

## О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛИТ

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ

(Саратов)

На основании приближенной теории изгиба тонких плит напряжения в изгибаемой плите из однородного материала удается выразить через одну функцию  $w(x, y)$ , которая представляет собой прогибы срединной плоскости. Эта функция удовлетворяет уравнению 4-го порядка, однородному, если плита изгибается только усилиями и моментами, приложенными по краям, и неоднородному, если в числе изгибающих усилий есть нормальные нагрузки, распределенные по плоской поверхности. Левая часть уравнения прогибов в случае анизотропной плиты такого же вида, что и левая часть уравнения для функции напряжений в случае плоской задачи, а в случае изотропной плиты левые части указанных уравнений тождественны. Отсюда следует, что прогибы и напряжения при изгибе тонкой плиты можно выразить через функции комплексных переменных, подобно тому, как это делается в случае плоской задачи, и, проведя исследование характера этих функций, свести задачу об изгибе плиты к некоторой предельной задаче теории функций. Эти вопросы и составляют основное содержание настоящей статьи. Мы рассматриваем изгиб как анизотропных, так и изотропных плит, подробно анализируя случай изгиба усилиями и моментами, приложенными по краям плит. Обнаруживается сходство задачи об изгибе плиты с плоской задачей (позволяющее некоторые частные случаи решать по методам плоской задачи) и некоторые различия в деталях.

### I. Анизотропные плиты

§ 1. Основные уравнения теории изгиба. Рассмотрим упругое равновесие тонкой плоской плиты из анизотропного однородного материала изгибаемой моментами и нормальными усилиями, приложенными по краю и нормальными усилиями, приложенными к плоской поверхности. Пусть  $m$  — изгибающие моменты на единицу длины контура (плоскость момента в какой-нибудь точке контура перпендикулярна срединной плоскости плиты и проходит через нормаль к контуру),  $p$  — усилия, приложенные к краю, нормальные





где  $E_x, E_y, E_z$  — модули Юнга для растяжения — сжатия в направлении осей  $OX, OY, OZ$ ;  $G_{xy}$  — модуль сдвига для плоскостей, параллельных  $XOY$ ;  $\nu_{xy}$  — коэффициент Пуассона, выражающий сокращение в направлении оси  $OY$  при растяжении в направлении оси  $OX$ ;  $\nu_{yx}$  — коэффициент Пуассона, выражающий сокращение в направлении оси  $OX$  при растяжении в направлении оси  $OY$ , и т. д.

Приближенная теория изгиба тонких плит с малыми прогибами основана, как известно, на следующих допущениях: 1) при изгибе слои плиты, параллельные срединной плоскости, не оказывают давления друг на друга ( $\sigma_z = 0$ ); 2) сечения, до деформации плоские и нормальные к срединной плоскости, после деформации остаются плоскими и нормальными к изогнутой срединной поверхности.

Приведем краткий вывод основных уравнений теории изгиба анизотропных плит.

Обозначим  $u, v$  — проекции смещения на оси  $OX$  и  $OY$ ;  $w$  — прогибы срединной плоскости;  $2h$  — толщину плиты. На основании гипотезы плоских сечений следует, что<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} u &= -Z \frac{\partial w}{\partial x}, & v &= -Z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_x &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \gamma_{xy} &= -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.4)$$

( $Z$  — расстояние точки от срединной плоскости).

Из 3-го уравнения (1.1) при  $\sigma_z = 0$  получаем:

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{A_{33}} (A_{13} \varepsilon_x + A_{23} \varepsilon_y + A_{36} \gamma_{xy}) = \frac{Z}{A_{33}} \left( A_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2A_{36} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (1.5)$$

Подставляя это значение в 1-е, 2-е и 6-е уравнения (1.1), перепишем их таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -Z \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_y &= -Z \left( B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= -Z \left( B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$B_{ik} = (A_{ik} A_{33} - A_{i3} A_{k3}) : A_{33} \quad (i, k = 1, 2, 6).$$

Для определения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

<sup>1</sup> Б. Г. Галеркин, Упругие тонкие плиты, изд. Гостройизд., стр. 7, 1933.

Подставим выражения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  из (1.6) в эти уравнения и определим путем интегрирования  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , подчинив их условиям на плоских поверхностях:

$$(\tau_{xz})_{z=\pm h} = 0, \quad (\tau_{yz})_{z=\pm h} = 0.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Z^2 - h^2}{2} \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\ \tau_{yz} &= \frac{Z^2 - h^2}{2} \left[ B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по толщине плиты приводятся к моментам, а  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  — к силам. Введем в рассмотрение новые величины:  $M_x$ ,  $M_y$  — изгибающие моменты,  $H_{xy}$  — скручивающий момент,  $N_x$ ,  $N_y$  — перерезывающие силы — на единицу длины, связанные с напряжениями соотношениями:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h}^h \sigma_x Z dZ, \quad M_y = \int_{-h}^h \sigma_y Z dZ, \quad H_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} Z dZ, \\ N_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dZ, \quad N_y = \int_{-h}^h \tau_{yz} dZ. \end{aligned}$$

На основании (1.6) и (1.8) получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{2h^3}{3} \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_y &= -\frac{2h^3}{3} \left( B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy} &= -\frac{2h^3}{3} \left( B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} N_x &= -\frac{2h^3}{3} \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\ N_y &= -\frac{2h^3}{3} \left[ B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^3} Z, \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3} Z, \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3} Z, \\ \tau_{xz} &= \frac{3N_x}{4h^3} (h^2 - Z^2), \quad \tau_{yz} = \frac{3N_y}{4h^3} (h^2 - Z^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В силу последних зависимостей в дальнейшем достаточно ограничиваться исследованием моментов и перерезывающих сил — функций двух переменных  $x$  и  $y$ . На ряду с  $M_x$ ,  $M_y$ , ...,  $N_y$  будем рассматривать иногда изгибающий и скручивающий моменты и перерезывающую силу  $M_n$ ,  $H_{nt}$ ,  $N_n$ , действующие на элемент плиты с внешней нормалью  $n$ . Чтобы получить уравнение для прогибов, рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента плиты со сто-



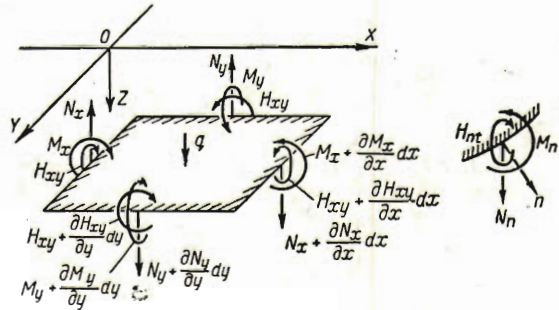
ронами, параллельными осям координат, под действием моментов, перерезывающих сил и нагрузки  $q$  (Фиг. 2).

Приравнявая нулю моменты относительно осей  $OX$  и  $OY$  и сумму проекций усилий на ось  $OZ$ , получаем зависимости:<sup>1</sup>

$$N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y}, \quad (1.12)$$

$$N_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q = 0. \quad (1.13)$$



Фиг. 2.

Подставляя в (1.12) выражения для перерезывающих сил, получим уравнение прогибов:

$$B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4B_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4B_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{3q}{2h^3}. \quad (1.14)$$

Это уравнение достаточно известно; оно имеется, например, в ряде работ Губера<sup>2</sup> по изгибу анизотропных плит (преимущественно прямоугольных и неразрезных). Уравнение подобное (1.14) с учетом сил, действующих в плоскости плиты, также применялось к исследованию устойчивости анизотропных плит.<sup>3</sup>

Если плита изгибается усилиями и моментами, приложенными только по краю, то уравнения (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) остаются в силе, а (1.14) принимает вид:

$$B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4B_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4B_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (1.15)$$

Это уравнение такого же вида, что и уравнение для функции напряжений в случае плоской задачи.<sup>4</sup>

Если материал плиты имеет в каждой точке  $Z$  взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, из которых одна параллельна срединной пло-

<sup>1</sup> Эти зависимости можно получить и из уравнений равновесия в напряжениях.

<sup>2</sup> М. Т. Huber, Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten, Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech., В. 6, Н. 3, 1926; — Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, Warszawa, 1929.

<sup>3</sup> Я. И. Секерж-Зенькович, К расчету на устойчивость листа фанеры как анизотропной пластинки. Труды ЦАГИ, № 76, 1931; С. В. Серенсен, Основы технической теории упругости, §§ 47—48, Харьков—Киев, 1934; Л. И. Балабух, Устойчивость фанерных пластинок, Техн. Возд. Флота, № 9, 1937; Г. Г. Ростовцев, К вопросу о приведенной ширине ортотропной пластинки, Техн. Возд. Флота, № 10, 1937.

<sup>4</sup> См. наши статьи: 1) Некоторые случаи плоской задачи теории упругости анизотропного тела в сборнике „Экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций“, ОНТИ, 1935; 2) К вопросу о влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в упругой анизотропной среде в сборнике „Прикладная математика и механика“, т. III, № 2, 1936.

скости,<sup>1</sup> то, направляя оси  $OX$  и  $OY$  перпендикулярно плоскостям упругой симметрии, имеем:

$$A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{45} = 0;$$

следовательно, и

$$B_{16} = B_{26} = 0.$$

Уравнение (1.14) принимает вид:

$$B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{3q}{2h^3}. \quad (1.16)$$

Выражая  $B_{ik}$  через „технические“ константы, имеем:

$$B_{11} = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}, \quad B_{22} = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}},$$

$$B_{12} = \frac{E_x \mu_{yx}}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} = \frac{E_y \mu_{xy}}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}, \quad B_{66} = G_{xy}.$$

В случае изотропного тела

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} + 2B_{66}$$

и уравнение (1.15) обращается в бигармоническое.

§ 2. Общие выражения для прогибов, моментов и перерезывающих сил. Нетрудно написать общее выражение для прогибов анизотропной плиты как общий интеграл уравнения (1.14). Общий интеграл этого уравнения известен; он зависит от корней алгебраического уравнения:

$$B_{22} \mu^4 + 4B_{26} \mu^3 + 2(B_{12} + 2B_{66}) \mu^2 + 4B_{16} \mu + B_{11} = 0. \quad (2.1)$$

Покажем, что уравнение (2.1) не может иметь вещественных корней.

Рассмотрим выражение потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице объема (1.2), для тела с такой же анизотропией, как у исследуемой плиты.

Потенциальная энергия деформации идеально упругого тела, отнесенная к единице объема, по крайней мере для достаточно малых значений компонентов деформации (не превышающих по абсолютной величине некоторого  $\epsilon > 0$ ), есть величина положительная.

Возьмем идеально упругое анизотропное тело с анизотропией вида (1.1) и зафиксируем какую-либо его точку, не делая никаких ограничений относительно его формы и характера внешних усилий. В этой фиксированной точке тела той или иной формы под влиянием тех или иных внешних усилий могут возникнуть какие угодно малые деформации; иначе говоря, задав произвольно 6 вещественных чисел, не превышающих по абсолютной величине некоторого  $\epsilon > 0$ , мы можем считать их компонентами деформации в данной фиксированной точке анизотропного тела.

<sup>1</sup> Плиты с такой анизотропией называют ортотропными.



Пусть в этой точке имеют место компоненты деформации, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{N}, & \varepsilon_y &= \frac{k^2}{N}, & \varepsilon_z &= -\frac{A_{13} + A_{23}k^2 + 2A_{36}k}{A_{33}N}, \\ \gamma_{yz} &= 0, & \gamma_{xz} &= 0, & \gamma_{xy} &= \frac{2k}{N} \end{aligned}$$

( $k, N$  — вещественные числа). Выражение для  $V$  в этой точке будет иметь вид:

$$V = \frac{1}{2N^2} [B_{22}k^4 + 4B_{26}k^3 + 2(B_{12} + 2B_{66})k^2 + 4B_{26}k + B_{11}].$$

Будем теперь придавать  $k$  всевозможные вещественные значения, подбывая каждый раз  $N$  так, чтобы выполнялись условия

$$|\varepsilon_x| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_y| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_z| < \varepsilon, \quad |\gamma_{xy}| < \varepsilon.$$

При всяких  $k$  и  $N$ , меняющихся указанным образом, имеем  $V > 0$ , т. е.

$$B_{22}k^4 + 4B_{26}k^3 + 2(B_{12} + 2B_{66})k^2 + 4B_{26}k + B_{11} > 0$$

при всяких вещественных  $k$ , а следовательно, уравнение (2.1) не имеет вещественных корней, а лишь комплексные или чисто мнимые.

Обозначим корни уравнения (2.1) так:

$$\mu_1 = \alpha + \beta i, \quad \mu_2 = \gamma + \delta i, \quad \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta i, \quad \bar{\mu}_2 = \gamma - \delta i \quad (\beta > 0, \delta > 0).$$

Исключая из рассмотрения случай попарно равных корней

$$(\mu_1 = \mu_2, \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2),$$

можем общий интеграл уравнения (1.14) записать так:

$$w = 2R [W_1(z_1) + W_2(z_2)] + w_0(x, y). \quad (2.2)$$

Здесь  $W_1(z_1), W_2(z_2)$  — произвольные аналитические функции комплексных переменных

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y,$$

$R$  — обозначение для вещественной части комплексного выражения, а  $w_0(x, y)$  — какое-нибудь частное решение уравнения (1.14).<sup>1</sup>

Дифференцируя  $w$  по  $x$  и по  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2R [W_1'(z_1) + W_2'(z_2)] + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 2R [\mu_1 W_1'(z_1) + \mu_2 W_2'(z_2)] + \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Штрихами здесь и в дальнейшем обозначаем производные по  $z_1$  и по  $z_2$ .

<sup>1</sup> Более подробно:

$$w = W_1(z_1) + W_2(z_2) + \bar{W}_1(\bar{z}_1) + \bar{W}_2(\bar{z}_2) + w_0$$

где  $\bar{z}_1 = x + \bar{\mu}_1 y, \bar{z}_2 = x + \bar{\mu}_2 y, \bar{W}_1(\bar{z}_1), \bar{W}_2(\bar{z}_2)$  — сопряженные функции.

Составляем выражения для моментов и перерезывающих сил по формулам (1.9), (1.10); находим:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{4h^3}{3} R [p_1 W_1''(z_1) + p_2 W_2''(z_2)] + M_x^0, \\ M_y &= -\frac{4h^3}{3} R [q_1 W_1''(z_1) + q_2 W_2''(z_2)] + M_y^0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} H_{xy} &= -\frac{4h^3}{3} R [r_1 W_1''(z_1) + r_2 W_2''(z_2)] + H_{xy}^0; \\ N_x &= -\frac{4h^3}{3} R [\mu_1 s_1 W_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 W_2'''(z_2)] + N_x^0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$N_y = +\frac{4h^3}{3} R [s_1 W_1'''(z_1) + s_2 W_2'''(z_2)] + N_y^0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= B_{11} + B_{12} \mu_1^2 + 2B_{16} \mu_1, \quad p_2 = B_{11} + B_{12} \mu_2^2 + 2B_{16} \mu_2, \\ q_1 &= B_{12} + B_{22} \mu_1^2 + 2B_{26} \mu_1, \quad q_2 = B_{12} + B_{22} \mu_2^2 + 2B_{26} \mu_2, \\ r_1 &= B_{16} + B_{26} \mu_1^2 + 2B_{66} \mu_1, \quad r_2 = B_{16} + B_{26} \mu_2^2 + 2B_{66} \mu_2, \\ s_1 &= \frac{B_{11}}{\mu_1} + 3B_{16} + (B_{12} + 2B_{66}) \mu_1 + B_{26} \mu_1^2, \\ s_2 &= \frac{B_{11}}{\mu_2} + 3B_{16} + (B_{12} + 2B_{66}) \mu_2 + B_{26} \mu_2^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$M_x^0, M_y^0, \dots, N_y^0$  находятся по формулам (1.9), (1.10), где надо заменить  $w$  на  $w_0$ , и являются известными функциями  $x$  и  $y$ .

Отметим соотношения, получающиеся на основании уравнения (2.1):

$$\begin{aligned} s_1 - r_1 &= \frac{p_1}{\mu_1}, \quad s_2 - r_2 = \frac{p_2}{\mu_2}, \\ s_1 + r_1 &= -\mu_1 q_1, \quad s_2 + r_2 = -\mu_2 q_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если плита изгибается лишь моментами  $m$  и усилиями  $p$ , распределенными по краю ( $q=0$ ), общее выражение для прогибов имеет вид:

$$w = 2R [W_1(z_1) + W_2(z_2)]. \quad (2.8)$$

Формулы для моментов и перерезывающих сил упрощаются:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{4h^3}{3} R [p_1 W_1''(z_1) + p_2 W_2''(z_2)], \\ M_y &= -\frac{4h^3}{3} R [q_1 W_1''(z_1) + q_2 W_2''(z_2)], \\ H_{xy} &= -\frac{4h^3}{3} R [r_1 W_1''(z_1) + r_2 W_2''(z_2)], \\ N_x &= -\frac{4h^3}{3} R [\mu_1 s_1 W_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 W_2'''(z_2)], \\ N_y &= +\frac{4h^3}{3} R [s_1 W_1'''(z_1) + s_2 W_2'''(z_2)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$



Таким образом прогибы, моменты и перерезывающие силы (и напряжения) выражаются через 2 функции комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$ , но эти переменные — усложненные. Такая же картина наблюдается и в случае плоской задачи анизотропного тела. Мы можем считать  $z_1$  и  $z_2$  простыми комплексными переменными

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

где

$$x_1 = x + \alpha y, \quad y_1 = \beta y, \quad x_2 = x + \gamma y, \quad y_2 = \delta y.$$

Тогда, если  $x$  и  $y$  изменяются в области  $S$  (область плиты),  $z_1$  и  $z_2$  будут изменяться в областях  $S_1$  и  $S_2$  на комплексных плоскостях  $z_1$  и  $z_2$ ;  $S_1$  и  $S_2$  получаются из  $S$  путем однородной деформации плоскости.<sup>1</sup>

§ 3. Контурные условия. Задача исследования изгиба плит сводится к определению двух функций  $W_1(z_1)$  и  $W_2(z_2)$  по условиям на контуре плиты.

Рассмотрим случай изгиба моментами и усилиями, приложенными только по краям. В зависимости от того, что задается на контуре плиты, мы можем различить две основные задачи.

1. Первая основная задача. На контуре задаются изгибающие моменты  $m(s)$  и изгибающие усилия  $p(s)$ , отнесенные к единице длины, как функции дуги  $s$  контура.

2. Вторая основная задача. Задаются прогибы  $w(s)$  края плиты и углы наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости  $XOY$  (производная  $w$  по нормали  $\frac{dw}{dn}$ ), т. е. деформации.

Если на контуре частично задаются усилия и моменты и частично деформации (например,  $m(s)$  и  $w(s)$  или, в случае плиты с отверстием, на одном контуре  $m(s)$  и  $p(s)$ , на другом  $w$  и  $\frac{dw}{dn}$ ), мы имеем смешанную задачу.

Условия в случае второй основной задачи сводятся к заданию производных  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  (как в случае первой основной задачи для плоской задачи).

Действительно, если задано  $w(s)$ , то можно считать известной и  $\frac{dw}{ds}$ ; производные  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  выражаются через  $\frac{dw}{ds}$  и  $\frac{dw}{dn}$ , а потому их можно считать заданными на контуре.

Обращаясь к условиям в случае первой основной задачи, будем считать, что контур области плиты не имеет угловых точек, т. е. касательная

<sup>1</sup> См. нашу статью „Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела“ в сборнике „Прикладная математика и механика“, новая серия, т. I, вып. 1, 1937.

к нему меняется непрерывно. Условия на контуре записываются таким образом:<sup>1</sup>

$$M_n = m(s), \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = p(s), \quad (3.1)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к контуру плиты.

Преобразуем второе условие, интегрируя по дуге от некоторой точки контура, принятой за начальную, до переменной точки. Для определенности условимся считать положительным направлением отсчет дуг такое, при котором контур, если смотреть со стороны положительной оси  $OZ$ , обходится против часовой стрелки. Второе условие переписывается таким образом:

$$J + H_{nt} = f(s) + C. \quad (3.2)$$

Здесь

$$J = \int_0^s N_n ds, \quad f(s) = \int_0^s p(s) ds,$$

$C$  — постоянная интегрирования (вещественная).

Перейдем к величинам  $M_x, M_y, \dots, N_y$ ; формулы перехода, очевидно, будут такие же, как формулы для соответствующих напряжений:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(n, x) + M_y \cos^2(n, y) + 2H_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y), \\ H_{nt} &= (M_y - M_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + H_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)], \\ N_n &= \pm [N_x \cos(n, x) + N_y \cos(n, y)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

(всюду  $n$  — внешняя нормаль к контуру; знак  $+$  относится к случаю, когда рассматривается внешний контур плиты, и минус —, когда рассматривается контур отверстия в плите).

Условия на контуре переписутся так:

$$\begin{aligned} M_x \cos^2(n, x) + M_y \cos^2(n, y) + 2H_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) &= m(s), \\ (M_y - M_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + H_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)] + J &= f(s) + C. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Умножим 1-е уравнение (3.4) на  $\cos(n, x)$ , 2-е — на  $\cos(n, y)$  и вычтем 2-е из первого, затем умножим 1-е уравнение (3.4) на  $\cos(n, y)$ , 2-е на  $\cos(n, x)$  и сложим; получим:

$$\begin{aligned} M_x \cos(n, x) + (H_{xy} - J) \cos(n, y) &= m \cos(n, x) - (f + C) \cos(n, y), \\ (H_{xy} + J) \cos(n, x) + M_y \cos(n, y) &= m \cos(n, y) + (f + C) \cos(n, x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как

$$\cos(n, x) = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = \mp \frac{dx}{ds}$$

<sup>1</sup> А. Ляв, Математическая теория упругости, ОНТИ, стр. 478—481, 1935. Если задается на контуре также скручивающий момент  $h(s)$ , условия (3.1) не изменяются. Применяя известное преобразование усилий, мы можем (при указанных ограничениях, налагаемых на вид контура) привести систему нагрузок  $[m(s), h(s), p(s)]$  к системе  $[m(s), p(s)]$



(верхние знаки надо взять, когда рассматривается внешний контур плиты, а нижние — когда рассматривается контур отверстия), то

$$J = \int_0^s (N_x dy - N_y dx),$$

причем под знаком интеграла — полный дифференциал [см. уравнение (1.13), при  $q=0$ ]. Используя формулы (2.9), имеем:

$$J = -\frac{4h^3}{8} R [s_1 W_1''(z_1) + s_2 W_2''(z_2)] + \text{const.}$$

Подставляя это значение в (3.5) и используя формулы (2.9), перепишем (3.5) таким образом:

$$\begin{aligned} -\frac{4h^3}{8} R \{ W_1''(z_1) [p_1 dy + (s_1 - r_1) dx] + W_2''(z_2) [p_2 dy + (s_2 - r_2) dx] \} = \\ = m dy + (f + C) dx, \\ -\frac{4h^3}{8} R \{ W_1''(z_1) [(s_1 + r_1) dy - q_1 dx] + W_2''(z_2) [(s_2 + r_2) dy - q_2 dx] \} = \\ = -m dx + (f + C) dy. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Вспоминая соотношения (2.7), замечаем, что левые части уравнений (3.6) представляют собой полные дифференциалы. Интегрируя еще раз по дуге, придадим условиям на контуре следующую окончательную форму:

$$\begin{aligned} \frac{4h^3}{8} R \left[ \frac{p_1}{\mu_1} W_1'(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2} W_2'(z_2) \right] = - \int_0^s (m dy + f dx) - Cx + C_1, \\ \frac{4h^3}{8} R [q_1 W_1'(z_1) + q_2 W_2'(z_2)] = \int_0^s (-m dx + f dy) + Cy + C_2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $C_1, C_2$  — вещественные постоянные интегрирования.

Условия (3.7) такого же типа, что и контурные условия в случае плоской задачи. Разница лишь в постоянных коэффициентах левой части. Таким образом в случае первой основной задачи теории плит на контуре можно считать заданными линейные комбинации первых производных функций  $W_1(z_1)$  и  $W_2(z_2)$  и сопряженных им функций.

Если плита изгибается также и нагрузкой  $q$ , а задаются усилия и моменты, приложенные к контуру, левые части условий (3.7) не меняются, и эти условия сохраняют свою форму. В правых же частях добавляются некоторые известные функции [что нетрудно заключить на основании формул (2.4), (2.5)].

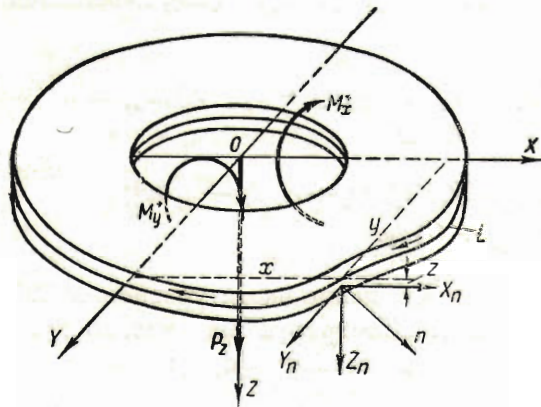
Практический интерес представляют задачи об изгибе плит, закрепленных по контуру, нормальной нагрузкой  $q$ . Нетрудно сообразить, что в случае заделанного края условия на контуре будут такими же, как в случае второй основной задачи. В случае опертого края задача принадлежит к типу смешанных задач [что нетрудно заключить опять на основании формул (2.2), (2.4) и (2.5)].

§ 4. О характере функций  $W_1(z_1)$  и  $W_2(z_2)$  внутри области плиты, изгибаемой усилиями и моментами, приложенными по краям. Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять функции  $W_1(z_1)$  и  $W_2(z_2)$  внутри области плиты. Ограничимся исследованием для плит изгибаемых только усилиями и моментами, приложенными по контурам плиты.

Исследование лучше начать со случая, когда плита снабжена отверстиями (в форме цилиндрических полостей с образующей, нормальной к срединной плоскости).

Пусть плита имеет одно отверстие, край которого загружен изгибающими моментами  $m$  и силами  $p$ . Эта система нагрузки, очевидно, приводится к главному вектору  $P_z$ , нормальному к плоскости  $XOY$ , и главному моменту с составляющими  $M_x^*$  и  $M_y^*$ .

Окружим отверстие каким-либо замкнутым контуром  $L$ , не имеющим с контуром отверстия общих точек и лежащим целиком в области плиты, и рассмотрим равновесие части плиты, заключенной между контуром  $L$  и контуром отверстия. Обозначая  $X_n, Y_n, Z_n$  проекции напряжений, действующих на внешней цилиндрической поверхности (фиг. 3), имеем уравнения равновесия:



Фиг. 3.

$$\int_{L-h}^h \int_{L-h}^h X_n dZ ds = 0, \quad \int_{L-h}^h \int_{L-h}^h Y_n dZ ds = 0, \quad \int_{L-h}^h \int_{L-h}^h Z_n dZ ds + P_z = 0,$$

$$\int_{L-h}^h \int_{L-h}^h (Y_n Z - Z_n y) dZ ds + M_x^* = 0, \quad \int_{L-h}^h \int_{L-h}^h (Z_n x - X_n Z) dZ ds + M_y^* = 0, \quad (4.1)$$

$$\int_{L-h}^h \int_{L-h}^h (X_n y - Y_n x) dZ ds = 0,$$

где  $n$  — направление внешней нормали к контуру  $L$ .

Так как

$$X_n = \frac{3}{2h^3} Z [M_x \cos(n, x) + H_{xy} \cos(n, y)],$$

$$Y_n = \frac{3}{4h^3} Z [H_{xy} \cos(n, x) + M_y \cos(n, y)],$$

$$Z_n = \frac{3}{4h^3} (h^2 - Z^2) [N_x \cos(n, x) + N_y \cos(n, y)]$$

и

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$



то 1-е, 2-е и 6-е из уравнений (4.1) будут удовлетворяться тождественно, остальные же уравнения приведутся к следующим:

$$\int_L (N_x dy - N_y dx) = -P_z,$$

$$\int_L [(H_{xy} - N_x y) dy - (M_y - N_y y) dx] = -M_x^*, \quad (4.2)$$

$$\int_L [(N_x x - M_x) dy - (N_y x - H_{xy}) dx] = -M_y^*.$$

Замечаем на основании (1.12)—(1.13), что под интегралами — полные дифференциалы. Обозначим приращение, которое получает функция  $W_1(z_1)$  при одном полном обходе по контуру  $L$  в положительном направлении, через  $\Delta_1$ , приращения производных  $W_1'(z_1)$ ,  $W_1''(z_1)$  и  $W_1'''(z_1)$  через  $\Delta_1'$ ,  $\Delta_1''$ ,  $\Delta_1'''$ . Приращения функций  $W_2(z_2)$ ,  $W_2'(z_2)$ ,  $W_2''(z_2)$  и  $W_2'''(z_2)$  при обходе по тому же контуру обозначим через  $\Delta_2$ ,  $\Delta_2'$ ,  $\Delta_2''$ , и  $\Delta_2'''$ ; сопряженные величины отмечаем, как обычно, чертой.

Заменим моменты и перерезывающие силы их выражениями (2.9). Тогда (4.2) переищутся таким образом (знак  $R$  введен для сокращения записи):

$$\frac{4h^3}{3} R \int_L [s_1 W_1'''(z_1) dz_1 + s_2 W_2'''(z_2) dz_2] = P_z,$$

$$\frac{4h^3}{3} R \int_L \{ [r_1 W_1''(z_1) - \mu_1 s_1 y W_1'''(z_1) + r_2 W_2''(z_2) - \mu_2 s_2 y W_2'''(z_2)] dy - [q_1 W_1''(z_1) + s_1 y W_1'''(z_1) + q_2 W_2''(z_2) + s_2 y W_2'''(z_2)] dx \} = M_x^*, \quad (4.3)$$

$$\frac{4h^3}{3} R \int_L \{ [\mu_1 s_1 x W_1'''(z_1) - p_1 W_1''(z_1) + \mu_2 s_2 x W_2'''(z_2) - p_2 W_2''(z_2)] dy + [r_1 W_1''(z_1) + s_1 x W_1'''(z_1) + r_2 W_2''(z_2) + s_2 x W_2'''(z_2)] dx \} = M_y^*.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{4h^3}{3} R \{ s_1 W_1''(z_1) + s_2 W_2''(z_2) \}_L = P_z,$$

$$\frac{4h^3}{3} R \{ q_1 W_1'(z_1) + q_2 W_2'(z_2) + y [s_1 W_1''(z_1) + s_2 W_2''(z_2)] \}_L = -M_x^*, \quad (4.4)$$

$$\frac{4h^3}{3} R \left\{ \frac{p_1}{\mu_1} W_1'(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2} W_2'(z_2) - x [s_1 W_1''(z_1) + s_2 W_2''(z_2)] \right\}_L = -M_y^*.$$

Знаком  $\{ \}_L$  обозначено приращение величины при обходе по контуру  $L$  в положительном направлении. Окончательно (4.4) переищим так:

$$s_1 \Delta_1'' + s_2 \Delta_2'' + \bar{s}_1 \bar{\Delta}_1'' + \bar{s}_2 \bar{\Delta}_2'' = \frac{3P_z}{2h^3}; \quad (4.5)$$

$$q_1 \Delta_1' + q_2 \Delta_2' + \bar{q}_1 \bar{\Delta}_1' + \bar{q}_2 \bar{\Delta}_2' + y (s_1 \Delta_1'' + s_2 \Delta_2'' + \bar{s}_1 \bar{\Delta}_1'' + \bar{s}_2 \bar{\Delta}_2'') = -\frac{3M_x^*}{2h^3}, \quad (4.6)$$

$$\frac{p_1}{\mu_1} \Delta_1' + \frac{p_2}{\mu_2} \Delta_2' + \frac{\bar{p}_1}{\mu_1} \bar{\Delta}_1' + \frac{\bar{p}_2}{\mu_2} \bar{\Delta}_2' - x (s_1 \Delta_1'' + s_2 \Delta_2'' + \bar{s}_1 \bar{\Delta}_1'' + \bar{s}_2 \bar{\Delta}_2'') = -\frac{3M_y^*}{2h^3}.$$

Если плита имеет  $N$  отверстий, условия (4.5)—(4.6) должны выполняться для каждого из контуров, окружающих одно отверстие. Эти условия сохраняют свою форму, но вместо  $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \bar{\Delta}_2'$  надо написать  $\Delta_{1k}'', \Delta_{2k}'', \dots, \bar{\Delta}_{2k}'$  (приращения при обходе по контуру вокруг  $k$ -ого отверстия) и вместо  $P_z, M_x^*, M_y^* — P_{zk}, M_{xk}^*, M_{yk}^*$  (главный вектор и главный момент нагрузки на  $k$ -ом контуре). Всего будет  $3N$  уравнений типа (4.5)—(4.6).

Кроме условий (4.5)—(4.6), должны выполняться следующие: 1) напряжения (т. е. моменты и перерезывающие силы) должны быть функциями координат  $x, y$ , однозначными в области  $S$  и непрерывными во всех точках области, за исключением, может быть, точек контура и бесконечно удаленной точки; 2) срединная поверхность при действии только усилий и моментов, приложенных к краю плиты, должна быть поверхностью гладкой, без разрывов, изломов и бесконечно удаленных точек, т. е.  $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  должны быть функциями  $x, y$ , однозначными в области  $S$  и непрерывными во всех точках области, за исключением, может быть, точек контура и бесконечно удаленной точки области.

Условия однозначности получим, составляя приращения  $N_x, N_y, M_x, M_y, H_{xy}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  и  $w$  при одном полном обходе по контуру  $L$  в положительном направлении и приравнявая их нулю.

Условия однозначности перерезывающих сил приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \mu_1 s_1 \Delta_1''' + \mu_2 s_2 \Delta_2''' + \bar{\mu}_1 \bar{s}_1 \bar{\Delta}_1''' + \bar{\mu}_2 \bar{s}_2 \bar{\Delta}_2''' &= 0, \\ s_1 \Delta_1''' + s_2 \Delta_2''' + \bar{s}_1 \bar{\Delta}_1''' + \bar{s}_2 \bar{\Delta}_2''' &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условия однозначности моментов будут выполнены, если вторые производные  $w$  будут однозначными функциями  $x, y$  (в силу того, что на основании уравнений закона Гука можно выразить деформации через напряжения однозначно, т. е. можно разрешить уравнения (1.9) относительно  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ). Условия однозначности вторых производных запишутся так:

$$\begin{aligned} \Delta_1'' + \Delta_2'' + \bar{\Delta}_1'' + \bar{\Delta}_2'' &= 0, \\ \mu_1 \Delta_1'' + \mu_2 \Delta_2'' + \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1'' + \bar{\mu}_2 \bar{\Delta}_2'' &= 0, \\ \mu_1^2 \Delta_1'' + \mu_2^2 \Delta_2'' + \bar{\mu}_1^2 \bar{\Delta}_1'' + \bar{\mu}_2^2 \bar{\Delta}_2'' &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Условия однозначности первых производных от прогибов и самих прогибов запишутся так:

$$\Delta_1' + \Delta_2' + \bar{\Delta}_1' + \bar{\Delta}_2' = 0, \quad (4.9)$$

$$\mu_1 \Delta_1' + \mu_2 \Delta_2' + \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1' + \bar{\mu}_2 \bar{\Delta}_2' = 0;$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 = 0. \quad (4.10)$$



Равенства (4.7)—(4.10), разумеется, должны быть справедливы не только для контура  $L$ , окружающего одно отверстие, но и для всякого замкнутого контура, лежащего целиком в области плиты.

Вернемся к плите с одним отверстием.

Вспоминая соотношения (2.6)—(2.7), перепишем уравнения для приращений  $\Delta_1''$ ,  $\Delta_2''$ ,  $\bar{\Delta}_1''$  и  $\bar{\Delta}_2''$  таким образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1'' + \Delta_2'' + \bar{\Delta}_1'' + \bar{\Delta}_2'' &= 0, \\ \mu_1 \Delta_1'' + \mu_2 \Delta_2'' + \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1'' + \bar{\mu}_2 \bar{\Delta}_2'' &= 0, \\ \mu_1^2 \Delta_1'' + \mu_2^2 \Delta_2'' + \bar{\mu}_1^2 \bar{\Delta}_1'' + \bar{\mu}_2^2 \bar{\Delta}_2'' &= 0, \\ \frac{\Delta_1''}{\mu_1} + \frac{\Delta_2''}{\mu_2} + \frac{\bar{\Delta}_1''}{\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{\Delta}_2''}{\bar{\mu}_2} &= \frac{3P_x}{2h^3 B_{11}}; \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1' + \Delta_2' + \bar{\Delta}_1' + \bar{\Delta}_2' &= 0, \\ \mu_1 \Delta_1' + \mu_2 \Delta_2' + \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1' + \bar{\mu}_2 \bar{\Delta}_2' &= 0, \\ \mu_1^2 \Delta_1' + \mu_2^2 \Delta_2' + \bar{\mu}_1^2 \bar{\Delta}_1' + \bar{\mu}_2^2 \bar{\Delta}_2' &= -\frac{3M_x^*}{2h^3 B_{22}} - \frac{B_{11}}{B_{22}} y \left( \frac{\Delta_1''}{\mu_1} + \frac{\Delta_2''}{\mu_2} + \frac{\bar{\Delta}_1''}{\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{\Delta}_2''}{\bar{\mu}_2} \right), \\ \frac{\Delta_1'}{\mu_1} + \frac{\Delta_2'}{\mu_2} + \frac{\bar{\Delta}_1'}{\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{\Delta}_2'}{\bar{\mu}_2} &= -\frac{3M_y^*}{2h^3 B_{11}} + x \left( \frac{\Delta_1''}{\mu_1} + \frac{\Delta_2''}{\mu_2} + \frac{\bar{\Delta}_1''}{\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{\Delta}_2''}{\bar{\mu}_2} \right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Определитель систем (4.11) и (4.12) для неравных  $\mu_1$  и  $\mu_2$  отличен от нуля:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \bar{\mu}_1^2 & \bar{\mu}_2^2 \\ \frac{1}{\mu_1} & \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\bar{\mu}_1} & \frac{1}{\bar{\mu}_2} \end{vmatrix} &= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2} (\mu_1 - \mu_2) (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_1 - \bar{\mu}_1) (\mu_2 - \bar{\mu}_2) (\mu_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_2 - \bar{\mu}_1) = \\ &= 4\beta\delta \frac{[(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2][(\alpha - \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2]}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}. \end{aligned}$$

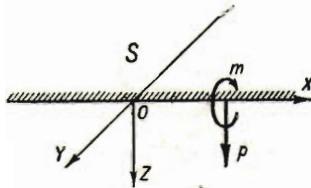
Таким образом в случае плиты с отверстиями, на краю которых приложены усилия и моменты, приводящиеся к главному вектору и главному моменту, на основании вышесказанного  $W_1(z_1)$  и  $W_2(z_2)$  являются функциями  $x, y$ , непрерывными вместе со своими производными в области  $S$  (за исключением, может быть, точек контура и бесконечно удаленной точки). Каждая из функций  $W_1(z_1)$ ,  $W_1'(z_1)$ ,  $W_1''(z_1)$ ,  $W_2(z_2)$ ,  $W_2'(z_2)$  и  $W_2''(z_2)$  состоит из однозначной части и многозначной части; приращения многозначных частей при обходе по замкнутым контурам, окружающим отверстие, не зависят от вида отверстия и контура, а лишь от главного вектора и главного момента. Если плита не имеет отверстий, или если отверстия загружены уравновешенными усилиями и моментами ( $P_{zk} = M_{xk}^* = M_{yk}^* = 0$ ), или совсем не загружены, то  $W_1''(z_1)$ ,  $W_2''(z_2)$ ,  $W_1'(z_1)$  и  $W_2'(z_2)$  — однозначные функции координат  $x$  и  $y$ .

На основании сказанного ясно, что задача об изгибе тонкой анизотропной плиты усилиями и моментами, приложенными к краю, имеет много общего с плоской задачей для анизотропного тела, хотя в деталях имеются и различия. Именно, в обеих задачах дело сводится к определению двух функций переменных

$$z_1 = x + \mu_1 y \quad \text{и} \quad z_2 = x' + \mu_2 y$$

по однотипным условиям на контурах; условия, которым должны удовлетворять функции внутри области тела, несколько различны.<sup>1</sup> Это дает основание думать, что если будет решена плоская задача, то соответствующая задача изгиба тонких плит решится таким же методом. Нижеследующие частные задачи решаются так же, как соответствующие плоские задачи.

§ 5. Решение задачи для полуплоскости. Рассмотрим задачу об изгибе плиты с областью в виде бесконечной полуплоскости под влиянием



Фиг. 4.

усилий и моментов, распределенных по краю. Если материал имеет в каждой точке  $z$  взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, из которых одна параллельна срединной плоскости, а другая перпендикулярна линии края, задача легко решается (при некоторых ограничениях, накладываемых на заданные величины) с помощью интегралов Фурье.

Рассмотрим первую основную задачу. Расположим координатные оси, как на фиг. 4. Будем считать, что заданные на границе изгибающие моменты  $m(x)$  и силы  $p(x)$  удовлетворяют условиям Дирихле и абсолютной интегрируемости на всем бесконечном интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Для простоты будем считать, что  $m(x)$  и  $p(x)$  — функции четные.

Условия на контуре:

$$M_y = m(x), \quad N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} = p(x). \quad (5.1)$$

Имеет место уравнение (1.15), где

$$B_{16} = B_{26} = 0;$$

ищем его решение в виде:<sup>2</sup>

$$w = \int_0^{\infty} \Phi(t, y) \cos tx \, dt. \quad (5.2)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2$  — корни уравнения

$$B_{22} \lambda^4 - 2(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{11} = 0. \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> См. нашу статью „Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела“ в сборнике „Прикладная математика и механика“, новая серия, т. I, № 1, 1937.

<sup>2</sup> См. указанную статью в сборнике „Экспериментальные методы“, стр. 166.



Эти корни могут быть лишь одного из видов:

- I.  $\lambda_1 = \beta, \lambda_2 = \delta;$
- II.  $\lambda_1 = \alpha i + \beta, \lambda_2 = -\alpha i + \beta;$
- III.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta (\beta > 0, \delta > 0).$

В случаях I и II получаем:

$$w = \int_0^{\infty} [A(t) e^{\lambda_1 t y} + B(t) e^{-\lambda_1 t y} + C(t) e^{\lambda_2 t y} + D(t) e^{-\lambda_2 t y}] \cos tx \, dt, \quad (5.4)$$

где  $A, B, C$  и  $D$  — функции  $t$ , подлежащие определению.  $A$  и  $C$  полагаем равными нулю (в противном случае на бесконечности получатся заведомо бесконечные напряжения, что при данном распределении изгибающих усилий и моментов на границе представляется мало вероятным).

На основании (1.9) — (1.10) получаем:

$$M_x = \frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} [(B_{11} - \lambda_1^2 B_{12}) B e^{-\lambda_1 t y} + (B_{11} - \lambda_2^2 B_{12}) D e^{-\lambda_2 t y}] t^2 \cos tx \, dt,$$

$$M_y = \frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} [(B_{12} - \lambda_1^2 B_{22}) B e^{-\lambda_1 t y} + (B_{12} - \lambda_2^2 B_{22}) D e^{-\lambda_2 t y}] t^2 \cos tx \, dt,$$

$$H_{xy} = -\frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} 2B_{66} (\lambda_1 B e^{-\lambda_1 t y} + \lambda_2 D e^{-\lambda_2 t y}) t^2 \sin tx \, dt,$$

$$N_x = -\frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} \{ [B_{11} - \lambda_1^2 (B_{12} + 2B_{66})] B e^{-\lambda_1 t y} + [B_{11} - \lambda_2^2 (B_{12} + 2B_{66})] D e^{-\lambda_2 t y} \} t^3 \sin tx \, dt, \quad (5.5)$$

$$N_y = -\frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} [\lambda_1 (B_{12} + 2B_{66} - \lambda_1^2 B_{22}) B e^{-\lambda_1 t y} + \lambda_2 (B_{12} + 2B_{66} - \lambda_2^2 B_{22}) D e^{-\lambda_2 t y}] t^3 \cos tx \, dt.$$

$$N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} = \frac{2h^3}{3} \int_0^{\infty} [\lambda_1 (B_{22} \lambda_1^2 - B_{12} - 4B_{66}) B e^{-\lambda_1 t y} + \lambda_2 (B_{22} \lambda_2^2 - B_{12} - 4B_{66}) D e^{-\lambda_2 t y}] t^3 \cos tx \, dt.$$

На контуре  $y = 0$  имеем:

$$\int_0^{\infty} [(B_{12} - \lambda_1^2 B_{22}) B + (B_{12} - \lambda_2^2 B_{22}) D] t^2 \cos tx \, dt = \frac{3}{2h^3} m(x), \quad (5.6)$$

$$\int_0^{\infty} [\lambda_1 (B_{22} \lambda_1^2 - B_{12} - 4B_{66}) B + \lambda_2 (B_{22} \lambda_2^2 - B_{12} - 4B_{66}) D] t^3 \cos tx \, dt = \frac{3}{2h^3} p(x).$$

Решая эти интегральные уравнения Фурье, получаем:

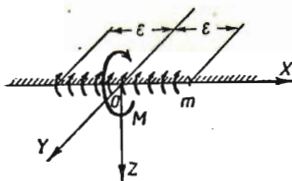
$$\begin{aligned} [(B_{12} - \lambda_1^2 B_{22}) B + (B_{12} - \lambda_2^2 B_{22}) D] t^2 &= \frac{3}{\pi h^3} \psi(t), \\ [\lambda_1 (B_{22} \lambda_1^2 - B_{12} - 4B_{66}) B + \lambda_2 (B_{22} \lambda_2^2 - B_{12} - 4B_{66}) D] t^3 &= \frac{3}{\pi h^3} \chi(t), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\psi(t) = \int_0^\infty m(\xi) \cos t\xi d\xi, \quad \chi(t) = \int_0^\infty p(\xi) \cos t\xi d\xi.$$

Получаем следующие значения функций:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\pi h^3 d} \cdot \frac{1}{t^2} \left[ \lambda_2 (B_{22} \lambda_2^2 - B_{12} - 4B_{66}) \psi(t) - \frac{B_{12} - B_{22} \lambda_2^2}{t} \chi(t) \right], \\ D &= -\frac{3}{\pi h^3 d} \cdot \frac{1}{t^2} \left[ \lambda_1 (B_{22} \lambda_1^2 - B_{12} - 4B_{66}) \psi(t) - \frac{B_{12} - B_{22} \lambda_1^2}{t} \chi(t) \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$



Фиг. 5.

где

$$d = (\lambda_1 - \lambda_2) \{ B_{12} [B_{12} + 4B_{66} - B_{22}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] + B_{22} \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 B_{22} + 4B_{66}) \}.$$

В случае нечетных  $m(x)$  и  $p(x)$  решение находится совершенно аналогичным путем. Для случая равных корней решение найдется аналогичным путем или получится из предыдущего решения при  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ .

Рассмотрим случай, когда в начале координат приложен сосредоточенный изгибающий момент  $M$ . Сперва рассматриваем случай, когда на малом участке границы  $(-\epsilon, +\epsilon)$  распределены постоянные моменты  $m$ , проводящиеся к  $M$  (Фиг. 5). Имеем:

$$\psi(t) = \frac{M}{2} \frac{\sin t\epsilon}{t\epsilon}, \quad \chi(t) = 0.$$

В пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  получаем:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3M}{2\pi h^3 d} \lambda_2 (B_{22} \lambda_2^2 - B_{12} - 4B_{66}) \frac{1}{t^2}, \\ D &= -\frac{3M}{2\pi h^3 d} \lambda_1 (B_{22} \lambda_1^2 - B_{12} - 4B_{66}) \frac{1}{t^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Все интегралы из (5.5) вычисляются без труда. После некоторых преобразований, учитывая зависимости

$$\lambda_1 \lambda_2 = \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{22}}}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2 \frac{B_{12} + 2B_{66}}{B_{22}},$$



получаем следующие выражения для моментов в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} M_x &= Mgy \frac{(B_{12}^2 - B_{11}B_{22} + 4B_{12}B_{66})x^2}{B_{22}x^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})x^2y^2 + B_{11}y^4}, \\ M_y &= Mgy \frac{4B_{22}B_{66}x^2 + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)y^2}{B_{22}x^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})x^2y^2 + B_{11}y^4}, \\ H_{xy} &= Mgx \frac{2B_{22}B_{66}x^2 + 2B_{12}B_{66}y^2}{B_{22}x^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})x^2y^2 + B_{11}y^4}, \\ \left( g = \frac{\sqrt{B_{11}B_{22}}}{\pi} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}\sqrt{B_{11}B_{22}}} \right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Перерезывающие силы найдутся по формулам (1.12).

Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  изменяются обратно пропорционально расстоянию от точки приложения момента, а  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  — обратно пропорционально квадрату расстояния.

§ 6. Решение задачи для бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Рассмотрим такую задачу: анизотропная плита с областью  $S$  в виде бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием изгибается усилиями  $p$  и моментами  $m$ , распределенными по краю отверстия. Требуется исследовать распределение напряжений и деформации.

Задача решается тем же методом, что и соответствующая плоская задача.<sup>1</sup>

Расположим систему координат, как на фиг. 6, и возьмем уравнение эллипса в виде:

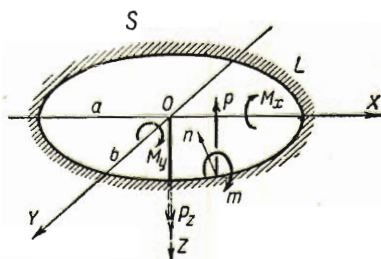
$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta. \tag{6.1}$$

Имеем:

$$\cos(n, y) = -\frac{a \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}}, \quad \cos(n, x) = -\frac{b \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Здесь  $a, b$  — полуоси,  $\vartheta$  — параметр, который можно рассматривать как координату точки на контуре  $L$  эллипса. Пусть  $P_z, M_x^*, M_y^*$  — главный вектор и главный момент изгибающих усилий и моментов.  $m$  и  $p$  можно рассматривать как функции  $\vartheta$ ; полагаем, что они разложены в ряды:

$$\begin{aligned} m &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \\ p &= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}} \left[ c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\vartheta + d_k \sin k\vartheta) \right]. \end{aligned} \tag{6.2}$$



Фиг. 6.

<sup>1</sup> См. нашу статью „Напряжения в неограниченной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием“, ДАН СССР, т. IV (XIII), № 3 (107), 1936.

Составим выражения для главного вектора и главного момента:

$$P_z = - \int_L p ds,$$

$$M_x^* = \int_L [m \cos(n, y) + py] ds, \quad M_y^* = - \int_L [m \cos(n, x) + px] ds.$$

Получаем зависимости:

$$f = c_0 \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (c_k \sin k\vartheta - d_k \cos k\vartheta) + \text{const},$$

$$c_0 = -\frac{P_z}{2\pi}, \quad a_1 b - c_1 a = \frac{M_y^*}{\pi}, \quad b_1 a - d_1 b = -\frac{M_x^*}{\pi}. \quad (6.3)$$

Составляем интегралы, входящие в правые части условий на контуре (3.7). Полагая  $e^{i\vartheta} = \sigma$ , придадим условиям (3.7) после элементарных преобразований такую форму:

$$\begin{aligned} \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{p_1}{\mu_1} W_1'(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2} W_2'(z_2) + \frac{\bar{p}_1}{\mu_1} \bar{W}_2'(\bar{z}_1) + \frac{\bar{p}_2}{\mu_2} \bar{W}_2'(\bar{z}_2) \right] = \\ = \frac{P_z a}{4\pi i} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \lg \sigma - \frac{M_y^*}{2\pi i} \lg \sigma + \left( \alpha_1 - \frac{Ca}{2} \right) \sigma + \\ + \left( \bar{\alpha}_1 - \frac{Ca}{2} \right) \frac{1}{\sigma} + \alpha_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k \sigma^k + \bar{\alpha}_k \sigma^{-k}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{2h^3}{3} \left[ q_1 W_1'(z_1) + q_2 W_2'(z_2) + \bar{q}_1 \bar{W}_1'(\bar{z}_1) + \bar{q}_2 \bar{W}_2'(\bar{z}_2) \right] = \\ = \frac{P_z b}{4\pi} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \lg \sigma - \frac{M_x^*}{2\pi i} \lg \sigma + \left( \beta_1 - \frac{Cbi}{2} \right) \sigma + \\ + \left( \bar{\beta}_1 + \frac{Cbi}{2} \right) \frac{1}{\sigma} + \beta_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_k \sigma^k + \bar{\beta}_k \sigma^{-k}). \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_k, \beta_k$  — известные комплексные постоянные,  $\alpha_0, \beta_0$  — произвольные постоянные,  $C$  — вещественная постоянная, подлежащая определению.

Ищем функции  $W_1'(z_1), W_2'(z_2)$  в таком виде:

$$W_1'(z_1) = (A' z_1 + A) \lg \Omega_1(z_1) + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\Omega_1(z_1)]^{-k},$$

$$W_2'(z_2) = (B' z_2 + B) \lg \Omega_2(z_2) + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k [\Omega_2(z_2)]^{-k}, \quad (6.5)$$

где

$$\Omega_1(z_1) = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b}, \quad \Omega_2(z_2) = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b}.$$



На контуре, т. е. при

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta,$$

имеем:<sup>1</sup>

$$\Omega_1(z_1) = \sigma, \quad \Omega_2(z_2) = \sigma,$$

$$W_1'(z_1) = A' \left( \frac{a - i\mu_1 b}{2} \sigma + \frac{a + i\mu_1 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) \lg \sigma + A \lg \sigma + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sigma^{-k}, \quad (6.6)$$

$$W_2'(z_2) = B' \left( \frac{a - i\mu_2 b}{2} \sigma + \frac{a + i\mu_2 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) \lg \sigma + B \lg \sigma + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sigma^{-k}.$$

Подставляя эти значения в (6.4) и сравнивая коэффициенты при  $\sigma \lg \sigma$ ,  $\sigma^{-1} \lg \sigma$ ,  $\lg \sigma$  и при одинаковых степенях  $\sigma$ , получаем уравнения, полностью определяющие  $A_k$  и  $B_k$  ( $k \geq 2$ ); для  $A'$ ,  $B'$ ,  $A$  и  $B$  получаем недостаточное количество уравнений, и остальные уравнения найдутся из условий однозначности.

Имеем:

$$\Delta_1'' = 2\pi i A', \quad \Delta_2'' = 2\pi i B',$$

$$\Delta_1' = 2\pi i (A' z_1 + A), \quad \Delta_2' = 2\pi i (B' z_2 + B),$$

$$\Delta_1 = 2\pi i \left[ A' \frac{2z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}{4} + A z_1 + A_1 \frac{a - i\mu_1 b}{2} \right],$$

$$\Delta_2 = 2\pi i \left[ B' \frac{2z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}{4} + B z_2 + B_1 \frac{a - i\mu_2 b}{2} \right].$$

Окончательно получаем следующие системы для определения постоянных:

$$\begin{aligned} A' + B' - \bar{A}' - \bar{B}' &= 0, \\ \mu_1 A' + \mu_2 B' - \bar{\mu}_1 \bar{A}' - \bar{\mu}_2 \bar{B}' &= 0, \\ \mu_1^2 A' + \mu_2^2 B' - \bar{\mu}_1^2 \bar{A}' - \bar{\mu}_2^2 \bar{B}' &= 0, \\ \frac{A'}{\mu_1} + \frac{B'}{\mu_2} - \frac{\bar{A}'}{\bar{\mu}_1} - \frac{\bar{B}'}{\bar{\mu}_2} &= \frac{3P_z}{4h^3} \frac{1}{B_{11} \pi i}; \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} A + B - \bar{A} - \bar{B} &= 0, \\ \mu_1 A + \mu_2 B - \bar{\mu}_1 \bar{A} - \bar{\mu}_2 \bar{B} &= 0, \\ \mu_1^2 A + \mu_2^2 B - \bar{\mu}_1^2 \bar{A} - \bar{\mu}_2^2 \bar{B} &= -\frac{3M_x^*}{4h^3 B_{22}} \frac{1}{\pi i}, \\ \frac{A}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2} - \frac{\bar{A}}{\bar{\mu}_1} - \frac{\bar{B}}{\bar{\mu}_2} &= -\frac{3M_y^*}{4h^3 B_{11}} \frac{1}{\pi i}; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$A_1 (a - i\mu_1 b) + B_1 (a - i\mu_2 b) - \bar{A}_1 (a + i\bar{\mu}_1 b) - \bar{B}_1 (a + i\bar{\mu}_2 b) = 0; \quad (6.9)$$

<sup>1</sup> Во всех точках внутри области  $S$

$$|\Omega_1(z_1)| > 1, \quad |\Omega_2(z_2)| > 1;$$

на контуре  $L$

$$|\Omega_1(z_1)| = |\Omega_2(z_2)| = 1.$$

$$\frac{2h^3}{3} \left( \frac{p_1}{\mu_1} A_1 + \frac{p_2}{\mu_2} B_1 \right) = \bar{\alpha}_1 - \frac{Ca}{2},$$

$$\frac{2h^3}{2} (q_1 A_1 + q_2 B_1) = \bar{\beta}_1 + \frac{Cbi}{2};$$

$$\frac{2h^3}{3} \left( \frac{p_1}{\mu_1} A_k + \frac{p_2}{\mu_2} B_k \right) = \bar{\alpha}_k,$$

$$\frac{2h^3}{3} (q_1 A_k + q_2 B_k) = \bar{\beta}_k.$$

( $k \geq 2$ ).

Из (6.10) и (6.11) находим:

$$A_1 = \frac{3\mu_1}{2h^3 d} \left[ \mu_2 q_2 \bar{\alpha}_1 - p_2 \bar{\beta}_1 - \frac{C}{2} (\mu_2 q_2 a + p_2 bi) \right],$$

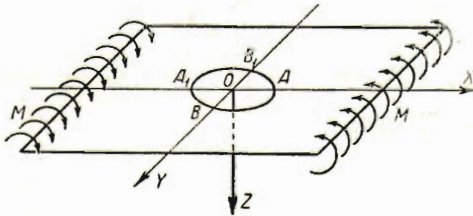
$$B_1 = -\frac{3\mu_2}{2h^3 d} \left[ \mu_1 q_1 \bar{\alpha}_1 - p_1 \bar{\beta}_1 - \frac{C}{2} (\mu_1 q_1 a + p_1 bi) \right];$$

$$A_k = \frac{3\mu_1}{2h^3 d} (\mu_2 q_2 \bar{\alpha}_k - p_2 \bar{\beta}_k),$$

$$B_k = -\frac{3\mu_2}{2h^3 d} (\mu_1 q_1 \bar{\alpha}_k - p_1 \bar{\beta}_k),$$

( $d = p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1$ ).

Постоянная  $C$  определится из уравнения (6.9).



Фиг. 7.

Заметим, что в случае, когда главный вектор  $P_z = 0$ , напряжения на бесконечности равны нулю. Если же главный вектор не равен нулю, то на бесконечности напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю, но напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  обращаются в бесконечность, так как имеют логарифмическую особенность.

Полученное решение можно применить ко многим частным случаям, представляющим практический интерес, например, к исследованию вопроса о влиянии эллиптического или кругового отверстия в „поле напряжений при изгибе“. Так, например, приближенное решение для плиты, изгибаемой моментами и ослабленной эллиптическим отверстием посередине (фиг. 7), находится путем наложения решения для случая чистого изгиба и решения, получаемого с помощью функций вида:

$$W_1'(z_1) = \frac{A_1}{\Omega_1(z_1)}, \quad W_2'(z_2) = \frac{B_1}{\Omega_2(z_2)}.$$

В частности, в случае кругового отверстия радиуса  $a$  и ортотропной плиты, преодолев трудности алгебраического порядка, неизбежно связанные с доведением задачи до расчетных формул, получаем следующий результат.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> С. Г. Лехницкий, О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе, „Вестник инженеров и техников“, № 4, 1937



В точках  $A$  и  $A_1$  (фиг. 7):

$$\begin{aligned} M_x &= 0, \\ M_y &= M \frac{E_y E_x - 4\mu_{xy} G_{xy}}{E_x \sqrt{E_x E_y} + 4G_{xy}}, \\ H_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

В точках  $B$  и  $B_1$ :

$$\begin{aligned} M_x &= M \frac{\sqrt{E_x E_y} (1 - i\mu_1 - i\mu_2) + 4G_{xy}}{\sqrt{E_x E_y} + 4G_{xy}}, \\ M_y &= 0, \\ H_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $M$  — внешний изгибающий момент на единицу длины;

$$-i\mu_1 - i\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

в случае ортотропной пластинки всегда вещественное число.

## II. Изотропные плиты

Рассмотренные в предыдущих параграфах решения частных задач сохраняют свою силу и для случая изотропной плиты. К случаю изотропной плиты мы можем подойти путем предельного перехода, устремляя  $\mu_2$  к  $\mu_1$ , а затем полагая  $\mu_1 = i$  и учитывая зависимости между упругими постоянными. Однако случай изгиба изотропной плиты имеет свои особенности, так как общее выражение для прогибов существенно отличается от выражения (2.2) [корни алгебраического уравнения (2.1) получаются попарно равными]. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть теорию изгиба изотропных плит особо.

§ 7. Основные уравнения теории изгиба. В случае изотропной тонкой плиты, изгибаемой моментами  $m$  и усилиями  $p$ , приложенными по краю, и нормальными усилиями  $q$ , приложенными к плоской поверхности, имеют место следующие формулы:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} N_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ N_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \tag{7.2}$$

<sup>1</sup> Б. Г. Галеркин, 1. с., стр. 8.

Здесь  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа, остальные обозначения прежние.

Между напряжениями и моментами и перерезывающими силами имеют место зависимости (1.11); сохраняют силу и уравнения статики (1.12) и (1.13).

Прогибы срединной плоскости удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}. \quad (7.3)$$

В случае изгиба только усилиями и моментами, приложенными по краю ( $q=0$ ), уравнение (7.3) обращается в бигармоническое:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0. \quad (7.4)$$

§8. Общие выражения для прогибов, моментов и перерезывающих сил. Общий интеграл уравнения (7.3) составляется из общего интеграла бигармонического уравнения (7.4) и из какого-нибудь частного решения уравнения (7.3). Можно записать его в виде:<sup>1</sup>

$$w = 2R [W_1(z) + \bar{z}W_2(z)] + w_0(x, y), \quad (8.1)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  — произвольные аналитические функции комплексного переменного  $z$ .

Исходя из общего выражения для прогибов, мы на основании формул (7.1)–(7.2) можем составить общие выражения для моментов и перерезывающих сил.

Находим, дифференцируя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2R [W_1'(z) + \bar{z}W_2'(z) + W_2(z)] + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 2R [iW_1'(z) + i\bar{z}W_2'(z) - iW_2(z)] + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.2)$$

(штрихами здесь и в дальнейшем обозначаются производные по комплексному аргументу);

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2R [W_1''(z) + 2W_2'(z) + \bar{z}W_2''(z)] + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 2R [-W_1''(z) + 2W_2'(z) - \bar{z}W_2''(z)] + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 2R [iW_1''(z) + i\bar{z}W_2''(z)] + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\nabla^2 w = 8R [W_2'(z)] + \nabla^2 w_0; \quad (8.4)$$

<sup>1</sup> Более подробно:

$$w = W_1(z) + \bar{z}W_2(z) + \bar{W}_1(\bar{z}) + z\bar{W}_2(\bar{z}) + w_0$$

(черта — знак сопряжения).



$$\begin{aligned} M_x &= -D \cdot 2R \{ (1 - \nu) [ W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z) ] + 2(1 + \nu) W_2'(z) \} + M_x^0, \\ M_y &= -D \cdot 2R \{ -(1 - \nu) [ W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z) ] + 2(1 + \nu) W_2'(z) \} + M_y^0, \\ H_{xy} &= -D(1 - \nu) \cdot 2R [ i W_1''(z) + i \bar{z} W_2''(z) ] + H_{xy}^0; \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} N_x &= -D \cdot 8R [ W_2''(z) ] + N_x^0, \\ N_y &= -D \cdot 8R [ i W_2''(z) ] + N_y^0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

$M_x^0, M_y^0, \dots, N_y^0$  определяются по формулам (7.1)—(7.2) с заменой  $w$  на  $w_0$  и представляют собой известные функции.

Все формулы упрощаются, если плита изгибается усилиями и моментами, приложенными по краю, так как тогда

$$q = 0, w_0 = 0, M_x^0 = M_y^0 = \dots = N_y^0 = 0.$$

В этом случае удобно записать формулы (8.5) и (8.6) в комплексной форме:

$$\begin{aligned} M_y - M_x + 2iH_{xy} &= 4D(1 - \nu) [ W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z) ], \\ M_x + M_y &= -8D(1 + \nu) R [ W_2'(z) ], \\ N_x - iN_y &= -8D W_2''(z). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Эти формулы аналогичны формулам Г. В. Колосова—Н. И. Мусхелишвили, выведенным в случае плоской задачи.<sup>1</sup>

В отличие от случая анизотропной плиты моменты и перерезывающие силы в изотропной плите выражаются через две функции одного комплексного переменного  $z = x + iy$ . Область плиты является одновременно и областью изменения переменного  $z$ .

§ 9. Контурные условия. Если плита изгибается усилиями и моментами, приложенными по краю, мы можем различить первую и вторую основные задачи и задачи смешанного типа.

В случае второй основной задачи остается справедливым все сказанное ранее в § 3. В случае первой основной задачи и здесь оказывается возможным упрощение контурных условий.

Обозначая попрежнему  $p$  — изгибающие усилия на единицу длины и  $m$  — внешние изгибающие моменты, можем повторить все рассуждения § 3, в результате чего приведем условия

$$M_n = m(s), \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = p(s) \quad (9.1)$$

к виду:

$$\begin{aligned} M_x dy - (H_{xy} - J) dx &= m dy + (f + C) dx, \\ (H_{xy} + J) dy - M_y dx &= -m dx + (f + C) dy. \end{aligned} \quad (9.2)$$

<sup>1</sup> Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. Академии Наук СССР, n° 34, 1935.

Здесь попержнему  $f = \int_0^s p ds$ ,  $C$  — вещественная постоянная интегрирования.

Условия (9.2) удобно записать в виде одного условия в комплексной форме:

$$(-M_y + Ji - H_{xy}i) dx + (H_{xy} + J + iM_x) dy = (-m + if + iC)(dx - idy). \quad (9.3)$$

В нашем случае

$$J = 4Di [W_2'(z) - \overline{W_2'}(\bar{z})]$$

(постоянную интегрирования включаем в состав  $C$ ).

Заменяя  $M_x$ ,  $M_y$  и  $H_{xy}$  их выражениями (8.5) ( $M_x^0 = M_y^0 = H_{xy}^0 = 0$ ), перепишем (9.3) таким образом:

$$\begin{aligned} & 2D \{ (1 - \nu) [W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z) + W_2'(z)] - (\beta + \nu) \overline{W_2'}(\bar{z}) \} dx + \\ & + 2D \{ (1 - \nu) [W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z) - W_2'(z)] + (\beta + \nu) \overline{W_2'}(\bar{z}) \} i dy = \\ & = (m - if - iC)(dx - idy). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Левая часть условий (9.4) представляет собой полный дифференциал, что нетрудно проверить дифференцированием.

Интегрируя по дуге  $s$  контура от начальной точки до переменной точки, получим окончательное условие на контуре для первой основной задачи в таком виде:

$$\begin{aligned} & (1 - \nu) [W_1'(z) + \bar{z} W_2'(z)] - (\beta + \nu) \overline{W_2}(\bar{z}) = \\ & = \frac{1}{2D} \left[ \int_0^s (m - if)(dx - idy) - iC\bar{z} + C_1 \right], \end{aligned} \quad (9.5)$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования (комплексная).

Для плиты, изгибаемой нагрузкой  $q$ , можно высказать те же соображения, которые проводятся в § 3.

§ 10. О характере функций  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  внутри области плиты, изгибаемой усилиями и моментами, приложенными по краям. Пусть плита, изгибаемая усилиями и моментами, приложенными по краю, имеет одно отверстие, по краю которого действуют изгибающие усилия и моменты, приводящиеся к моменту с составляющими  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  и к силе  $P_z$ . Окружая отверстие контуром  $L$  и рассматривая равновесие части плиты, заключенной внутри этого контура (фиг. 3), получаем уравнение (4.2). Под интегралами попержнему полные дифференциалы.

Заменяя в 1-м уравнении (4.2)  $N_x$  и  $N_y$  их выражениями (8.6), запишем это уравнение таким образом:

$$4Di \int_L [W_2''(z) dz - \overline{W_2''}(\bar{z}) d\bar{z}] = -P_z. \quad (10.1)$$



Умножим обе части 3-го уравнения (4.2) на  $i$  и вычтем его из 2-го уравнения; тогда вместо этих двух уравнений будем иметь:

$$\int_L [(M_y + iH_{xy} - i\bar{z}N_y) dx + (i\bar{z}N_x - H_{xy} - iM_x) dy] = M_x^* - iM_y^*. \quad (10.2)$$

Заменяя моменты и перерезывающие силы их выражения (8.5)—(8.6), перепишем (10.2) таким образом:

$$\begin{aligned} D \int_L \{ & [2(1 - \mu) [W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z)] - 2(1 + \mu) [W_2'(z) + \bar{W}_2'(\bar{z})] - \\ & - 4\bar{z} [W_2''(z) - \bar{W}_2''(\bar{z})] \} dx + [2(1 - \mu) [W_1''(z) + \bar{z} W_2''(z)] + \\ & + 2(1 + \mu) [W_2'(z) + \bar{W}_2'(\bar{z})] - 4z [W_2''(z) + \bar{W}_2''(\bar{z})] \} i dy = M_x^* - iM_y^*. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Производя интегрирование, перепишем (10.1) таким образом:

$$4Di \{ W_2'(z) - \bar{W}_2'(\bar{z}) \}_L = -P_z, \quad (10.4)$$

а (10.3) таким образом:

$$\begin{aligned} 2D \{ & (1 - \mu) [W_1'(z) + \bar{z} W_2'(z)] - (3 + \mu) \bar{W}_2(\bar{z}) - 2\bar{z} [W_2'(z) - \bar{W}_2'(\bar{z})] \}_L = \\ & = M_x^* - iM_y^*. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Знаком  $\{ \}_L$  обозначено приращение, которое получает выражение, стоящее в скобках, при одном полном обходе по контуру  $L$  в положительном направлении (относительно положительного направления мы ранее условились в § 3).

Обозначим  $\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1''$  — приращения, которые получают функции  $W_1(z), W_1'(z)$  и  $W_1''(z)$  при обходе по контуру  $L$  в положительном направлении,  $\Delta_2, \Delta_2', \Delta_2''$  — приращения функций  $W_2(z), W_2'(z)$  и  $W_2''(z)$  при таком же обходе; черточками отметим сопряженные величины. Уравнения (10.4) и (10.5) перепишутся теперь так:

$$\Delta_2' - \bar{\Delta}_2' = \frac{P_z i}{4D}; \quad (10.6)$$

$$(1 - \mu)(\Delta_1' + \bar{z}\Delta_2') - (3 + \mu)\bar{\Delta}_2 - 2\bar{z}(\Delta_2' - \bar{\Delta}_2') = \frac{M_x^* - iM_y^*}{2D}. \quad (10.7)$$

Напряжения (а следовательно, моменты и перерезывающие силы), первые производные от прогибов и сами прогибы должны быть функциями  $x$  и  $y$ , непрерывными в области плиты, за исключением, может быть, точек контура и бесконечно удаленных точек области плиты. Это приводит к заключению, что функции  $W_1(z), W_1'(z), W_1''(z), W_2(z), W_2'(z), W_2''(z)$  должны быть непре-

ривными в области плиты. Кроме того, моменты, перерезывающие силы, первые производные от прогибов и прогибы должны быть функциями  $x, y$ , однозначными в области плиты, т. е. приращения этих величин при полном обходе по любому замкнутому контуру, лежащему целиком в области плиты, должны быть равны нулю.

Условия однозначности названных величин применительно к контуру  $L$  дают зависимости:

$$\begin{aligned}\Delta_1'' + \bar{z}\Delta_2'' &= 0, \\ \Delta_2' + \bar{\Delta}_2' &= 0, \\ \Delta_2'' &= 0;\end{aligned}\tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1' + \bar{z}\Delta_2' + \Delta_2 + \bar{\Delta}_1' + z\bar{\Delta}_2' + \bar{\Delta}_2 &= 0, \\ \Delta_1' + \bar{z}\Delta_2' - \Delta_2 - \bar{\Delta}_1' - z\bar{\Delta}_2' + \bar{\Delta}_2 &= 0;\end{aligned}\tag{10.9}$$

$$\Delta_1 + \bar{z}\Delta_2 + \bar{\Delta}_1 + z\bar{\Delta}_2 = 0.\tag{10.10}$$

Разумеется, соотношения (10.8) — (10.10) должны быть справедливы и для любого замкнутого контура, лежащего целиком в области плиты.

Решая совместно уравнения (10.6) — (10.10), получаем следующие выражения для приращений:

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 0,\tag{10.11}$$

т. е.  $W_1''(z), W_2''(z)$  — однозначные функции в области плиты:

$$\begin{aligned}\Delta_2' &= \frac{P_z i}{8D}, \\ \Delta_1' &= \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D},\end{aligned}\tag{10.12}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \bar{\Delta}_1 &= z \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} + \bar{z} \frac{M_x^* + iM_y^*}{8D}, \\ \Delta_2 &= \frac{P_z iz}{8D} - \frac{M_x^* + iM_y^*}{8D}.\end{aligned}\tag{10.13}$$

Этими равенствами определяется характер многозначности функций  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  и их производных в случае одного отверстия.

Если плита имеет  $N$  отверстий, формулы (10.11) — (10.13) справедливы для каждого из контуров  $L_k$ , окружающих одно отверстие. В этих формулах вместо  $\Delta_2'', \Delta_1'', \dots, \Delta_2$  и  $P_z, M_x^*, M_y^*$  соответственно будут  $\Delta_{2k}'', \Delta_{1k}'', \dots, \Delta_{2k}$  ( $k=1, 2, \dots, N$  — номер отверстия)  $P_{zk}, M_{xk}^*, M_{yk}^*$  — главный вектор и главный момент на  $k$ -ом контуре.

Если же плита совсем не имеет отверстий, то, очевидно,  $W_1''(z), W_2''(z), W_1'(z), W_2'(z)$  и  $W_2(z)$  — непрерывные и однозначные функции, а  $W_1(z)$  — непрерывная функция, имеющая однозначную вещественную часть.



Приведенные рассуждения позволяют написать общие выражения указанных функций для плиты с  $N$  отверстиями:<sup>1</sup>

$$W_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{M_{zk}^* - iM_{yk}^*}{8D} \lg(z - z_k) + f_1(z), \tag{10.14}$$

$$W_2'(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{P_{zk} i}{8D} \lg(z - z_k) + f_2(z);$$

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{M_{zk}^* - iM_{yk}^*}{8D} z + iA_k \right] \lg(z - z_k) + F_1(z), \tag{10.15}$$

$$W_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{P_{zk} i}{8D} z - \frac{M_{zk}^* + iM_{yk}^*}{8D} \right] \lg(z - z_k) + F_2(z).$$

Здесь  $z_k$  — произвольная фиксированная точка внутри  $k$ -го отверстия (на плоскости  $XOY$ ),  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  — функции однозначные и непрерывные в области плиты, за исключением, может быть, точек границы и бесконечно удаленной точки,  $A_k$  — вещественная постоянная.

Поступила в редакцию 12 III 1938.

## ÜBER EINIGE FRAGEN DER BIEGUNGSTHEORIE DER DÜNNEN PLATTEN

S. G. LECHNICKI

(Saratov)

(Zusammenfassung)

Indem Verfasser die Biegung der anisotropen Platten betrachtet, zeigt er, dass die Spannungen durch zwei Funktionen  $W_1(z_1)$ ,  $W_2(z_2)$  komplexer Variablen

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y$$

ausgedrückt werden ( $\mu_1$  und  $\mu_2$  sind komplexe Werte, die von elastischen Konstanten abhängen). Biegt sich die Platte nur durch Kräfte und Biegemomente, die am Rande wirken, so nehmen die Bedingungen für die Funktionen am Rande der Platte im Falle der ersten Grundaufgabe die Form

$$\frac{4}{3} h^3 R \left[ \frac{p_1}{\mu_1} W_1'(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2} W_2'(z_2) \right] = f_1(s) - Cx + C_1,$$

$$\frac{4}{3} h^3 R [q_1 W_1'(z_1) + q_2 W_2'(z_2)] = f_2(s) + Cy + C_2$$

an [ $f_1(s)$  und  $f_2(s)$  sind die gegebenen Funktionen der Bogenlänge;  $C$ ,  $C_1$  und  $C_2$  sind die Konstanten]. Der Verfasser erforscht weiter die Funktionen  $W_1(z_1)$  und

<sup>1</sup> Н. И. Мусхелишвили, 1. с., n° 35.

$W_2(z_2)$  im Plattengebiet und gibt die Lösung der Aufgaben für den Fall der unendlichen Halbebene und für die Ebene mit elliptischer Öffnung.

Im Fall einer isotropen Platte werden die Spannungen durch zwei Funktionen  $W_1(z)$ ,  $W_2(z)$  komplexen Variablen  $z = x + iy$  ausgedrückt. Die Randbedingungen nehmen im Fall der ersten Grundaufgabe die Form

$$(1 - \mu) [W_1'(z) + \bar{z} W_2'(z)] - (3 + \mu) \overline{W_2(z)} = f(s) + C\bar{z} + C_1$$

an [ $f(s)$  — gegebene Funktion der Bogengrenze,  $C$ ,  $C_1$  — Konstanten,  $\bar{z} = x - iy$ ]. Die Funktionen  $W_1(z)$  und  $W_2(z)$  sind vom Verfasser genau erforscht.