omega = \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{10}$$

c) Зависимости между усилиями и деформациями:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & T_2 &= C_2(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \\ S_1 &= S_2 = S = C_3\gamma, & M_1 &= -D_1(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \\ M_2 &= -D_2(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), & H_1 &= -H_2 = D_3\omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Конкретный подбор постоянных $C_1, \ldots, D_3$ мы приводим ниже.

Полагая в дальнейшем $dy = a d\varphi$, где $d\varphi$ — центральный угол, соответствующий дуге, равной dy, и a — радиус цилиндра, и пренебрегая нелинейными членами в уравнениях (1) — (6), за исключением членов, содержащих T_2 которые в случае гидростатического давления имеют преобладающее значение, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{a\,\partial\varphi} = 0, \\ &\frac{\partial T_2}{a\,\partial\varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{N_2}{a} = 0, \\ &p + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + \frac{T_2}{\rho} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где ρ — радиус кривизны деформированной средней поверхности.

Если считать, следуя Mises, среднюю поверхность нерастяжимою в направлении оси Oy, т. е. положить

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{a} = 0,$$

то радиус кривизны ρ выражается так:

$$\rho = a - w - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}.$$

Если ввести это выражение в третье уравнение системы (12) и исключить действие постоянной нагрузки до появления неустойчивости, то последнее уравнение системы приобретает вид:

$$\frac{T_2}{a} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} = \frac{p}{a}\left(w - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right). \tag{13}$$

Уравнения моментов относительно осей Ox и Oy будут иметь вид ($H=H_2=-H_1$):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial M_2}{\partial \varphi}-N_2=0, \\ &\frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial \varphi}+\frac{\partial M_1}{\partial x}-N_1=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Так как уравнений (12), (13), получающихся из условий равновесия недостаточно для определения неизвестных, в них входящих, то надо к ним присоединить уравнения (7)—(10) и уравнения (11) эластостатической системы

Введение коэффициентов $C_1, \ldots, D_3$ в уравнении (11) представляет особенность, на которой надо остановиться.

В исследовании Mises, относящемся исключительно к сплошным металлическим трубам,

$$\begin{aligned} &C_1=C_2=\frac{2Eh}{1-\mu^2}, \qquad C_3=\frac{Eh}{1+\mu}, \\ &D_1=D_2=\frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)} \qquad D_3=\frac{2Eh^3}{3(1+\mu)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Мы же оставляем временно эти коэффициенты произвольными, отличными друг от друга. Благодаря этому, как увидим ниже, можно выявить влияние каждого усилия в отдельности на устойчивость свода.

Пользуясь уравнениями (14), исключаем N_1 и N_2 из уравнений (12) и получаем после простых преобразований такую систему:

$$\begin{aligned} &a^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi\,\partial x}=0, \\ &a^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 T_2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 H_2}{\partial x\,\partial\varphi}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 M_2}{\partial\varphi^2}=0, \\ &a\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial\varphi}-a^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial\varphi^2}+T_2=p\left(w+\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Исключая далее из уравнений (11) коэффициенты деформации ε_1, ε_2, γ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, получаем:[1]

$$\begin{aligned} &T_1=C_1\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-w\right)\right], \qquad T_2=C_2\left[\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-w\right)+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right], \\ &S=C_3\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right), \\ &M_1=-D_1\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\mu}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\right], \qquad M_2=-D_2\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right], \\ &H=-D_3\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}+v\right). \end{aligned} \tag{17}$$

---

[1] Исключая T_1, T_2, M_2, H из уравнений равновесия, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, а при частных предположениях получаем только два или даже одно неизвестное. Мы коснемся этого вопроса подробнее в другом месте.

Так как система уравнений (16), (17) линейная, то она интегрируется посредством тригонометрических функций.

Положим, что

$$u = A\sin n\varphi \sin mx, \quad v = B\cos n\varphi \cos mx, \quad w = \sin n\varphi \cos mx, \tag{18}$$

где A и B — постоянные, которые мы определим ниже.

Коэффициент в выражении w принимаем для простоты равным единице; на точности результатов это предположение не может отразиться, так как уравнения однородны относительно u, v и w и, следовательно, из них можно определить только относительную, а не абсолютную величину перемещений u, v и w. Подставляя значения u, v и w из (18) в уравнения (17), найдем:

$$T_1 = C_1\left[Am - \frac{\mu}{a}(Bn + 1)\right]w, \quad T_2 = C_2\left[-\frac{1}{a}(Bn + 1) + Am\mu\right]w,$$

$$S = C_3\left[\frac{An}{a} - Bm\right]\cos n\varphi \, \sin mx,$$

$$M_1 = D_1\left[m^2 + \frac{\mu}{a^2}(n^2 + Bn)\right]w, \quad M_2 = D_2\left[\frac{1}{a^2}(n^2 + Bn) + \mu m^2\right]w,$$

$$H = D_3\frac{m}{a}(n + B)\cos n\varphi \, \sin mx.$$

Заметим, что производные от S и H, входящие в уравнения (16), нетрудно выразить через w. Действительно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial\varphi} = C_3\left[Bm - \frac{An}{a}\right]mnw,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial\varphi} = -D_3\frac{m^2 n}{a}(n + B)\,w.$$

Подставляя значения T_1, $T_2, \ldots, H$ в уравнения (16), получаем следующую систему уравнений:

$$Am\left[a^2 m^2 C_1 + n^2 C_3\right] - Bam^2 n\left[C_1\mu + C_3\right] - am^2 C_1\mu = 0,$$

$$Am\left[-a^2 m^2 C_1 + n^2 C_2\mu\right] - Bn\left[-am^2 C_1\mu + \frac{n^2}{a}C_2 + D_3\frac{m^2}{a} + D_2\frac{n^2}{a^2}\right] -$$
$$-\left[-am^2 C_1\mu + \frac{n^2}{a}C_2 + D_2\left(\frac{n^4}{a^3} + \frac{\mu m^2 n^2}{a}\right) + D_3\frac{m^2 n^2}{a}\right] = 0,$$

$$Am\left[a^2 m^2 C_1 + C_2(1 - n^2)\mu\right] - Bn\left[C_1 am^2\mu + \frac{C_2}{a}(1 - n^2) + \frac{m^2}{a}D_1\mu + D_3\frac{m^2}{a}\right] -$$
$$-\left[am^2 C_1\mu + \frac{C_2}{a}(1 - n^2) + D_1 am^2\left(m^2 + \frac{\mu n^2}{a^2}\right) + D_3\frac{m^2 n^2}{a}\right] - p(1 - n^2) = 0.$$

Из условий совместности этой системы трех уравнений с двумя неизвестными получаем уравнение для определения p;

$$p(n^2-1)\begin{vmatrix} a^2m^2C_1+n^2C_3 & am^2(C_1\mu+C_3) \\ -am^2C_1+n^2C_2\mu & -am^2C_1\mu+\frac{n^2}{a}C_2+D_3\frac{m^2}{a}+D_2\frac{n^2}{a^3} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a^2m^2C_1+n^2C_3 & am^2(C_1\mu+C_3) & am^2C_1\mu \\ -am^2C_1+n^2C_2\mu & -am^2C_1\mu+\frac{n^2}{a}C_2+\frac{D_2n^2}{a^3}+D_3\frac{m^2}{a} & -am^2C_1\mu+\frac{n^2}{a}C_2+D_2\left(\frac{n^4}{a^3}+\frac{\mu m^2n^2}{a}\right)+D_3\frac{m^2n^2}{a} \\ a^2m^2C_1+C_2(1-n^2)\mu & am^2C_1\mu+\frac{1-n^2}{a}C_2+\frac{m^2}{a}D_1\mu+D_3\frac{m^2}{a} & am^2C_1\mu+\frac{C_2}{a}(1-n^2)+D_1am^2\left(m^2+\frac{\mu n^2}{a^2}\right)+D_3\frac{m^2n^2}{a} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Уравнение (19) является основным уравнением данной теории; из него как частные случаи можно получить уравнения для определения упругой устойчивости в ряде индивидуальных случаев.

Так, если мы предположим оболочку однородной, то, полагая

$$C_1=C_2=C=\frac{2Eh}{1-\mu^2},\quad C_3=\frac{C(1-\mu)}{2},\quad D_1=D_2=D,\quad D_3=D(1-\mu),$$

где D — цилиндрическая жесткость, получим после преобразований и отбрасывания малых величин:

$$p=\frac{C(1-\mu^2)}{n^2-1}\,\frac{a^3m^4}{(n^2+a^2m^2)^2}+\frac{D}{a^3}\left[n^2-1+\frac{a^2m^2}{n^2+a^2m^2}(2n^2-1-\mu)\right]. \quad (20)$$

Наименьшее значение p получим при наименьшем значении m.

Уравнение (20) весьма близко к формуле Mises. Если мы рассматриваем устойчивость железных труб, то, полагая в формуле (20)

$$C=\frac{2Eh}{1-\mu^2},\quad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)},\quad \mu=0.3,\quad m=\frac{\pi}{l}$$

(последнее предположение соответствует свободно опертым краям оболочки), получим известную формулу Mises:

$$p_{\text{кр}}=\frac{2E}{(n^2-1)\left[1+\left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2\right]^2}\,\frac{h}{a}+0.73E\left[n^2-1+\frac{2n^2-1.3}{1+\left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2}\right]\frac{h^3}{a^3}. \quad (21)$$

Обратимся теперь к случаю, разобранному Engesser и Mayer. Они рассматривали цилиндрическую трубку, не принимающую в одном направлении растягивающих усилий и крутящих моментов. Поэтому в их расчетах принято $T_1=0$, $H=0$. Соответственно этому положим в основном уравнении (19)

$$C_1=0,\ D_3=0,\ C_2=C,\ C_3=C\frac{1-\mu}{2},\quad D_1=D_2=D. \tag{22}$$

Раскрывая определители, стоящие в левой и правой частях уравнения (19), и пренебрегая членами со степенями μ выше второй, получим:

$$p_{\text{кр}}=\frac{Dn^2\,[a^4 m^4+(n^2-1)^2]}{a^3\,(n^2-1)\,(n^2-a^2 m^2\mu)}+\frac{Dm^2\,(an^4-n^2-a^4 m^4)\,\mu}{a\,(n^2-1)\,(n^2-a^2 m^2\mu)}+\frac{aDm^4\,(1+n^2-an^2)\,\mu^2}{(n^2-1)\,(n^2-a^2 m^2\mu)}. \tag{23}$$

Если принять, что $\mu=0$, то найдем:

$$p_{\text{кр}}=\frac{aDm^4}{n^2-1}+\frac{D\,(n^2-1)}{a^3}. \tag{24}$$

Полагая далее $D=EJ$, $m=\frac{\pi}{l}$ (согласно условиям заделки) и количество волн $n=2$, найдем:

$$p_{\text{кр}}=\frac{3EJ}{a^2}+\frac{aEJ}{3}\,\frac{\pi^4}{l^4}.\ * \tag{25}$$

Введение в формулу $n=2$ имеет произвольный характер; правильнее, конечно, определить ее из условий минимума выражения для $p_{\text{кр}}$.

Положив в формуле (24) $n^2-1=x$, получим:

$$p_{\text{кр}}=\frac{aDm^4}{x}+\frac{Dx}{a^3}. \tag{26}$$

Для определения минимума, вычисляем:

$$\frac{dp_{\text{кр}}}{dx}=-\frac{aDm^4}{x^2}+\frac{D}{a^3}=0,$$
$$x=a^2 m^2,\qquad n=\sqrt{a^2 m^2+1}. \tag{a}$$

Подставляя x в формулу для $p_{\text{кр}}$, получаем:

$$p_{\text{кр}}=\frac{2Dm^2}{a} \tag{27}$$

или при

$$m=\frac{\pi}{l}\qquad p_{\text{кр}}=\frac{2\pi^2 D}{al^2}. \tag{28}$$

Эта формула дает пониженное значение для $p_{\text{кр}}$, так как мы должны ограничить число x тем обстоятельством, что n есть число целое и, следовательно, вычислить его не по формуле (a), а выбрать два ближайших целых числа, подставить их в формулу (26) и таким образом определить значение $p_{\text{кр}}$.

Интересно отметить, что в практических случаях, к которым Engesser и Mayer применяют свою формулу, n близко к 3.

---

* Формула (25) была выведена Энгессером, но с некоторыми другими коэффициентами; правильное значение коэффициентов нашел Р. Мейер, который и придал формуле приведенный в тексте вид. Этими обстоятельствами и объясняется вводимое нами название формулы формулой Энгессера—Мейера.

Примечания: 1. Выше принято

$$m = \frac{\pi}{l},$$

так как это соответствует свободно опертым краям трубы. Для некоторых других условий на краях, например, в случае если края заделаны, нетрудно подобрать соответствующее m.

2. Если мы ставим вопрос об устойчивости не трубы, а свода, то надо в наших уравнениях заменить n на $\frac{n\pi}{\alpha}$.

На ряду с формулой Энгессера—Майера (25) и нашей формулой (27) можно указать и множество других формул для вычисления $p_{\text{кр}}$ в отдельных конкретных случаях. Так, если предположить, что только $T_1 = 0$, $\mu = 0$ и считать H отличным от нуля, то получим:

$$p_{\text{кр}} = \frac{D}{a^3}\left(\sqrt{n^2-1} + \frac{a^2 m^2}{\sqrt{n^2-1}}\right)^2 - \frac{D}{a^3}\frac{a^2 m^2}{n^2}. \tag{29}$$

Дальше надлежит подобрать m и n так, чтобы, удовлетворяя условиям на краях, $p_{\text{кр}}$ имело бы минимальное значение, на чем мы в нашей краткой статье не останавливаемся.

Поступила в редакцию 10 I 1938.

STABILITY OF CYLINDRICAL TUBES AND ARCHES

E. Y. STEUERMANN

(Kiev)

(Summary)

In the present work the author considers the stability of arches after Mises; but the connection between the components of tensors of tension and moments and the tensors of deformation are given by equations (11), in which $C_1, C_2, \ldots, D_3$ denote constant values; if these constants are determined by means of equations (15), we then obtain the Mises theory of stability of tubes and arches in the assumption that the tension in the material does not exceed the limits of proportionality.

By a different selection of these constants we can obtain formulae for the stability of arches under plastic deformation, formulae for calculation of ribbed shells and further, in many cases, for latticed shells.

By virtue of the possibility of selecting by various means coefficients in equations (11), we can study the effect of different factors on stability.

The theory of Mises and that of Engesser — Mayer can be obtained as particular cases of these somewhat more general results and we ascertain the mechanical significance of the discord between these theories.