АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 1 — 1938 — V. II, № 1

СЕЙШЕОБРАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ВОДОЕМАХ НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ[1]

Б. Б. ДЕВИСОН
(Ленинград)

1. Постановка задачи и существование решения

§ 1. Постановка задачи

1°. Обычно, изучая сейшеобразные колебания, т. е. стоячие колебания водных масс, задавались сначала из топографических соображений осями водоема и, постулируя затем, что „оси водоема" совпадают с „осями сейшеобразных колебаний", заменяли тем или иным способом данный водоем прямоугольным и определяли возможные сейшеобразные колебания в этом условно введенном прямоугольном водоеме.[2] Определенные таким образом колебания отождествлялись с сейшеобразными колебаниями в заданном нам водоеме, отвечающими данной оси.

Однако встречающиеся в природе водоемы имеют зачастую весьма неправильную форму, так что понятие „оси водоема" становится весьма условным, а предположение, что ось сейшеобразных колебаний совпадает с осью водоема, — совершенно произвольным и потому сомнительным.

Поэтому мы ставим перед собой задачу о нахождении возможных стационарных колебаний при отсутствии подвода энергии извне в водоеме непосредственно данной формы, избегая искусственного сведения задачи к одно-

[1] После сдачи настоящей статьи в печать автор обнаружил, что в работе S. E. Stenij „Zur Theorie der Wasserschingungen in einem begrenzten Meeresbecken" (Societas Scientiarum Fennica Commentationes Physico-Mathematicae, VI, 16) решается та же физическая задача, исходя из тех же уравнений, но вместо требования ограниченности смещений, выставляемого автором, S. E. Stenij задавался определенным соотношением между вертикальной и горизонтальной составляющими смещения на контуре. Не исключена возможность, что и то и другое требование приводят к одним и тем же решениям; по крайней мере, в случае водоема, представляющего собой параболоид вращения, всякое решение, ограниченное вплоть до контура, автоматически удовлетворяет пограничным условиям Stenij. Однако, если указанные решения и совпадают, автору кажется, что и в этом случае его статья может представить интерес, ибо в последнем случае окажется интересным, что два столь различные на первый взгляд пограничные условия приводят к одним и тем же решениям.

[2] См. Chrystal, On the Hydrodynamical Theory of Seiches, Trans. of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XLI, part. III, № 25, 1905. Также Оболенский, Сейши и их теория. Записки по гидрографии, т. XLIII, вып. 2, 1919.

размерной с помощью назначения наперед оси колебаний, а ограничиваясь сведением задачи к двуразмерной с помощью осереднения по вертикали. Остальные предположения, делаемые обычно при изучении сейшеобразных колебаний, мы сохраним, т. е. мы будем пренебрегать трением, Кориолисовым ускорением, силу тяжести будем считать имеющей везде одно направление, давление на свободной поверхности одинаковым во всех точках, смещения и их производные малыми. В силу предположения о двуразмерности движения мы должны также пренебрегать вертикальным ускорением частиц.

Обозначая через x, y и z первоначальные (невозмущенные) координаты точки, причем начало координат располагается на свободной поверхности, а ось z направлена вертикально вверх, а через ξ, η и ζ соответствующие смещения точки, мы можем записать динамические уравнения в Лагранжевых координатах в виде:

$$\begin{aligned}
0&=\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-X\right)\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-Y\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
0&=\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-X\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-Y\right)\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
0&=\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-X\right)\frac{\partial\xi}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-Y\right)\frac{\partial\eta}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-Z\right)\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{1}$$

При сделанных предположениях единственной действующей силой будет сила тяжести, а потому $X=Y=0$; $Z=-g$. Тогда, отбрасывая малые высшего порядка, можно записать третье уравнение (1) в виде:

$$g\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0,$$

откуда

$$p=-g\rho(z+\zeta)+p_0(x,y).$$

Для свободной поверхности $z=0$, $p=p_{\text{atm}}$; обозначим вертикальное смещение точек на свободной поверхности через ζ_0, тогда:

$$p_{\text{atm}}=-g\rho\zeta_0+p_0(x,y),$$

т. е.

$$p_0(x,y)=g\rho\zeta_0+p_{\text{atm}}$$

и

$$p=-g\rho(z+\zeta)+g\rho\zeta_0+p_{\text{atm}},$$

а первые два из уравнений (1), с точностью до малых высшего порядка, будут:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+g\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+g\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}=0,
\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\zeta_0}{\partial x};\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}.\tag{2}$$

2°. Для составления же уравнения неразрывности воспользуемся сначала Эйлеровыми координатами $\tilde{x}=x-\xi$, $\tilde{y}=y-\eta$. Возьмем цилиндр с вертикальной осью, с площадью поперечного сечения S и с контуром Γ. Расход жидкости через контур Γ выразится величиной:

$$Q_\Gamma = \int\limits_\Gamma \left(h\frac{d\eta}{dt}d\bar{x} - h\frac{d\xi}{dt}d\bar{y}\right), \tag{3}$$

где h — глубина $\left(\text{напомним, что в Эйлеровых координатах } v_x = \frac{d\xi}{dt},\ v_y = \frac{d\eta}{dt}\right)$. В силу формулы Гаусса выражение (3) можно переписать в виде:

$$Q_\Gamma = -\iint\limits_S \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(h\frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(h\frac{d\xi}{dt}\right)d\bar{x}\,d\bar{y};\right.$$

приращение же количества жидкости внутри контура Γ будет:

$$Q_\Gamma = \iint\limits_S \frac{\partial\zeta_0}{\partial t}d\bar{x}\,d\bar{y};$$

таким образом, так как площадка любая, то

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(h\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(h\frac{d\eta}{dt}\right)\right] = +\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}.$$

Возвращаясь к Лагранжевым координатам, мы должны будем записать уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial(x-\xi)}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial(y-\eta)}\left(h\frac{\partial\eta}{dt}\right) = -\frac{\partial\zeta_0(x-\xi,\ y-\eta,\ t)}{\partial t}. \tag{4*}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial(x-\xi)}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial(x-\xi)} + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial(x-\xi)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial y}}{\dfrac{\partial(x-\xi)}{\partial x}\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x-\xi)}{\partial y}\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial x}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{-\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial x}}{\dfrac{\partial(x-\xi)}{\partial x}\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x-\xi)}{\partial y}\dfrac{\partial(y-\eta)}{\partial x}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{1-\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}{1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}{1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}$$

и с точностью до величин высшего порядка малости:

$$\frac{\partial}{\partial(x-\xi)}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right).$$

Аналогично с точностью до величин высшего порядка малости имеем:

$$\frac{\partial}{\partial(y-\eta)}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial t}\right).$$

Наконец, в силу формулы Лагранжа:

$$\frac{\partial\zeta_0(x-\xi, y-\eta, t)}{\partial t}=\frac{\partial\zeta_0(x, y, t)}{\partial t}-\xi\frac{\partial^2\zeta_0(x-\vartheta\xi, y, t)}{\partial x\,\partial t}-\eta\frac{\partial^2\zeta_0(x-\xi, y-\vartheta'\eta, t)}{\partial y\,\partial t}-$$

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\zeta_0(x-\xi, y-\eta, t)}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\zeta_0(x-\xi, y-\eta, t)}{\partial y},$$

где

$$0<\vartheta<1,\quad 0<\vartheta'<1,$$

и с точностью до величин высшего порядка малости имеем:

$$\frac{\partial\zeta_0(x-\xi, y-\eta, t)}{\partial t}=\frac{\partial\zeta_0(x, y, t)}{\partial t}.$$

Подстановка перечисленных приближенных равенств в уравнение (4*) даст:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}, \tag{4}$$

или, дифференцируя последнее уравнение по t и замечая, что члены, содержащие $\frac{\partial h}{\partial t}$, дадут величины высшего порядка малости:[1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)=-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2}.$$

Наконец, исключая с помощью уравнений (2) ξ и η, имеем:

$$\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(gh\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(gh\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}\right). \tag{5}$$

3°. Для случая, когда h нигде не обращается в 0, уравнение (5) идентично с уравнением колебания мембраны переменной толщины; при этом, если h обращается в 0 в некоторых точках или на некоторой линии, то в колебаниях мембраны этому отвечает случай, когда толщина мембраны обращается в соответствующих точках или на соответствующей линии в бесконечность.[2] Но почти для всех природных водоемов h обращается в 0 либо на всем контуре, либо на части его. Мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда h

---

[1] Так как озеро имеет постоянную форму, то в Эйлеровых координатах мы, очевидно, имели бы $\frac{\partial h}{\partial t}=0$. Но когда мы пользуемся Лагранжевыми координатами, то $\frac{\partial h}{\partial t}$ уже не 0, ибо в своих перемещениях частица жидкости, характеризуемая определенными значениями x, y, попадает в места с различной глубиной.

Величина, выражающаяся в Лагранжевых координатах как $\frac{\partial h}{\partial t}$, в Эйлеровых координатах выразилась бы как

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+v_x\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}+v_y\frac{\partial h}{\partial \bar{y}}=\frac{d\xi}{dt}\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}+\frac{d\eta}{dt}\frac{\partial h}{\partial \bar{y}},$$

откуда видно, что она является малой вместе с производными от смещений.

[2] Уравнения колебания мембраны переменной толщины могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=c\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],$$

где b — толщина мембраны. См., например, Matthieu, Traité de l'élasticité, vol. II.

обращается в 0 вдоль всего контура.[1] При этом весь контур окажется особой линией нашего уравнения.

На особой линии приходится, вообще говоря, задавать меньше условий, чем на линии, где решение регулярно, и может случиться, что нельзя удовлетворить некоторым, естественным на первый взгляд, условиям. Физически последнее обстоятельство вполне естественно, ибо в окрестности тех мест, где $h=0$, задачу следовало бы рассматривать как трехразмерную, а рассматривая ее как двухразмерную, мы неизбежно вносим известное искажение в описание явления, с чем, однако, приходится мириться. В силу изложенного из условий на контуре, которые можно было бы поставить, мы будем удовлетворять лишь некоторым, представляющимся нам наиболее существенными и получаемым притом путем более прямым, чем другие возможные условия.

Отметим прежде всего, что смещение должно оставаться ограниченным во всей области, ибо в противном случае мы имели бы дело с возникновением ряда новых явлений, как, например, выплескивание жидкости, непременно сопровождающееся сосредоточенным гашением энергии, и стационарные колебания без постоянного подвода энергии извне были бы невозможны. Требование ограниченности смещения представляется поэтому более существенным, чем возможные соотношения между его вертикальной и горизонтальной составляющими на береговой линии, каковые могли бы быть удовлетворены лишь при решении трехразмерной задачи. Далее ограниченность вертикальных смещений ζ_0 точек на свободной поверхности мы можем использовать непосредственно, ограниченность же горизонтальных смещений мы смогли бы использовать лишь при посредстве уравнений (2). Поэтому, следуя сделанному замечанию относительно выбора условий на контуре, мы ограничимся лишь требованием ограниченности ζ_0. Этого требования, как мы увидим, будет вполне достаточно для определения стационарных колебаний.

4°. Поскольку мы интересуемся лишь стационарными колебаниями, мы можем положить, следуя методу Фурье:

$$\zeta_0=\sum_{\nu=1}^{\infty} L_\nu \sin\left[\lambda_\nu (t-\tau_\nu)\right] P_\nu(x, y), \tag{6}$$

где L_ν — постоянные. Тогда для определения $P_\nu(x, y)$ мы получим следующее уравнение:

$$\lambda_\nu^2 P_\nu+\frac{\partial}{\partial x}\left(g h \frac{\partial P_\nu}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g h \frac{\partial P_\nu}{\partial y}\right)=0, \tag{7}$$

а в качестве пограничного условия будет служить требование, чтобы P_ν оставалось ограниченным во всей области.[2]

---

[1] Отметим, что благодаря тому, что у контура h обращается в 0, при подъеме и опускании воды у контура, в Эйлеровых координатах мы имели бы перемещения контура, правда, бесконечно малые, ибо сами смещения частиц жидкости считаются нами малыми. В Лагранжевых же координатах контур не претерпевает никаких изменений.

[2] Отметим, что в виду того, что мы пренебрегаем $\frac{\partial h}{\partial t}$, различие между Лагранжевыми и Эйлеровыми координатами по существу исчезает и мы в дальнейшем можем смотреть на x и y и как на Эйлеровы координаты.

5°. Чтобы унифицировать нашу задачу, совершим сначала конформное отображение нашей области на круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Обозначая координаты в плоскости круга через u и v, мы можем переписать уравнение (7) в виде:

$$\lambda_\nu^2 P_\nu + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h\frac{\partial P_\nu}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h\frac{\partial P_\nu}{\partial v}\right)\right] g\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 0, \tag{8}$$

причем:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left|\frac{d(u+iv)}{d(x+iy)}\right|^2 \geqslant 0. \tag{9}$$

В дальнейшем мы будем считать, что:

1) h нигде внутри области не обращается в 0 (т. е. в водоеме нет мелей, доходящих до его свободной поверхности);

2) нормальная производная от h (вычисленная для плоскости первоначальных переменных x, y) не обращается в 0 на контуре, т. е. дно водоема нигде не подходит к поверхности его касательной;

3) h непрерывно и имеет непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядка (по первоначальным переменным x, y), т. е. уклон и кривизна сечения дна любой вертикальной плоскостью ограничены и при переходе от одной точки к другой меняются непрерывно;

4) область односвязна и ограничена аналитической кривой, т. е. на озере нет островов и береговая линия передается аналитической кривой.

В силу условия (4) первая производная от функции, совершающей конформное отображение единичного круга в плоскости (u, v) на первоначальную область, т. е. $\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}$ ограничена по модулю как сверху, так и снизу, а последующие производные, в частности $\frac{d^2(x+iy)}{d(u+iv)^2}$, ограничены по модулю сверху. Как видно из общеизвестных формул преобразования независимых переменных, благодаря тому, что $\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}$ ограничен снизу, из условия (2) вытекает, что и

2a) нормальная производная от h, вычисленная для плоскости переменных u, v, не обращается в 0 на контуре,

а благодаря тому, что ограничены $\left|\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}\right|$, $\left|\frac{d^2(x+iy)}{d(u+iv)^2}\right|$, из условия (3) вытекает, что и

3a) вторые производные от h по новым переменным независимым u, v ограничены вплоть до контура.

Отметим, что нам понадобятся лишь условия (1), (2a), (3a) и ограниченность $\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}$. Мы ввели более жесткие в своей совокупности ограничения (2), (3) и (4) в виду их большей наглядности. Очевидно, если про первоначальную область (очертания водоема) предположить лишь то, что $\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}$ должен получиться ограниченным, то условия (2) и (3) не эквивалентны условиям (2a) и (3a), и мы должны накладывать тогда именно условия (2a) и (3a). Не останавливаясь детально на вопросе о том, каковы должны быть очертания водоема, чтобы $\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}$ было ограничено, отметим лишь, что для этого существенно необходимо:

a) чтобы область была односвязна;

b) чтобы у контура области не было выпуклых углов, т. е. чтобы береговая линия заливов имела непрерывно меняющуюся касательную.

Напомним, что для всякой замкнутой части области, целиком лежащей в нашей области, величины $\left|\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}\right|$, $\left|\frac{d^2(x+iy)}{d(u+iv)^2}\right|$ всегда будут ограничены, а потому для всякой подобласти отмеченного вида условия (3) и (3а) эквивалентны.

Можно, наконец, отметить, что и само условие (3а) нужно в том виде, в каком мы его дали $\left(\text{ограниченность каждой из вторых производных } \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right)$ лишь для точек, близких к контуру (береговая линия). Для всякой же замкнутой внутренности нашей области нам достаточно ограниченности оператора:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{y}^2}=\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\cdot\left|\frac{d(x+iy)}{d(\bar{x}+i\bar{y})}\right|^2.$$

Перечисленных условий достаточно, чтобы мы могли пойти дальше в унифицировании нашей задачи.

Положим для этого:

$$a=\frac{h}{1-u^2-v^2};\quad P=\frac{w}{\sqrt{a}};\tag{10}$$

тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial u}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}w\frac{\partial a}{\partial u}a^{-\frac{3}{2}};$$

$$h\frac{\partial P}{\partial u}=(1-u^2-v^2)\left[\frac{\partial w}{\partial u}a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}w\frac{\partial a}{\partial u}a^{-\frac{1}{2}}\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(h\frac{\partial P}{\partial u}\right)=a^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial u}\right]+(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial u}a^{-\frac{1}{2}}-$$
$$-(1-u^2-v^2)\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}w\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2-v^2)a^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial a}{\partial u}\right]$$

и уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial v}\right]=-\lambda^2 w\frac{1}{ga}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+$$
$$+w\left\{(1-u^2-v^2)\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial v^2}\right)-\frac{1}{4a^2}\left(\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)^2\right)\right]-\frac{1}{a}\left(u\frac{\partial a}{\partial u}+v\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right\},$$

или, обозначая фигурные скобки через A_1, а выражение

$$\frac{1}{ga}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{ga}\left|\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}\right|^2$$

через B, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left((1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial v}\right)=w(A_1-\lambda^2 B).\tag{11}$$

В отношении величин B и A_1 можно заметить следующее.

В силу условий (1) и (2а) a нигде не обращается в 0, а тогда в силу предположения об ограниченности $\left|\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}\right|$ [предположение (4)] B ограничено для всей области. Для всякой замкнутой внутренней части области $\frac{1}{1-u^2-v^2}$ регулярно и ограничено, а потому для всякой замкнутой внутренней части области из ограниченности $\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial h}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}$ вытекает ограниченность $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial a}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial v^2}$, а потому и ограниченность A_1.

Покажем теперь, что A_1 ограничено и в окрестности контура. Переходя к полярным координатам r, φ ($u=r\cos\varphi$; $v=r\sin\varphi$), имеем:

$$A_1=(1-r^2)\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{1}{4a^2}\left(\left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)^2\right)\right]-\frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial r}.$$

Так как

$$a=\frac{h}{1-r^2},$$

то

$$\frac{\partial a}{\partial r}=\frac{(1-r^2)\frac{\partial h}{\partial r}+2rh}{(1-r^2)^2}.$$

Согласно условию (3а) вторые производные от h непрерывны, и мы можем приложить к h формулу Тейлора.

При $r=1$, $h=0$, итак:

$$h=(r-1)\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{2}(r-1)^2\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}\qquad (r<r^*<1).$$

Подставляя последнее выражение в выражение для $\frac{\partial a}{\partial r}$, имеем:

$$\frac{\partial a}{\partial r}=\frac{1}{(1-r^2)^2}\left[(1-r^2)\frac{\partial h}{\partial r}+2r(r-1)\frac{\partial h}{\partial r}+2r\frac{(r-1)^2}{2}\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1-r^2)^2}(1-r)^2\left[\frac{\partial h}{\partial r}+r\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}\right]=\frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial r}+r\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}\right),$$

что в силу условия (3а) ограничено. Далее,

$$\frac{\partial a}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{h}{1-r^2}=\frac{1}{1-r^2}\frac{\partial h}{\partial\varphi}.$$

Применяя к $\frac{\partial h}{\partial\varphi}$ формулу Лагранжа, имеем:

$$\frac{\partial h(r,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial h(1,\varphi)}{\partial\varphi}+(r-1)\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}.$$

В силу $h(1,\varphi)=0$, $\frac{\partial h(1,\varphi)}{\partial\varphi}$ также равно 0 и

$$\frac{\partial a}{\partial\varphi}=\frac{r-1}{1-r^2}\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}=-\frac{1}{1+r}\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi}$$

и в силу условия (3а) также ограничено.

$$(1-r^2)\frac{\partial^2 a}{\partial\varphi^2}=(1-r^2)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{h}{1-r^2}\right)=\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2},$$

значит, ограничено.

$$(1-r^2)\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}=(1-r^2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{h}{1-r^2}\right)=\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{4r}{1-r^2}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{2+6r^2}{(1-r^2)^2}h=$$
$$=\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{4r}{1-r^2}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{2+6r^2}{(1-r^2)^2}\left\{(r-1)\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{(r-1)^2}{2}\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}\right\}=$$
$$=\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}-2\frac{(1-r)}{(1+r)^2}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1+3r^2}{(1+r)^2}\frac{\partial^2 h(r^*,\varphi)}{\partial r^2}$$

и, как видно из условия (3а), также ограничено. Таким образом ограничено все выражение A_1, а вместе с тем и весь коэффициент при самой неизвестной функции в уравнении (11).

§ 2. Случай параболоида вращения

6°. Прежде чем рассматривать общий случай, приведем решение для озера, представляющего собой параболоид вращения. Если радиус свободной поверхности озера обозначить через l, а наибольшую глубину через h_0, то, выбирая начало координат в центре озера, имеем $h=h_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{l^2}\right)$. Уравнение (7) имеет в этом случае вид:

$$\lambda^2 P+\frac{\partial}{\partial x}\left(gh_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{l^2}\right)\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(gh_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{l^2}\right)\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0, \tag{7a}$$

в этом случае

$$u=\frac{x}{l},\quad v=\frac{y}{l},\quad a=h_0,\quad A_1=0,\quad B=\frac{l^2}{gh_0},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[(1-u^2-v^2)\frac{\partial w}{\partial v}\right]=-\frac{\lambda^2 w l^2}{gh^0},$$

или, вводя полярные координаты, имеем:

$$r^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(1-r^2)+r(1-3r^2)\frac{\partial w}{\partial r}+(1-r^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}=-\frac{\lambda^2 w r^2 l^2}{gh_0}=-\lambda^2 w r^2 B. \tag{12}$$

Полагая $w=CR(r)\cos k(\varphi-\varphi_0)$ для $R(r)$, имеем уравнение:

$$r^2(1-r^2)R''+r(1-3r^2)R'-(1-r^2)k^2R+\lambda^2 r^2 BR=0. \tag{13}$$

$r=0$ есть особая точка последнего уравнения, а корни характеристического уравнения, отвечающего точке $r=0$, будут $\pm k$. Так как решение должно быть регулярно при $r=0$, то разложение его в степенной ряд может начинаться лишь с r^k. Далее, вид уравнения (13) показывает, что решение регулярное при $r=0$ содержит либо только четные, либо только нечетные степени r. Итак:

$$R=r^k+p_1 r^{k+2}+\ldots+p_n r^{k+2n}+\ldots$$

Покажем, что если этот ряд не оборвется, то при $r=1$ он будет расходиться.

Рекуррентное соотношение между p_n имеет вид:

$$[(k+2n)^2-k^2]p_n=[(k+2n-2)(k+2n)-k^2-\lambda^2 B]p_{n-1}, \tag{14}$$

откуда:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 - \frac{1}{2k+2n} - \frac{1}{2n} - \frac{\lambda^2 B}{4n^2+4nk},$$

в силу чего, каковы бы ни были $\lambda^2 B$ и k, фиксировав наперед k и $\lambda^2 B$ так, чтобы ни одно p_n не обратилось в 0, можно найти такую пару чисел N и H, что при $n \geqslant N$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} > 1 - \frac{1}{n-H},$$

тогда

$$p_n > p_N \frac{N-H}{n-H},$$

но

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n-H}$$

расходится; таким образом, если ни одно из чисел p_n не обратится в 0, то решение уравнения (13) обращается на контуре в бесконечность и не удовлетворяет условию, выставленному нами в качестве пограничного. Чтобы удовлетворялось пограничное условие, надо, чтобы какое-то p_n обращалось в 0, а соотношение (14) показывает, что это будет при

$$\lambda^2 = \frac{1}{B}[(k+2n-2)(k+2n)-k^2]. \tag{15}$$

§ 3. Неоднородное уравнение

7°. Вернемся к уравнению (11) и преобразуем его, вычитая из обеих частей w и переходя к полярным координатам. Тогда получим:

$$L(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(1-r^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(1-3r^2) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}(1-r^2) - w = (A-\lambda^2 B)\,w, \tag{16}$$

где $A = A_1 - 1$.

Чтобы свести уравнение (16) к интегральному уравнению, займемся сначала неоднородным уравнением

$$L(g) = f \tag{17}$$

и попытаемся представить его решение в виде:

$$g(r_0, \varphi_0) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) f(r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr.$$

Пусть, например, g и f могут быть представлены рядами Фурье, причем ряды для g имеют коэффициенты дважды дифференцируемые по r,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi] \\ g &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_k(r)\cos k\varphi + b_k(r)\sin k\varphi], \end{aligned} \tag{18}$$

и пусть ряды Фурье для f, g, $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}$ сходятся равномерно. Подставляя выражения (18) в уравнение (17), умножая на $\frac{1}{\pi}\cos k\varphi$ $\left(\text{или соответственно } \frac{1}{\pi}\sin k\varphi\right)$ и интегрируя в пределах от 0 до 2π, имеем, выполняя в одном из слагаемых двукратное интегрирование по частям:

$$A_k(r) = a_k''(r)(1-r^2) + \frac{a_k'(r)}{r}(1-3r^2) - k^2\frac{a_k(r)}{r^2}(1-r^2) - a_k(r)$$

или, полагая:

$$(1-r^2)y''(r) + \frac{1-3r^2}{r}y'(r) - k^2\frac{1-r^2}{r^2}y(r) - y(r) = L_k(r), \tag{19}$$

$$L_k(a_k(r)) = A_k(r) \tag{20}$$

и аналогично

$$L_k(b_k(r)) = B_k(r). \tag{20'}$$

Для определения $a_k(r)$ и $b_k(r)$ из уравнений (20) и (20′) воспользуемся обычным приемом построения функции Грина для одноразмерной задачи. Особые точки однородного уравнения $L_k(y) = 0$ суть $r = 0$ и $r = \pm 1$.

Обозначим через $S_k(r)$ решение регулярное при $r = 0$, со старшим коэффициентом, равным единице, а через $C_k(r)$ решение регулярное при $r = \pm 1$, также со старшим коэффициентом, равным единице.

Если положить

$$p_\varepsilon(r_0) = C_k(r_0)\int_0^{r_0} S_k(r)P(r)\,dr + S_k(r_0)\int_{r_0}^{1-\varepsilon} C_k(r)P(r)\,dr,$$

то при $r < 1-\varepsilon$, $L_k(p_\varepsilon) = P[C_k' S_k - S_k' C_k](1-r^2)$; остальные члены пропадут, ибо S_k и C_k суть решения уравнения $L_k(y) = 0$. В силу этого же обстоятельства имеем уравнение:

$$(C_k' S_k - C_k S_k')'(1-r^2) + \frac{1-3r^2}{r}(C_k' S_k - C_k S_k') = 0,$$

откуда

$$r(1-r^2)(C_k' S_k - C_k S_k') = \delta_k = \text{const} \tag{21}$$

и

$$L_k(p_\varepsilon) = \frac{P\delta_k}{r}, \qquad (\text{при } r < 1-\varepsilon). \tag{20*}$$

$\left(\text{Если } \varepsilon = 0, \text{ то } L_k(p) = \frac{P\delta_k}{r} \text{ для всех } r.\right)$

Итак, полагая

$$K_k(r, r_0) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_k} S_k(r)C_k(r_0) & \text{при } r < r_0 \\ \frac{1}{\delta_k} S_k(r_0)C_k(r) & \text{при } r > r_0 \end{cases} \tag{22}$$

имеем:

$$a_k(r_0)=\int_0^1 rK_k(r, r_0)A_k(r)\,dr, \qquad b_k(r_0)=\int_0^1 rK_k(r, r_0)B_k(r)\,dr,$$

$$g(r_0, \varphi_0)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k(r_0)\cos k\varphi_0+b_k(r_0)\sin k\varphi_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} rK_0(r, r_0)f(r, \varphi)\,dr\,d\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} rK_k(r, r_0)f(r, \varphi)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,dr\,d\varphi$$

и, если можно переставлять порядок суммирования и интегрирования, то

$$K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)=\frac{1}{2\pi}K_0(r, r_0)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}K_k(r, r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0). \tag{23}$$

8°. Выражение (23) нами было получено формально, и теперь перед нами стоит задача обосновать его применимость, а для этого прежде всего надо изучить функции $S_k(r)$ и $C_k(r)$.[1]

Заметим сначала, что если бы мы преобразовали уравнение

$$r^2L_k(y)=r^2(1-r^2)y''+r(1-3r^2)y'-k^2(1-r^2)y-r^2y=0, \tag{24}$$

приняв за переменную независимую $R=r^2$, то коэффициенты преобразованного уравнения были бы голоморфными функциями от R, откуда видно, что $S_k(r)$ и $C_k(r)$ зависят лишь от r^2. (Это, конечно, отнюдь не значит, что разложение по степеням r^2 вокруг точки $r^2=0$ не может иметь общего множителя $(r^2)^\alpha$, где α не целое.)

Как уже отмечалось, особые точки уравнения (24) суть $r=0$ и $r=\pm 1$. Характеристические числа для $r=0$ суть k и $-k$, для $r=\pm 1$ суть 0 и 0.

Поэтому согласно определению $S_k(r)$ и $C_k(r)$ и сделанному замечанию:

$$\begin{aligned} S_k(r)&=r^k+a_{k,1}r^{k+2}+a_{k,2}r^{k+4}+\ldots+a_{k,n}r^{k+2n}+\ldots\\ C_k(r)&=1+b_{k,1}(1-r^2)+b_{k,2}(1-r^2)^2+\ldots+b_{k,n}(1-r^2)^n+\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

и, кроме этого, мы должны иметь:

$$\begin{aligned} S_k(r)&=\alpha_k\ln(1-r^2)\,C_k(r)+c_{k,0}+c_{k,1}(1-r^2)+\ldots\\ C_k(r)&=\beta_k\{r^{-k}+d_{k,1}r^{-k+2}+\ldots\}+\gamma_k\ln r^2\,S_k(r), \end{aligned} \tag{26}$$

где коэффициенты α_k, β_k и γ_k подлежат определению из сопоставления рядов (26) и (25).

Числа δ_k связаны с этими коэффициентами простыми соотношениями. Действительно, устремляя в выражении (21) r к единице, имеем:

$$\delta_k=r(1-r^2)(C_k'S_k-S_k'C_k)=r(1-r^2)\Big\{(-2rb_{k,1}+\ldots)\,\alpha_k\ln(1-r^2)-$$

$$-\Big(\frac{\alpha_k(-2r)}{1-r^2}+\ldots\Big)(1+\ldots)\Big\}=2\alpha_k. \tag{27$_1$}$$

[1] Для удобства читателя мы подытожим результаты этого изучения в конце этого n° (см. стр. 30).

Если же мы устремляем r к 0, то для $k \neq 0$ имеем:

$$\delta_k = r(1-r^2)(C_k' S_k - S_k' C_k) = r(1-r^2)\{(-k\beta_k r^{-k-1} + \ldots)(r^k + \ldots) - \\ -(kr^{k-1} + \ldots)(\beta_k r^{-k} + \ldots)\} = -2\beta_k k, \quad (27_2),$$

а для $k=0$

$$\delta_0 = r(1-r^2)(C_0' S_0 - S_0' C_0) = r(1-r^2)\left\{\left(2\gamma_0 \frac{1}{r} + \ldots\right)(1+\ldots) - \right. \\ \left. -(2ra_{0,1} + \ldots)(\gamma_0 \ln r^2 + \ldots)\right\} = 2\gamma_0. \quad (27_3)$$

Определим коэффициенты $a_{k,n}$ в разложении $S_k(r)$ вокруг точки $r=0$. Уравнение $L_k(S_k)=0$ даст рекуррентные соотношения:

$$(k+2n)(k+2n-1)a_{k,n} - (k+2n-2)(k+2n-3)a_{k,n-1} + (k+2n)a_{k,n} - \\ -3(k+2n-2)a_{k,n-1} - k^2 a_{k,n} + k^2 a_{k,n-1} - a_{k,n-1} = 0,$$

или

$$(4n^2+4nk)a_{k,n} = (4n^2-4n+k(4n-2)+1)a_{k,n-1},$$

откуда

$$a_{k,n} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2(n+k)}\right)a_{k,n-1} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right). \quad (28)$$

Найдем теперь асимптотический закон изменения $a_{k,n}$ с увеличением n, для чего перепишем его в виде:

$$a_{k,n} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\nu-1}{\nu}\,\frac{2\nu-1}{2\nu-2}\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right) = \\ = \frac{1}{2n}\,\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k}, \quad (28_1)$$

где

$$M_{\nu,k} = \left(1+\frac{1}{2(\nu-1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right).$$

Тогда:

$$a_{k,n} = \frac{1}{2n}\,\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k} = \frac{1}{2n}\,\frac{2k+1}{2k+2}\left\{\prod_{\nu=2}^{\infty} M_{\nu,k} + \left(\prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k}\right)\cdot\left(1-\prod_{\nu=n+1}^{\infty} M_{\nu,k}\right)\right\}.$$

Оценим

$$\prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k}; \quad M_{\nu,k} = \left(1+\frac{1}{2(\nu-1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right) < \left(1+\frac{1}{2\nu-3}\right)\left(1-\frac{1}{2\nu+2k+1}\right),$$

поэтому

$$M^2_{\nu,k} < \frac{2\nu-1}{2\nu-3}\cdot\frac{2\nu+2k-1}{2\nu+2k+1}$$

и

$$\left[\prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k}\right]^2 < \frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2k+3}{2k+2n+1} < 2k+3; \quad \prod_{\nu=2}^{n} M_{\nu,k} < \sqrt{2k+3}.$$

Рассмотрим теперь разность $1-\prod\limits_{\nu=n+1}^{\infty} M_{\nu,k}$:

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} M_{\nu,k}=\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2(\nu-1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right)<$$

$$<\prod_{j=0}^{k}\left(1+\frac{1}{2(n+j)}\right)\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4(n+k+j)^2}\right)<\prod_{j=0}^{k}\left(1+\frac{1}{2(n+j)}\right)<$$

$$<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sqrt{\left(\prod_{j=1}^{2k}\left(1+\frac{1}{2n+j}\right)\right)}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sqrt{\frac{2n+2k+1}{2n+1}}<$$

$$<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{k}{2n+1}\right)=1+\frac{k}{2n}.$$

С другой стороны:

$$M_{\nu,k}=\frac{4(\nu-1)(\nu+k)+2k+1}{4(\nu-1)(\nu+k)}>1$$

и поэтому

$$\left|1-\prod_{\nu=n+1}^{\infty} M_{\nu,k}\right|<\frac{k}{2n};\qquad \left|a_{k,n}-\frac{1}{2n}\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{\infty} M_{\nu,k}\right|<\frac{1}{2n}\sqrt{2k+3}\,\frac{k}{2n}.$$

Преобразуем выделенную главную часть:

$$\frac{1}{2n}\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{\infty} M_{\nu,k}=\frac{1}{2n}\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2(\nu-1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)=\frac{1}{2n}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right).$$

Но, полагая в формуле

$$\sin x=x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right)\quad x=\frac{\pi}{2},$$

имеем:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)=\frac{2}{\pi},$$

так что окончательно получаем:

$$\left|a_{k,n}-\frac{1}{n\pi}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\right|<\frac{k\sqrt{2k+3}}{4n^2}.\tag{29$_1$}$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то

$$r^k+\sum_{n=1}^{\infty} r^{k+2n}\left(a_{k,n}-\frac{1}{n\pi}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\right)=S_k(r)+\frac{r^k}{\pi}\ln(1-r^2)\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}$$

есть величина ограниченная. С другой стороны, в силу формулы (26), замечая, что $C_k(1)=1$, имеем, что $S_k(r)-\alpha_k\ln(1-r^2)$ ограничено, откуда вытекает ограниченность выражения

$$\ln(1-r^2)\left[\alpha_k+\frac{1}{\pi}r^k\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\right].$$

Значит при $r=1$ множитель в квадратных скобках равен 0, а потому:

$$\alpha_k=-\frac{1}{\pi}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}. \tag{30}$$

В дальнейшем нам придется оценивать $\frac{1}{|\alpha_k|}$, а для этого нам нужна оценка $|\alpha_k|$ снизу. Чтобы получить ее, заметим:

$$\frac{1}{2k}\left(\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2k-1}{2k}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{2\nu}{2\nu-1}\right)^2=\frac{2k}{2k-1}\prod_{\nu=1}^{k-1}\frac{2\nu}{2\nu+1}\frac{2\nu}{2\nu-1}=$$
$$=2\prod_{\nu=1}^{k-1}\frac{2\nu(2\nu+2)}{(2\nu+1)^2}>2\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu(2\nu+2)}{(2\nu+1)^2}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\nu)^2}{(2\nu)^2-1}=\left\{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)\right\}^{-1}=\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда:

$$\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}>\sqrt{k\pi}$$

и

$$|\alpha_k|=\frac{1}{\pi}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{2\nu}{2\nu-1}>\sqrt{\frac{k}{\pi}}. \tag{30$_1$}$$

Теперь мы в состоянии оценить $S_k(r)$ и $\frac{S_k(r)}{-\delta_k}$.

В силу равенства (28) имеем:

$$a_{k,n}=\prod_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2(\nu+k)}\right)<\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}, \tag{31*}$$

$$S_k(r)=\sum_{n=0}^{\infty}r^{k+2n}a_{k,n}<r^k+\frac{1}{2}r^{k+2}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}r^{k+4}+\ldots=\frac{r^k}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{31}$$

Для оценки $\frac{S_k(r)}{-\delta_k}$ воспользуемся выражениями для $a_{k,n}$ и α_k в следующем виде:

$$a_{k,n}=\frac{1}{2}\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{1}{n}\prod_{\nu=2}^{n}M_{\nu,k}, \tag{28$_1$}$$

$$\alpha_k=-\frac{1}{2}\frac{2k+1}{2k+2}\prod_{\nu=2}^{\infty}M_{\nu,k}; \tag{30$_2$}$$

тогда:

$$\frac{S_k(r)}{-\delta_k}=\frac{S_k(r)}{-2\alpha_k}=r^k\left\{\frac{1}{-2\alpha_k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}M_{\nu,k}^{-1}\right\}=$$

$$=r^k\left\{\frac{1}{-2\alpha_k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{2(\nu-1)}{2\nu-1}\,\frac{2(\nu+k)}{2(\nu+k)-1}\right\}=$$

$$=r^k\left\{\frac{1}{2|\alpha_k|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n+2}{2n+3}\cdots\frac{2n+2k}{2n+2k+1}\prod_{\nu=n+k+1}^{\infty}\frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}\right\}.$$

Оценим входящее сюда бесконечное произведение

$$\frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}<\frac{(2\nu-1)^2}{(2\nu-1)^2-1},$$

поэтому

$$\left(\prod_{\nu=n+k+1}^{\infty}\frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}\right)^2>\prod_{\nu=2n+2k+1}^{\infty}\frac{\nu^2}{\nu^2-1}=\frac{2n+2k+1}{2n+2k}=1+\frac{1}{2(n+k)}.$$

Конечное же произведение, входящее в каждый член суммы, оценивается так: так как

$$\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n+2}{2n+3}\cdots\frac{2n+2k}{2n+2k+1}<\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{2n+3}{2n+4}\cdots\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2},$$

то

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n+2}{2n+3}\cdots\frac{2n+2k}{2n+2k+1}\right)^2<\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}=\frac{2n}{2n+2k+2}.$$

Таким образом имеем:

$$\frac{S_k(r)}{-\delta_k}<r^k\left\{\frac{1}{2|\alpha_k|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n}\sqrt{\frac{2n}{2n+2k+2}}\sqrt{1+\frac{1}{2(n+k)}}\right\}<$$

$$<r^k\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{\sqrt{2n(2n+2k)}}\right\}. \tag{32}$$

При $k=0$ заменять $\frac{1}{|\alpha_k|}$ через $\sqrt{\frac{\pi}{k}}$, очевидно, не следует. Если же не выполнить этой замены, то неравенство (32) примет вид:

$$S_0(r)<1+2|\alpha_0|\sum\frac{r^{2n}}{2n}=1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r^2}. \tag{32*}$$

Перейдем к рассмотрению $C_k(r)$.

Исходя из второго соотношения (26) и принимая во внимание, что $C_k(r)$ есть решение уравнения $L_k(y)=0$, имеем для $n<k$ аналогично с (28) рекуррентные соотношения:

$$d_{k,n}=d_{k,n-1}\left(1+\frac{1}{2(k-n)}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2(k-\nu)}\right)\left(1-\frac{1}{2\nu}\right). \tag{33}$$

При заданном k, с увеличением n от 1 до $k-1$, $d_{k,n}$, как видно из формулы (33), сначала убывают, а потом с некоторого момента начинают возрастать. Оценим поэтому

$$d_{k,\,k-1}=\prod_{\nu=1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{2(k-\nu)}\right)\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)=\prod_{\nu=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)<1.$$

Поэтому для всех $n<k$

$$d_{k,\,n}<1.$$

Вместе с тем

$$d_{k,\,k-1}=\prod_{\nu=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)>\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

При $n\geqslant k$ рекуррентное соотношение имеет более сложный вид. Полагая $n=m+k$, имеем:

$$\begin{aligned}0=\beta_k\{&(2m+k)(2m+k-1)\,d_{k,\,m+k}-(2m+k-2)(2m+k-3)\,d_{k,\,m+k-1}+\\&+(2m+k)\,d_{k,\,m+k}-3(2m+k-2)\,d_{k,\,m+k-1}-k^2 d_{k,\,m+k}+k^2 d_{k,\,m+k-1}-\\&-d_{k,\,m+k-1}\}+2\gamma_k\{[-a_{k,\,m}+a_{k,\,m-1}+2(2m+k)\,a_{k,\,m}-\\&-2(2m+k-2)\,a_{k,\,m-1}]+(a_{k,\,m}-3a_{k,\,m-1})\}.\end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned}0=2m(2m+2k)\,d_{k,\,m+k}-(2m-1)(2m+2k-1)\,d_{k,\,m+k-1}+\\+4\frac{\gamma_k}{\beta_k}\{(2m+k)\,a_{k,\,m}-(2m+k-1)\,a_{k,\,m-1}\}.\end{aligned}$$

Подстановка $m=0$ даст при $k\neq 0$:

$$2\gamma_k=-\beta_k\,d_{k,\,k-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right). \tag{34}$$

Чтобы уловить общее выражение для коэффициентов $d_{k,\,n}$, представляется удобным рассмотреть отношение

$$l_{k,\,m}=\frac{d_{k,\,m+k}\,\beta_k}{a_{k,\,m}\,2\gamma_k}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}2m(2m+2k)\,l_{k,\,m}-(2m-1)(2m+2k-1)\,l_{k,\,m-1}\frac{a_{k,\,m-1}}{a_{k,\,m}}+\\+2\left[(2m+k)-(2m+k-1)\frac{a_{k,\,m-1}}{a_{k,\,m}}\right]=0\end{aligned}$$

и

$$l_{k,\,m}=l_{k,\,m-1}+\frac{1}{2m(2m-1)}+\frac{1}{(2m+2k)(2m+2k-1)},$$

откуда:

$$l_{k,\,m}=l_{k,\,0}+\sum_{\nu=1}^{m}\left\{\frac{1}{2\nu(2\nu-1)}+\frac{1}{(2\nu+2k)(2\nu+2k-1)}\right\}.$$

Введем обозначение

$$Q_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu-1)}.$$

Тогда, при $m \to \infty$, $l_{k,m} \to l_{k,0} + Q_0 + Q_k$. Полагая во второй формуле (26) $r = 1$, имеем:

$$1 = \beta_k (1 + d_{k,1} + d_{k,2} + \ldots),$$

откуда видно, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} d_{k,m+k}$ сходится. Так как $l_{k,m}$ с увеличением m возрастают, то либо $l_{k,m} < 0$ для всех m, либо для всех m, начиная с некоторого, $l_{k,m} > 0$, $a_{k,m} > 0$; итак, либо $d_{k,m+k} > 0$ для всех m, либо для всех m, начиная с некоторого, $d_{k,m+k} < 0$. И при том и при другом предположении из того, что $\sum_{m=1}^{\infty} d_{k,m+k}$ сходится, между тем как $\sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m}$ расходится, следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{d_{k,m+k}}{a_{k,m}} = 0 \quad \text{и} \quad l_{k,0} = -Q_0 - Q_k.$$

Значит, $l_{k,m} = -Q_m - Q_{k+m}$, и окончательно получим:

$$d_{k,m+k} = -\frac{2\gamma_k}{\beta_k} a_{k,m} (Q_m + Q_{k+m}) = \frac{2k-1}{2k} d_{k,k-1} a_{k,m} (Q_m + Q_{k+m}). \tag{35}$$

Для $k = 0$ второе из равенств (35), очевидно, не имеет смысла. Полагая же в первом $m = 0$ и замечая, что $d_{0,0} = 1$, имеем:

$$\beta_0 = -4\gamma_0 Q_0 = -4\alpha_0 Q_0 = \frac{4 \ln 2}{\pi}.$$

Из формулы (35) следует также, что $d_{n,k} \leqslant 1$ для $n \geqslant k$. (Для $n < k$ это было показано выше.) Действительно, $Q_0 + Q_1 < 1$ с увеличением значка Q убывает; итак, $Q_m + Q_{m+k} < 1$, кроме случая $m = k = 0$; остальные же сомножители меньше единицы. А для $k = m = 0$, $d_{0,0} = 1$ по предположению.

Изучив поведение коэффициентов $d_{k,n}$, перейдем к оценке $\frac{C_k(r)}{\beta_k}$. Разобьем для этого $\sum_{k=0}^{\infty} d_{k,n} r^{2n}$ на три части:[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{k,n} r^{2n} = \sum_{n=0}^{n \leqslant \frac{k}{2}} d_{k,n} r^{2n} + \sum_{n > \frac{k}{2}}^{n=k-1} d_{k,n} r^{2n} + \sum_{n=k}^{\infty} d_{k,n} r^{2n},$$

и рассмотрим порознь каждую из этих частей. При $n \leqslant k-1$

$$d_{k,n} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2(k-\nu)}\right).$$

Если $n \leqslant \frac{k}{2}$, то все $\nu \leqslant \frac{k}{2}$ и

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2(k-\nu)}\right) < \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2\left(k - \frac{k}{2}\right)}\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} < \sqrt{e}.$$

[1] См. сноску на стр. 28.

Тогда:

$$\sum_{n=0}^{n\leq\frac{k}{2}} d_{k,n} r^{2n} < \sqrt{e} \sum_{n=0}^{n\leq\frac{k}{2}} r^{2n} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right) < \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right) = \sqrt{\frac{e}{1-r^2}}.$$

На ряду с этим формула (33) дает и такое представление для $d_{k,n}$:

$$d_{k,n} = d_{k,k-1}\left\{\prod_{\nu=n+1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\left(1+\frac{1}{2(k-\nu)}\right)\right\}^{-1} = d_{k,k-1}\prod_{\nu=n+1}^{k-1}\frac{2\nu}{2\nu-1}\,\frac{2k-2\nu}{2k-2\nu+1}.$$

Если $n>\frac{k}{2}$, то здесь все $\nu>\frac{k}{2}$ и

$$\prod_{\nu=n+1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{2\nu-1}\right) < \prod_{\nu=n+1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right) = \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-n-1} < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{k}{2}-1} < \sqrt{e},$$

$$\prod_{\nu=n+1}^{k-1}\frac{2k-2\nu}{2k-2\nu+1} = \prod_{\mu=1}^{k-n-1}\frac{2\mu}{2\mu+1}; \quad d_{k,k-1}<1;$$

итак, при $\frac{k}{2}<n<k-1$

$$d_{k,n} < \sqrt{e}\prod_{\mu=1}^{k-n-1}\frac{2\mu}{2\mu+1},$$

$$\sum_{n>\frac{k}{2}}^{n=k-1} d_{k,n} r^{2n} < \sqrt{e}\sum_{n>\frac{k}{2}}^{n=k-1} r^{2n}\prod_{\mu=1}^{k-n-1}\frac{2\mu}{2\mu+1} < \sqrt{e}\sum_{n>\frac{k}{2}}^{n=k-1} r^{2k-2n-2}\prod_{\mu=1}^{k-n-1}\frac{2\mu}{2\mu+1} <$$

$$< \sqrt{e}\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m}\prod_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu}{2\mu+1} = \sqrt{e}\,\frac{\arcsin r}{r\sqrt{1-r^2}} < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{1-r^2}}.$$

Оценим, наконец, для $k\neq 0$ величину последнего слагаемого:

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_{k,n} r^{2n} = r^{2k-1}\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} d_{k,m+k} =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} d_{k,k-1} r^{2k-1}\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} a_{k,m}(Q_m+Q_{k+m}) < 2r^{2k-1}\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} a_{k,m} Q_m,$$

ибо $d_{k,k-1}<1$, $Q_{k+m}<Q_m$.

Далее имеем неравенства:

$$Q_m = \sum_{\nu=m+1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu-1)} = \sum_{\mu=2m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} < \frac{1}{2m+1}$$

$$a_{k,m} < \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2m-1}{2m} \qquad \text{(см. (31*)).}$$

Итак,

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_{k,n} r^{2n} < 2r^{2k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2m-1}{2m} r^{2m+1} = 2r^{2k-1} \arcsin r \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{k,n} r^{2n} < \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{e}{1-r^2}} + \pi.$$

Сопоставление формул (26) и (34) дает:

$$\frac{r^k C_k(r)}{\beta_k} = \sum_{n=0}^{\infty} d_{k,n} r^{2n} + r^k \frac{2k-1}{2k} d_{k,k-1} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r^2} S_k(r);$$

напомним неравенства

$$S_k(r) < \frac{r^k}{\sqrt{1-r^2}}; \quad \frac{r^{2k} \ln \frac{1}{r^2}}{\sqrt{1-r^2}} < \frac{r^2 \ln \frac{1}{r^2}}{\sqrt{1-r^2}} < \frac{r^2 \ln \frac{1}{r^2}}{1-r^2}.$$

$\dfrac{r^2 \ln \frac{1}{r^2}}{1-r^2}$ достигает своего максимума при $r=1$, ибо производная его на всем промежутке $0<r<1$ положительна. При $r=1$ он обращается в единицу. Кроме того, $\frac{2k-1}{2k} d_{k,k-1} < 1$. Итак, при $k \neq 0$

$$\frac{r^k C(r)}{\beta_k} < \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{e}{1-r^2}} + \pi + \frac{1}{2} < 4\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + 1\right). \tag{36}$$ [1]

Заметим, кроме того, что так как все $d_{k,n}$, $\gamma_k \ln r^2$ и $S_k(r)$ положительны, $C_k(r) > 0$. Неравенство (36) при $r=1$ не дает никакой оценки, хотя сами $r^k C_k(r)$ обращаются в 1.

Поищем оценку, годную близ $r=1$. Полагая $y=1-r^2$, $Q=r^k C_k(r)$, преобразуем уравнение $L_k(C_k(r))=0$ к виду:

$$4y(1-y)\frac{d^2 Q}{dy^2} + 4[(k-2)y+1]\frac{dQ}{dy} + (2k-1)Q = 0, \tag{37}$$

в справедливости чего убеждаемся, замечая, что

$$-2\frac{dQ}{dy} = k r^{k-2} C_k + r^{k-1} C_k',$$

$$4\frac{d^2 Q}{dy^2} = k(k-2) r^{k-4} C_k + (2k-1) r^{k-3} C_k' + r^{k-2} C_k''.$$

При $r=1$ $C_k(r)$ регулярно и обращается в 1. Значит, при $y=0$ Q регулярно и также равно 1, и

$$Q = 1 + y\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=0} + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2 Q}{dy^2}\right)_{y=0} + \cdots$$

[1] Неравенство (36) в пределах настоящей заметки не будет использовано, но им придется воспользоваться, когда мы поставим вопрос об оценке $\frac{\partial}{\partial \varphi}[K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)]$.

Подставляя этот ряд в уравнения (37) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, имеем:

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=0} = -\frac{2k-1}{4}; \quad \left(\frac{d^2 Q}{dy^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{32}(2k-1)(6k-9). \tag{38}$$

Напомним, что $Q = r^k C_k(r)$ всегда положительно. Для $k \geqslant 2$, $\frac{d^2 Q}{dy^2}$ при $y=0$ положительно, как то видно из формулы (38), а $\frac{dQ}{dy}$ при $y=0$ отрицательно. Покажем, что $\frac{dQ}{dy}$ всегда отрицательно. Допустим противное и обозначим через y_1 наименьший корень уравнения $\frac{dQ}{dy}=0$. Тогда в силу уравнения (37) и положительности Q, $\left(\frac{d^2 Q}{dy^2}\right)_{y=y_1} < 0$, т. е. $\frac{d^2 Q}{dy^2}$ меняет знак на промежутке $0 < y < y_1$, следовательно, есть $y_2 < y_1$ такое, что $\left(\frac{d^2 Q}{dy^2}\right)_{y=y_2} = 0$.

Можно считать при этом y_2 наибольшим корнем уравнения $\frac{d^2 Q}{dy^2} = 0$ в промежутке $(0, y_1)$, так что $\frac{d^2 Q}{dy^2}$ отрицательно на промежутке (y_1, y_2). Поэтому:

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=y_1} - \left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=y_2} = \int\limits_{y_2}^{y_1} \frac{d^2 Q}{dy^2}\, dy < 0,$$

но $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=y_1} = 0$. Значит, $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=y_2} > 0$, между тем как $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=0} < 0$ и у уравнения $\frac{dQ}{dy} = 0$ есть корень $y_3 < y_2 < y_1$, вопреки предположению, что y_1 есть наименьший корень. Итак, допустив, что $\frac{dQ}{dy}$ меняет знак, мы пришли к противоречию, значит, $\frac{dQ}{dy}$ всегда отрицательно, Q с увеличением y убывает, но остается положительным; итак,

$$Q \leqslant (Q)_{y=0} = 1, \text{ т. е. } r^k C_k(r) \leqslant 1. \tag{39}$$

Для $k=1$ и $k=0$ приведенное рассуждение неприложимо, так как $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{y=0} > 0$ для $k=0$ и $\left(\frac{d^2 Q}{dy^2}\right)_{y=0} < 0$ для $k=1$. Для $k=1$ неравенство (39) сохраняет силу. Действительно, уравнение (37) при $k=1$ имеет вид:

$$4y(1-y)\frac{d^2 Q}{dy^2} + 4(1-y)\frac{dQ}{dy} + Q = 0,$$

и если положить $Q = 1 + q_1 y + q_2 y^2 + \ldots$, то для коэффициентов q_n будет иметься рекуррентное соотношение:

$$q_{n+1} = \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2} q_n,$$

откуда видно, что все q_n для $n \geqslant 1$ отрицательны, а так как Q положительно, то $0 \leqslant Q \leqslant 1$.

Нам остается еще рассмотреть $C_0(r)$.

Уравнение (37) при $k=0$ имеет вид:

$$4\frac{d}{dy}\left(y(1-y)\frac{dQ}{dy}\right) = Q,$$

и не меняется от подстановки $y_1 = 1 - y$. Значит, разложение решения, регулярного при $y=0$, по степеням y имеет ровно те же коэффициенты, что и разложение решения, регулярного при $y=1$, по степеням $(1-y)$. Но $1-y=r^2$ и решение, регулярное при $y=1$, есть $S_0(r)$. Значит, разложение $C_0(r)$ по степеням $(1-r^2)$ имеет те же коэффициенты, что и разложение $S_0(r)$ по степеням r^2 и $C_0(\sqrt{1-r^2}) = S_0(r)$. Но для $S_0(r)$ оценка (32*) дает:

$$S_0(r) < 1 + |2\alpha_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n} = 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{1-r^2}.$$

Значит,

$$C_0(r) = S_0(\sqrt{1-r^2}) < 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{r^2}. \tag{40}$$

Подытожим основные выводы настоящего параграфа. Для $S_k(r)$ имеются неравенства:

$$0 < S_k(r) < \frac{r^k}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{29}$$

$$0 < \frac{S_k(r)}{|\delta_k|} < \frac{r^k}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\sqrt{n(n+k)}} \right\}, \tag{32}$$

годные при всех $k \neq 0$. Для $C_k(r)$ неравенства:

$$0 < \frac{C_k(r)}{\beta_k} < 4\,\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + 1 \right) r^{-k}, \tag{36}$$

$$0 < C_k(r) < r^{-k}, \tag{39}$$

годные при всех $k \neq 0$. Для $k=0$ имеем:

$$0 < C_0(r) < 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{r^2}, \tag{40*}$$

$$0 < S_0(r) < 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{1-r^2}. \tag{32*}$$

Для постоянных β_k и δ_k, входящих в эти неравенства, в силу формулы

$$\alpha_k = -\frac{1}{\pi} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{2\nu}{2\nu-1} \tag{30}$$

и равенств (27) имеются выражения:

$$\left.\begin{aligned} \delta_k &= 2\alpha_k = -\frac{2}{\pi} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{2\nu}{2\nu-1}, \\ \beta_k &= -\frac{\alpha_k}{k} = \frac{1}{k\pi} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{2\nu}{2\nu-1}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и в силу неравенства (30_1) для δ_k имеет место оценка:

$$|\delta_k| = 2|\alpha_k| > 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}. \tag{42}$$

9°. В силу неравенств (29), (39) и (42) имеем при $k \neq 0$:

$$\frac{1}{|\delta_k|} S_k(r)\, C_k(r_0) < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} < \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

а так как

$$K_k(r, r_0) \begin{cases} = \dfrac{1}{\delta_k} S_k(r)\, C_k(r_0) & \text{при} \quad r < r_0 \\ = \dfrac{1}{\delta_k} S_k(r_0)\, C_k(r) & \text{при} \quad r_0 < r \end{cases}$$

[см. (22)], то при $r < r_0$

$$|K_k(r, r_0)| < \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

а при $r < r_0$

$$|K_k(r, r_0)| < \left(\frac{r_0}{r}\right)^k \frac{1}{\sqrt{1-r_0^2}}.$$

Тогда, положив для определенности $r \leqslant r_0$, видим, что для ряда

$$K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0) \qquad (23)$$

будет существовать мажорантный ряд

$$\frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^k,$$

сходящийся при $r < r_0$ и равномерно сходящийся при $r < r_0 - \varepsilon$.

Переставляя местами r_0 и r, получим мажорантный ряд для случая $r_0 < r$. Итак, ряд (23) сходится абсолютно при $r \neq r_0$ и притом равномерно, если $|r - r_0| > \varepsilon$. Установив, таким образом, существование функции $K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$, перейдем к ее изучению. Покажем прежде всего, что

$$\iint_{\Omega} r\, |K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\, dr\, d\varphi,$$

взятый по всему кругу (Ω) $|r| \leqslant 1$, ограничен для всех r_0 сразу. Во-первых, в силу неравенства Шварца имеем:

$$\left\{\int_0^{2\pi} |K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\, d\varphi\right\}^2 \leqslant \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \{K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\}^2 d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0)\right\}^2 d\varphi.$$

В силу доказанного выше ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится абсолютно и равномерно, а поэтому его можно интегрировать почленно; почленное же интегрирование дает:

$$2\pi \left\{2\pi \left(\frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0)\right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} K_k(r, r_0)\right)^2\right\} = K_0^2(r, r_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0);$$

итак,

$$\int_0^{2\pi} |K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\, d\varphi < \sqrt{K_0^2(r, r_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)} <$$

$$< |K_0(r, r_0)| + \sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}. \tag{43}$$

Далее, полагая для определенности $r < r_0$ и пользуясь неравенствами (32) и (39), имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k} (r_0\, C_k(r_0))^2 \left(\frac{S_k(r)}{\delta_k r^k}\right)^2 <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k} \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\sqrt{n(n+k)}}\right]^2.$$

Применяя к каждой квадратной скобке неравенства Шварца:

$$\left(\sum_n x_n^2\right)\left(\sum_n y_n^2\right) \geqslant \left(\sum_n x_n y_n\right)^2,$$

имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0) < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k} \left[\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n+k}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_0^{2k}} \frac{r^{2n+2k}}{n+k} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2m}}{m} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^4} + \cdots + \frac{1}{r_0^{2m}}\right). \tag{44}$$

Последнюю сумму можно оценивать двояко. С одной стороны

$$\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^4} + \cdots + \frac{1}{r_0^{2m}}\right) = \frac{1}{r_0^{2m}}(1 + r_0^2 + \ldots + r_0^{2m}) < \frac{m}{r_0^{2m}}$$

и (44) дает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0) < \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{r_0^{2m}} = \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r^2}\right) \frac{r^2}{r_0^2 - r^2}$$

или, еще усиливая неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0) < \frac{1}{4(r_0^2 - r^2)}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r^2}\right). \tag{45}$$

С другой стороны, сумму, входящую в неравенство (44), можно выразить в конечном виде, а именно:

$$\ln(1-r^2)-\ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}r^{2m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m}}{m}\left(\frac{1}{r^{2m}}-1\right)=\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m}}{m}\left(\frac{1}{r_0^{2m-2}}+\cdots+1\right)=$$

$$=(1-r_0^2)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_0^{2m}}+\cdots+\frac{1}{r_0^2}\right)\frac{r^{2m}}{m},$$

а потому:

$$\sum_{k=1}^{\infty}K_k^2(r,r_0)<\frac{1}{4}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r^2}\right)\frac{1}{1-r_0^2}\left\{\ln(1-r^2)-\ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right\}. \quad (46)$$

Если $r_0<r$, то в неравенствах (45) и (46) надо переставить r_0 и r.

Перейдем теперь к оценке интересующего нас двойного интеграла. В силу (43):

$$\iint_{\Omega} r\,|K(r,\varphi;r_0,\varphi_0)|\,dr\,d\varphi<\int_0^1 r\,|K_0(r,r_0)|\,dr+\sqrt{2}\int_0^1 r\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}K_k^2(r,r_0)}\,dr.$$

В силу (32*), (40) и (41):

$$\int_0^{r_0} r\,|K_0(r,r_0)|\,dr=\frac{1}{|\delta_0|}\int_0^{r_0} rS_0(r)\,C_0(r_0)\,dr<$$

$$<\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_0^2}\right)\int_0^{r_0} r\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r^2}\right)dr=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{r_0^2}\right)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)r_0^2-\frac{1}{\pi}(1-r_0^2)\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right]<$$

$$<\left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{r_0^2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)r_0^2\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

ибо $r_0^2\left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{r_0^2}\right)$ на промежутке (0,1) монотонно возрастает, а потому не больше $\frac{\pi}{2}$.

В силу соотношения (40):

$$C_0(r)=S_0(\sqrt{1-r_0^2})$$

имеем:

$$\int_{r_0}^{1} r\,|K_0(r,r_0)|\,dr=\frac{1}{|\delta_0|}\int_{r_0}^{1} rS_0(r_0)\,C_0(r)\,dr=\frac{1}{|\delta_0|}\int_{r_0}^{1} r\,C_0(\sqrt{1-r_0^2})\,S_0(\sqrt{1-r^2})\,dr$$

и, совершая подстановку $t=\sqrt{1-r^2}$, $t_0=\sqrt{1-r_0^2}$, получим:

$$\frac{1}{|\delta_0|}\int_0^{t_0} C_0(t_0)\,S_0(t)\,dt,$$

которое совпадает с подсчитанным выше, а значит, $\leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

В силу (45) имеем:

$$\int_0^{r_0} r \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr < \frac{1}{2} \int_0^{r_0} r \sqrt{\frac{1}{r_0^2 - r^2}\left(\pi + \ln \frac{1}{1-r^2}\right)}\, dr <$$

$$< \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \frac{r}{r_0} \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 - r}\left(\pi + \ln \frac{r_0^2}{r_0^2 - r^2}\right)}\, dr = \frac{r_0}{2} \int_0^1 S \sqrt{\frac{1}{1-S^2}\left(\pi + \ln \frac{1}{1-S^2}\right)}\, dS =$$

$$= \frac{r_0}{2} \int_0^1 \sqrt{\pi + \ln \frac{1}{x^2}}\, dx < \frac{r_0}{2} \sqrt{\left(\int_0^1 dx \int_0^1 \left(\pi + \ln \frac{1}{x^2}\right) dx\right)} =$$

$$= \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi + 2} < \sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}.$$

(Мы полагали $r = r_0\, S = r_0 \sqrt{1 - x^2}$ и затем воспользовались неравенством Шварца.)

$$\int_{r_0}^{1} r \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr < \frac{1}{2} \int_{r_0}^{1} r \sqrt{\frac{1}{r^2 - r_0^2}\left(\pi + \ln \frac{1}{1-r_0^2}\right)}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi + \ln \frac{1}{1-r_0^2}} \int_{r_0}^{1} \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^2 - r_0^2}\right]_{r_0}^{1} \sqrt{\pi + \ln \frac{1}{1-r_0^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 - r_0^2} \sqrt{\pi + \ln \frac{1}{1-r_0^2}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ибо $(1 - r_0^2)\left(\pi + \ln \frac{1}{1-r_0^2}\right)$ на промежутке (0, 1) монотонно убывает.

Собирая вместе полученные оценки, имеем:

$$\iint r\,|K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\, dr\, d\varphi < \int_0^1 r\,|K_0(r, r_0)|\, dr + \sqrt{2} \int_0^1 r \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr <$$

$$< \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] < 5.5. \tag{47}$$

В дальнейшем нам понадобится также то, что и интеграл

$$\iint_{\Omega} r\,|K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)| \ln \frac{1}{1-r^2}\, dr\, d\varphi$$

ограничен для всех r_0 сразу. В силу (43) имеем:

$$\iint_{\Omega} r \ln \frac{1}{1-r^2}\, |K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\, dr\, d\varphi <$$

$$< \int_0^1 r \ln \frac{1}{1-r^2} |K_0(r, r_0)| dr + \sqrt{2} \int_0^1 r \ln \frac{1}{1-r^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr$$

$$\int_0^{r_0} r \ln \frac{1}{1-r^2} |K_0(r, r_0)| dr < \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_0^2}\right) \int_0^{r_0} r \ln\frac{1}{1-r^2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r^2}\right) dr =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{r_0^2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right) r_0^2 + (1-r_0^2)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\ln(1-r_0^2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\pi}\ln^2(1-r_0^2)\right]\right\} < 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{r_0}^1 r \ln\frac{1}{1-r^2} |K_0(r, r_0)| dr < \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right) \int_{r_0}^1 r \ln\frac{1}{1-r^2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r^2}\right) dr <$$

$$< \left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\left\{\ln\frac{1}{1-\left(\frac{1+r_0}{2}\right)^2}\int_{r_0}^{\frac{1+r_0}{2}} r\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r^2}\right) dr + \right.$$

$$\left. + \left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\left(\frac{1+r_0}{2}\right)^2}\right)\int_{\frac{1+r_0}{2}}^1 r\ln\frac{1}{1-r^2}\, dr\right\} < \left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right) \times$$

$$\times \left\{\ln\frac{2}{1-r_0^2}\int_{r_0}^1 r\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r^2}\right) dr + \left(1+\frac{2}{\pi}\ln 4\right)\int_{r_0}^1 r\ln\frac{1}{1-r^2}\, dr\right\} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\left\{\ln\frac{2}{1-r_0^2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)(1-r_0^2) - \frac{1}{\pi} r_0^2 \ln r_0^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left(1+\frac{2}{\pi}\ln 4\right)\frac{1}{2}(1-r_0^2)\left[1-\ln(1-r_0^2)\right]\right\} <$$

$$< (1-r_0)\left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\left\{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\ln 2\right] + \ln\frac{1}{1-r_0^2}\left[\left(1+\frac{1}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi}\ln 2\right]\right\} <$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln 2\right)(1-r_0^2)\left(1+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\ln 2\right)\frac{4}{e},$$

ибо $x(1-\ln x)^2$ достигает максимума при $\ln x = -1$ и максимум этот равен $\frac{4}{e}$.

$$\int_0^{r_0} r \ln\frac{1}{1-r^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr < \frac{1}{2}\int_0^{r_0} r\ln\frac{1}{1-r^2}\sqrt{\frac{1}{r_0^2-r^2}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r^2}\right)}\, dr <$$

$$< \frac{1}{2}\int_0^{r_0}\frac{r}{r_0}\ln\frac{r_0^2}{r_0^2-r^2}\sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2-r^2}\left(\pi+\ln\frac{r_0^2}{r_0^2-r^2}\right)}\, dr = \frac{r_0}{2}\int_0^1 \ln\frac{1}{x^2}\sqrt{\pi+\ln\frac{1}{x^2}}\, dx <$$

$$< \frac{1}{2}\sqrt{\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{x^2}\, dx \int_0^1 \ln\frac{1}{x^2}\left(\pi+\ln\frac{1}{x^2}\right) dx\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2(2\pi+4\cdot 2)} = \sqrt{4+\pi}$$

$$\int_{r_0}^{1} r \ln\frac{1}{1-r^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)}\, dr < \frac{1}{2}\sqrt{\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}}\int_{r_0}^{1}\ln\frac{1}{1-r^2}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-r_0^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}}\cdot\int_{0}^{\sqrt{1-r_0^2}}\ln\frac{1}{1-r_0^2-t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}}\cdot 2\sqrt{1-r_0^2}\left(1+\ln\frac{1}{2\sqrt{1-r_0^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{\pi}\,\sqrt{(1-r_0^2)}\sqrt{1+\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{1-r_0^2}}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{(1-r_0^2)}-\ln 2\right)<$$

$$<\sqrt{\pi\,(1-r_0^2)\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)^3}<\frac{3\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2e}},$$

ибо

$$\int_{0}^{\sqrt{1-r_0^2}}\ln\frac{1}{1-r_0^2-t^2}\,dt=\int_{0}^{\sqrt{1-r_0^2}}\ln\frac{1}{\sqrt{1-r_0^2}-t}\,dt+\int_{0}^{\sqrt{1-r_0^2}}\ln\frac{1}{\sqrt{1-r_0^2}+t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{2\sqrt{1-r_0^2}}\ln\frac{1}{t}\,dt=2\sqrt{1-r_0^2}\left(1+\ln\frac{1}{2\sqrt{1-r_0^2}}\right)$$

и $x\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)^3$ достигает своего максимума при $\ln x=-1$, а сам максимум равен $\frac{27}{8e}$.

Итак,

$$\iint_{\Omega} r\ln\frac{1}{1-r^2}\,|K(r, \varphi, r_0, \varphi_0|\,dr\,d\varphi<1+\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\ln 2\right)\frac{4}{e}+$$

$$+\sqrt{2}\left\{\sqrt{4+\pi}+\frac{3\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2e}}\right\}<13. \tag{48}$$

Если обозначить через $R_N(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$ остаточный член ряда (23), т. е. положить

$$R_N=\frac{1}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty}K_k(r, r_0)\cos(\varphi-\varphi_0), \tag{49}$$

о из неравенств (47) и (48) следует также, что

$$\begin{gathered}\iint_{\Omega} r\,|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,dr\,d\varphi\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0;\\ \iint_{\Omega} r\ln\frac{1}{1-r^2}\,|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,dr\,d\varphi\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0.\end{gathered} \tag{50}$$

Действительно, рассмотрим для примера первое из предельных равенств (50). Аналогично (43) имеем:

$$\int_{0}^{2\pi}|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,d\varphi<\sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty}K_k^2(r, r_0)}, \tag{51}$$

поэтому

$$\int_{r_0-\eta}^{r_0+\eta}\int_0^{2\pi} r\,|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,d\varphi\,dr <$$

$$< \sqrt{2}\int_{r_0-\eta}^{r_0+\eta} r\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)}\,dr < \sqrt{2}\int_{r_0-\eta}^{r_0+\eta} r\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)}\,dr.$$

Доказывая неравенство (47), мы показали сходимость интеграла

$$\int_0^1 r\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)}\,dr,$$

а потому при достаточно малом $\eta=\eta(\varepsilon)$

$$\int_{r_0-\eta}^{r_0+\eta} r\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)}\,dr < \varepsilon,$$

а для $|r-r_0|>\eta$, в силу равномерной сходимости ряда (23) в такой области, можно найти такое $N=N(\eta(\varepsilon))$, что

$$|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|<\varepsilon$$

и

$$\iint_\Omega r\,|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,dr\,d\varphi < \iint_{|r-r_0|>\eta} r\varepsilon\,dr\,d\varphi + \int_{r_0-\eta}^{r_0+\eta}\int_0^{2\pi} r\,|R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\,dr\,d\varphi < \varepsilon\pi+\varepsilon\sqrt{2}$$

где ε — произвольное наперед заданное число. Этим доказывается первая из формул (50). Тем же путем доказывается и вторая. Вопрос о равномерности этого стремления относительно r_0 мы оставляем открытым, поскольку она нам нигде не потребуется.

Изучим, наконец, интеграл $\iint_\Omega rK^2(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,dr d\varphi$.

В силу равномерной (относительно φ) при $r\neq r_0$ сходимости ряда, стоящего под знаком интеграла, мы можем выполнить почленное интегрирование, откуда получим:

$$\int_0^{2\pi} K^2(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}K_0(r,r_0)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\right\}^2 d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2\pi}K_0^2(r,r_0)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}K_k^2(r,r_0).$$

Откуда:

$$\iint_\Omega rK^2(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,d\varphi\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 rK_0^2(r,r_0)\,dr+\frac{1}{\pi}\int_0^1 r\sum_{k=1}^{\infty}K_k^2(r,r_0)\,dr. \qquad (52)$$

В силу (32*), (40) и (41):

$$\int_0^{r_0} rK_0^2(r,r_0)\,dr = \frac{1}{\delta_0^2}\int_0^{r_0} r S_0^2(r)\, C_0^2(r_0)\,dr =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_0^2}\right)^2 \int_0^{r_0} r\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r^2}\right)^2 dr =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_0^2}\right)^2 \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\right)r_0^2 - (1-r_0^2)\left(\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\right)\ln\frac{1}{1-r_0^2} + \frac{4}{\pi^2}\ln^2\frac{1}{1-r_0^2}\right] <$$

$$< \frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_0^2}\right)^2 r_0^2 < \left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{16}{\pi^2 e^{2-\frac{\pi}{2}}} < 4.02,$$

ибо $x\left(1-\frac{2}{\pi}\ln x\right)^2$ достигает максимума $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 e^{\frac{\pi}{2}-2}$ при $\ln x = \frac{\pi}{2}-2$.

Соотношение (40) $C_0(r) = S_0(\sqrt{1-r^2})$ дает:

$$\int_{r_0}^{1} rK_0^2(r,r_0)\,dr = \frac{1}{\delta_0^2}\int_{r_0}^{1} rS_0^2(r_0)\, C_0^2(r)\,dr = \frac{1}{\delta_0^2}\int_{r_0}^{1} rC_0^2(\sqrt{1-r_0^2})\, S_0^2(\sqrt{1-r^2})\,dr =$$

$$= \frac{1}{\delta_0^2}\int_0^{\sqrt{1-r_0^2}} tC_0^2(\sqrt{1-r_0^2})\, S_0^2(t)\,dt < 4.02,$$

ибо совпадает с подсчитанным выше.

В силу неравенства (46):

$$\int_0^{r_0} r\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)\,dr < \frac{1}{4}\int_0^{r_0} r\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r^2}\right)\frac{1}{1-r_0^2}\left[\ln(1-r^2) - \ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right]dr <$$

$$< \frac{1}{4}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\frac{1}{1-r_0^2}\left\{\int_0^{r_0} r\ln(1-r^2)\,dr - \int_0^{r_0} r\ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)dr\right\}.$$

Но

$$\int_0^{r_0} r\ln(1-r^2)\,dr = -\frac{1}{2}\left[r_0^2 + (1-r_0^2)\ln(1-r_0^2)\right]$$

$$\int_0^{r_0} r\ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)dr = -\frac{1}{2}r_0^2.$$

Итак,

$$\int_0^{r_0}\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)\,dr < \frac{1}{4}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\frac{1}{1-r_0^2}\left[-\frac{1}{2}(1-r_0^2)\ln(1-r_0^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\ln\frac{1}{1-r_0^2}.$$

Чтобы закончить оценку выражения (52), остается оценить

$$\int_{r_0}^{1} r\sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r,r_0)\,dr,$$

для чего воспользуемся неравенством (44):

$$\int_{r_0}^{1} r \sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)\, dr < \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r_0^2}\right) \int_{r_0}^{1} r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{r^{2\nu}}\, dr;$$

выделим члены, для которых $\nu = 1$:

$$\int_{r_0}^{1} r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \frac{1}{r^2}\, dr = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \ln\frac{1}{r_0^2} \ln\frac{1}{1-r_0^2}$$

$$\int_{r_0}^{1} r \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=2}^{m} \frac{1}{r^{2\nu}}\, dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_0+\varepsilon}^{1} r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=2}^{m} \frac{1}{r^{2\nu}}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{m-1} \frac{1}{m} \frac{1}{\nu_1} r_0^{2m-2\nu_1} \left(\frac{r_0}{r_0+\varepsilon}\right)^{2\nu_2} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{m-1} \frac{r_0^{2m}}{m} \frac{1}{\nu_1}\right]$$

(мы положили $\nu_1 = 1$). Положим $m = n + \nu_1$ и заменим $\frac{r_0}{r_0+\varepsilon}$ большой величиной — единицей. Тогда получим:

$$\int_{r_0}^{1} r dr \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=2}^{m} \frac{1}{r^{2\nu}} \leqslant \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r_0^{2n} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1} \frac{1}{\nu_1+n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{\nu_1}\right\}.$$

(Знак lim отпал, ибо от ε больше ничто не зависит. Если бы мы выполнили предельный переход, то убедились бы, что в последней формуле должен стоять именно знак равенства.) Далее, так как

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1} \frac{1}{\nu_1+n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_1+n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{\nu_1=1}^{n} \frac{1}{\nu_1},$$

то

$$\int_{r_0}^{1} r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0^{2m}}{m} \sum_{\nu=2}^{m} \frac{1}{r^{2\nu}}\, dr \leqslant \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^{2n}}{n} \sum_{\nu_1=1}^{n} \frac{1}{\nu_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^{2n}}{n} \sum_{\nu_1=1}^{n-1} \frac{1}{\nu_1}\right\} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^{2n}}{n^2}$$

и

$$\int_{r_0}^{1} r \sum_{k=1}^{\infty} K_k^2(r, r_0)\, dr < \frac{1}{4}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r_0^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{r_0^2} \cdot \ln\frac{1}{1-r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^{2n}}{n^2}\right) < \frac{1}{8}\left(\pi + \ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\left((\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6}\right),$$

ибо $\ln x \ln(1-x)$ достигает максимума при $x = \frac{1}{2}$, в чем можно убедиться, замечая, что $\ln x \ln(1-x)$ — выпуклая функция, т. е. ее вторая производная все время отрицательна, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — известное тождество, получаемое, например, из соотношения

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \nu^2 \pi^2}.$$

Итак, вспоминая (52), имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} rK^2(r_1\varphi, r_0, \varphi_0)\,dr\,d\varphi < \frac{1}{2\pi}(4.02+4.02)+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{8}\left(\pi+\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\times$$

$$\times\left(\ln\frac{1}{1-r_0^2}+(\ln 2)^2+\frac{\pi^2}{6}\right)<\left(1\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)^2<\frac{1}{25}\left(\ln\frac{520}{1-r_0^2}\right)^2; \qquad (53)$$

отсюда, в силу неравенства Шварца, вытекает также:

$$\iint\limits_{\Omega}|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,r\,dr\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left\{\iint\limits_{\Omega}K^2(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,r\,dr\,d\varphi\cdot\iint\limits_{\Omega}K^2(r,\varphi,r_1,\varphi_1)\cdot r\,dr\,d\varphi\right\}}< \qquad (54)$$

$$<\frac{1}{25}\ln\frac{520}{1-r_0^2}\cdot\ln\frac{520}{1-r_1^2}\,.$$

Если r_0 фиксировано, $r_0<1$, то можно дать оценку:

$$\iint\limits_{\Omega} r|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,dr\,d\varphi,$$

годную сразу для всех r_1. Действительно, пользуясь при $r_1\leqslant\frac{2+r_0}{3}$ неравенством (54), имеем в этом случае:

$$\iint\limits_{\Omega} r|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,dr\,d\varphi<\frac{1}{25}\ln\frac{520}{1-r_0^2}\ln\frac{520}{1-\left(\frac{2+r_0}{3}\right)^2}.$$

Если же $r_1>\frac{2+r_0}{3}$, то разбиваем интеграл на два:

$$\iint\limits_{\Omega} r|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1+2r_0}{3}} r|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,dr\,d\varphi+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1+2r_0}{3}}^{1} r|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|\cdot|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|\,dr\,d\varphi.$$

Для первого интеграла имеем:

$$|K(r_1,\varphi_1,r,\varphi)|<\frac{1}{2\pi}K_0(r,r_1)+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^k<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-r^2}\right)\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r_1^2}\right)+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\frac{r}{r_1-r}<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\left(\frac{1+2r_0}{3}\right)^2}\right)\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\left(\frac{2+r_0}{3}\right)^2}\right)+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+2r_0}{3}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{\frac{1+2r_0}{3}}{\frac{2+r_0}{3}-\frac{1+2r_0}{3}}<\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\frac{\frac{9}{4}}{1-r_0^2}\right)\left(1+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{\pi}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{1-r_0^2}}\frac{3}{1-r_0^2}.$$

Итак, $K(r_1, \varphi_1, r, \varphi)$ ограничено при фиксировании r_0, а тогда и весь первый интеграл в силу неравенства (47) ограничен. Во втором интеграле

$$|r - r_0| > \frac{r_0}{3},$$

и аналогично убеждаемся, что $K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$ ограничена при фиксированном r_0, а тогда в силу неравенства (47) и весь второй интеграл ограничен. Итак, при фиксированном r_0, будет ли $r_1 \leqslant \frac{2 + r_0}{3}$ или $r_1 > \frac{2 + r_0}{3}$, мы имеем оценку, не зависящую от r_1, т. е.

$$\iint\limits_{\Omega} r\,|K(r_1, \varphi_1, r, \varphi)\,K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\,dr d\varphi < F(r_0). \tag{54*}$$

§ 4. Сведение задачи к интегральному уравнению и его преобразования

10°. Установленная сходимость ряда (23), неравенства (47), (48) и (53) и предельные равенства (50) позволяют свести задачу о решении уравнения (16) к интегральному уравнению и исследовать последнее.

Пусть w есть какая-то ограниченная во всей области и обладающая внутри области производными первого и второго порядка функция, удовлетворяющая уравнению (16).

Умножая обе части последнего уравнения на

$$\frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0)$$

и интегрируя по всему кругу Ω, имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} rL(w) \left\{ \frac{1}{2\pi} K_0(r_1, r_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} K_k(r_1, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0) \right\} dr\,d\varphi =$$
$$= \iint\limits_{\Omega} r(A - \lambda^2 B)\,w \left\{ \frac{1}{2\pi} K_0(r, r_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0) \right\} dr\,d\varphi$$

или, вспоминая определения (23) и (49):

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} rL(w)\,K_0(r, r_0)\,dr\,d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Omega} rL(w)\,K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0)\,dr\,d\varphi =$$
$$= \iint\limits_{\Omega} r(A - \lambda^2 B)\,wK(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\,dr\,d\varphi - \iint\limits_{\Omega} r(A - \lambda^2 B)\,wR_N\,dr\,d\varphi. \tag{55}$$

Рассмотрим отдельно выражение:

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} rL(w)\,K_k(r, r_0) \cos k(\varphi - \varphi_0)\,dr\,d\varphi.$$

Будем считать, что сначала выполняется интегрирование по φ, а затем по r, и преобразуем интеграл двукратным интегрированием по частям:

$$\int_0^{2\pi} L(w)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(1-r^2)+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(1-3r^2)-w\right\}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi+$$

$$+\frac{1-r^2}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(1-r^2)+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(1-3r^2)-\right.$$

$$\left.-w-k^2\frac{1-r^2}{r^2}w\right\}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,dr=\int_0^{2\pi}L_k(w)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi,$$

и интересующее нас выражение примет вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} rL_k(w)\,K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi\,dr.$$

Мы не знаем, можно ли в этом выражении менять порядок интегрирования, но во всяком случае по определению несобственного интеграла оно равно:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi} rL_k(w)\,K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi\,dr=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\int_0^{1-\varepsilon} rL_k(w)\,K(r,r_0)\,dr\,d\varphi$$

(так как в интеграле, стоящем под знаком предела, $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$, $\frac{\partial w}{\partial r}$ должны уже считаться ограниченными, а тогда и вся подинтегральная функция ограничена).

Теперь рассмотрим

$$f_\varepsilon(r_0)=\int_0^{1-\varepsilon} rL_k(w)\,K_k(r,r_0)\,dr.$$

Составим оператор $L_k(f_\varepsilon(r))$. Согласно формуле (20*), при $r<1-\varepsilon$ он будет равен $L_k(w)$, т. е.

$$L_k(f_\varepsilon)-L_k(w)=L_k(f_\varepsilon-w)=0.$$

Всякое решение уравнения $L_k(y(r))=0$ есть линейная комбинация двух независимых интегралов $S_k(r)$ и $C_k(r)$. При этом $C_k(r)$ при $r=0$ обращается в бесконечность, между тем как w и f_ε при $r=0$ ограничены, а вместе с тем ограничена их разность. Итак, $(f_\varepsilon-w)$ выражается только через $S_k(r)$, и мы имеем:

$$f_\varepsilon(r_0,\varphi)=w(r_0\,\varphi)+a_\varepsilon(\varphi)\,S_k(r_0)\qquad r_0<1-\varepsilon;$$

тогда:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega} rL(w)\,K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,dr\,d\varphi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,\{\,w(r_0,\varphi)+a_\varepsilon(\varphi)\,S_k(r_0)\,\}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,w(r_0,\varphi)\,d\varphi+S_k(r_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,a_\varepsilon(\varphi)\,d\varphi.$$

Будем теперь при фиксированном φ_0 устремлять r_0 к 1.

При этом, в силу ограниченности w,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,w(r_0,\varphi)\,d\varphi$$

будет оставаться ограниченным.

$$\int\int\limits_{\Omega} rL(w)\,K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi\,dr,$$

равный в силу уравнения (16)

$$\int\int\limits_{\Omega} r(A-\lambda^2 B)\,wK_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,dr\,d\varphi,$$

также ограничен, так как w, $A-\lambda^2 B$, $\int\limits_0^1 r\,|K_k(r,r_0)|\,dr$ ограничены независимо от r_0 (см. (47). Значит:

$$S_k(r_0)\cdot\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi_0)\,a_\varepsilon(\varphi)\,d\varphi\right\}$$

должен оставаться ограниченным. Но $S_k(r_0)\to\infty$ при $r_0\to 1$, второй множитель от r_0 не зависит; итак, это произведение ограничено лишь в том случае, когда второй множитель равен 0. Итак,

$$\frac{1}{\pi}\int\int\limits_{\Omega} rL(w)\,K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0)\,dr\,d\varphi=$$

$$=\cos k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos k\varphi\,w(r_0,\varphi)\,d\varphi+\sin k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin k\varphi\,w(r_0,\varphi)\,d\varphi. \tag{56}$$

Аналогично:

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\limits_{\Omega} rL(w)\,K_0(r,r_0)\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}w(r_0,\varphi)\,d\varphi$$

и левая часть формулы (55) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(r_0,\varphi)\,d\varphi +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left\{\cos k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\, w(r_0,\varphi)\,d\varphi+\sin k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\varphi\, w(r_0,\varphi)\,d\varphi\right\};$$

с другой стороны, раз по предположению $\frac{\partial w(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}$ существует и ограничено, то $w(r_0,\varphi)$ разложимо в ряд Фурье, и

$$w(r_0,\varphi_0)-\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(r_0,\varphi)\,d\varphi+\sum_{k=1}^{N}\left[\cos k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\, w(r_0,\varphi)\,d\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin k\varphi_0\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\varphi\, w(r_0,\varphi)\,d\varphi\right]\right\}=R_N(r_0,\varphi_0)\to 0.\ (N\to\infty).$$

Окончательно формула (55) перепишется в виде:

$$w(r_0,\varphi_0)-R_N(r_0,\varphi_0)=\iint_\Omega r(A-\lambda^2 B)\,w(r,\varphi)\,K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,dr\,d\varphi-$$

$$-\iint_\Omega r(A-\lambda^2 B)\,w(r,\varphi)\,R_N(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,dr\,d\varphi.$$

Устремляя N к бесконечности и вспоминая предельное равенство (50), имеем:

$$w(r_0,\varphi_0)=\iint_\Omega r[A(r,\varphi)-\lambda^2 B(r,\varphi)]\,w(r,\varphi)\,K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,dr\,d\varphi. \tag{57}$$

11°. Левая часть уравнения (57) не является однородной функцией от параметра $-\lambda^2$, а ядро этого уравнения при совпадении точек (r,φ) и (r_0,φ_0) обращается, как нетрудно видеть, в бесконечность. Кроме того, $-\lambda^2=0$ есть характеристическое число, ибо при $\lambda^2=0$ уравнение (8) имеет решение $P=\text{const}$, а тогда в силу (10) уравнение (16), а значит и (57), имеет решение $w=\sqrt{a}\cdot\text{const}$.

Преобразуя уравнение (57) так, чтобы избавиться от перечисленных обстоятельств, мы будем пользоваться следующим замечанием.

Пусть ядро какого-нибудь интегрального уравнения

$$\Phi(r_0,\varphi_0)=\mu\iint_\Omega G(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,\Phi(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi+F(r_0,\varphi_0) \tag{58}$$

(где интегрирование производится по площади круга $r\leqslant 1$) удовлетворяет неравенству

$$|G(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|<M_1|K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)|+M_2. \tag{59}$$

Тогда:

1) отыскивая ограниченные решения уравнения (58), мы можем переходить к уравнениям с итерированными ядрами;

2) при этом к уравнениям с итерированными ядрами приложима общая теория Фредгольма;

3) решения однородного уравнения с итерированным ядром ограничены во всей области.

Перейдем к доказательству сделанного замечания. Подставляя в левую часть уравнения (58) вместо $\Phi(r, \varphi)$ его выражение, имеем:

$$\Phi(r_0, \varphi_0) = \mu^2 \iint_{\Omega} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) \left[\iint_{\Omega} G(r_1, \varphi_1, r, \varphi) \cdot \Phi(r_1, \varphi_1) r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1 \right] r \, dr \, d\varphi +$$

$$+ \left[\mu \iint_{\Omega} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) \cdot F(r, \varphi) r dr d\varphi + F(r_0, \varphi_0) \right].$$

Займемся выражением

$$H = \iint_{\Omega} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) \left[\iint_{\Omega} G(r_1, \varphi_1, r_1, \varphi) \Phi(r, \varphi_1) r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1 \right] r \, dr \, d\varphi. \quad (60)$$

По определению несобственного интеграла это есть:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \iint_{|r - r_0| > \varepsilon} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) \lim_{\eta \to 0} \left[\iint_{|r_1 - r| > \eta} G(r_1, \varphi_1, r, \varphi) \Phi(r_1, \varphi_1) r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1 \right] r \, dr \, d\varphi \right\}.$$

В силу неравенства (59), при $|r - r_0| > \varepsilon$, $G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$ ограничено, а

$$\iint_{|r - r_1| > \eta} G(r_1, \varphi_1, r, \varphi) \Phi(r_1, \varphi_1) r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1$$

ограничен в силу неравенств (59), (47) и замечания, что мы ищем лишь ограниченные решения Φ. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно переставить интегрирование и предельный переход, и мы получим:

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\eta \to 0} \left\{ \iint_{|r - r_0| > \varepsilon} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) \iint_{|r_1 - r| > \eta} G(r_1, \varphi_1, r, \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi(r_1, \varphi_1) r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1 \, r \, dr \, d\varphi \right\}.$$

В фигурных скобках под знаком интеграла стоят лишь ограниченные функции, а потому, меняя порядок интегрирования, имеем:

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\eta \to 0} \iint_{\Omega} \Phi(r_1, \varphi_1) \left(\iint_{\substack{|r - r_0| > \varepsilon \\ |r - r_1| > \eta}} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) G(r_1, \varphi_1, r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \right) \times r_1 \, dr_1 \, d\varphi_1,$$

$\Phi(r_1, \varphi_1)$, как отмечалось, ограничено. Сопоставляя неравенство (59) с неравенствами (47) и (54), убеждаемся, что при фиксированном r_0

$$\iint_\Omega |G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)|\,|G(r_1, \varphi_1, r, \varphi)|\, r\,dr\,d\varphi$$

ограничен независимо от r_1, а потому

$$\iint_{\substack{|r-r_0|>\varepsilon \\ |r-r_1|>\eta}} G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, G(r_1, \varphi_1, r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

ограничен независимо от r_1, ε, η. Итак, мы снова можем воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграла и написать:

$$H = \iint_\Omega \Phi(r_1, \varphi_1) \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\eta\to 0} \iint_{\substack{|r-r_0|>\varepsilon \\ |r-r_1|>\eta}} r\,G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, G(r_1, \varphi_1, r, \varphi)\, dr\,d\varphi \right\} r_1\,dr_1\,d\varphi_1,$$

и по определению несобственного интеграла величина в фигурных скобках есть:

$$\iint_\Omega G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, G(r_1, \varphi_1, r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi = G_2(r_1, \varphi_1, r_0, \varphi_0).$$

Итак, мы получили уравнение с итерированным ядром.

При этом, в силу (59), (54) и (47):

$$\begin{aligned} |G_2(r_1, \varphi_1, r_0, \varphi_0)| &< \iint_\Omega \{M_1 |K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)| + M_2\}\{M_1 |K(r_1, \varphi_1, r, \varphi)| + M_2\}\, r\,dr\,d\varphi < \\ &< M_1^2 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\ln\frac{1}{1-r_0^2}\right)\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\ln\frac{1}{1-r_1^2}\right) + 2\cdot\frac{11}{2} M_1 M_2 + M_2^2 \pi < \\ &< \left\{\frac{M_1}{5}\ln\frac{1}{1-r_1^2} + \left(\frac{5}{4}M_1 + \frac{24}{5}M_2\right)\right\}\left\{\frac{M_1}{5}\ln\frac{1}{1-r_0^2} + \left(\frac{5}{4}M_1 + \frac{24}{5}M_2\right)\right\} = \\ &= \frac{M_1^2}{25}\ln\frac{M_3}{1-r_1^2}\ln\frac{M_3}{1-r_0^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$M_3 = e^{\left(\frac{5}{4}M_1 + \frac{24}{5}M_2\right) : \frac{1}{5}M_1}.$$

Так как и итерированное ядро $G_2(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$ может оказаться неограниченным (при $r = r_0 = 1$), то необходимо проверить прежде всего сходимость определителя Фредгольма. Имеем:

$$D(\mu^2) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\mu^2)^n \frac{1}{n!} \underbrace{\iint_\Omega \cdot \iint_\Omega \cdots \iint_\Omega}_{n \text{ раз}} \begin{vmatrix} G_2(r_1, \varphi_1, r_1, \varphi_1) & G_2(r_2, \varphi_2, r_1, \varphi_1) & \ldots & G_2(r_n, \varphi_n, r_1, \varphi_1) \\ G_2(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) & G_2(r_2, \varphi_2, r_2, \varphi_2) & \ldots & G_2(r_n, \varphi_n, r_2, \varphi_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_2(r_1, \varphi_1, r_n, \varphi_n) & G_2(r_2, \varphi_2, r_n, \varphi_n) & \ldots & G_2(r_n, \varphi_n, r_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\, r_1\,dr_1\,d\varphi_1,\ r_2\,dr_2\,d\varphi_2 \ldots r_n\,dr_n\,d\varphi_n.$$

Вынесем из каждого столбца определителя, стоящего под знаком интеграла, множитель $\frac{M_1}{5}\ln\frac{M_3}{1-r_j^2}$, где j — номер столбца, а из каждой строки

$$\frac{M_1}{5}\ln\frac{M_3}{1-r_s^2},$$

где s — номер строки. Тогда в силу неравенства (61) общий член оставшегося определителя будет:

$$\alpha_{js}=\frac{G_2(r_j,\varphi_j,r_s,\varphi_s)}{\frac{M_1^2}{25}\ln\frac{M_3}{1-r_j^2}\ln\frac{M_3}{1-r_s^2}} \qquad |\alpha_{js}|<1,$$

а сам оставшийся определитель по неравенству Hadamard меньше $\sqrt{n^n}$.

Тогда мажорантный ряд для $D(\mu^2)$ будет:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|^{2n}\frac{1}{n!}n^{\frac{n}{2}}\left(\iint_{\Omega}\frac{M_1^2}{25}\left(\ln\frac{M_3}{1-r_1^2}\right)^2 r_1\,dr_1\,d\varphi_1\right)^n,$$

который сходится, очевидно, на всей плоскости, а потому $D(\mu^2)$ есть целая функция параметра μ^2. Составляя и оценивая совершенно так же минор определителя Фредгольма, видим, что для минора $D(r, \varphi, r_0, \varphi_0; \mu^2)$ мажорантным рядом будет:

$$\frac{M_1^2}{25}\ln\frac{M_3}{1-r^2}\ln\frac{M_3}{1-r_0^2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|^{2n}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!}\left(\iint_{\Omega}\frac{M_1^2}{25}\left(\ln\frac{M_3}{1-r_1^2}\right)^2 r_1\,dr_1\,d\varphi_1\right)^n\right\},$$

а потому минор не только есть целая функция от μ^2, но удовлетворяет также неравенству:

$$|D(r,\varphi,r_0,\varphi_0;\mu^2)|<M_4(\mu^2)\ln\frac{M_3}{1-r^2}\ln\frac{M_3}{1-r_0^2}. \tag{62}$$

Аналогичное справедливо и в отношении миноров высших порядков. Проверка того, что отношение первого минора к самому определителю Фредгольма есть резольвента, а равно и проверка того, что решения однородного уравнения

$$\Phi(r_0,\varphi_0)=\mu^2\iint_{\Omega}G_2(r,\varphi,r_0,\varphi_0)\,\Phi(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi \tag{63}$$

при характеристическом значении μ^2 будут получаться из минора определителя Фредгольма фиксированием в нем всех точек (пар, переменных), кроме одной, сводятся к выполнению некоторых интегрирований и некоторых перестановок порядка интегрирования. И хотя ядро G_2 и миноры и неограничены, но при приближении к контуру — единственному месту, где они бывают неограничены, — они возрастают настолько медленно (см. неравенства (61) и (62), что все необходимые интегрирования и перестановки порядка интегрирования возможны.

Решения однородного уравнения, получаемые из миноров определителя Фредгольма, как видно из неравенства (62), возрастают не быстрее, чем $\ln \frac{M_3}{1-r^2}$, т. е., обозначая через $\Phi^*(r, \varphi)$ какое-нибудь такое решение, имеем:

$$|\Phi^*(r, \varphi)| < M_5 \ln \frac{M^3}{1-r^2},$$

а подставляя его в уравнение (63), находим:

$$|\Phi^*(r_0, \varphi_0)| < \mu^2 M_5 \iint_\Omega |G_2(r, \varphi, r_0, \varphi_0)| \ln \frac{M^3}{1-r^2} r dr d\varphi.$$

Установим теперь ограниченность последнего интеграла. Прежде всего он не превосходит величины:

$$\iint_\Omega \left\{ \ln \frac{M_3}{1-r^2} \iint_\Omega |G(r, \varphi, r_1, \varphi_1)| \cdot |G(r_1, \varphi_1, r_0, \varphi_0)| r_1 dr_1 d\varphi_1 \right\} r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \iint_\Omega \ln \frac{M_3}{1-r^2} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\eta \to 0} \iint_{\substack{|r_1 - r_0| > \varepsilon \\ |r - r_1| > \eta}} |G(r, \varphi, r_1, \varphi_1)| \cdot |G(r_1, \varphi_1, r_0, \varphi_0)| r_1 dr_1 d\varphi_1 \right\} r\, dr\, d\varphi.$$

Как отмечалось в начале этого n°, интеграл, стоящий здесь под знаком предела, ограничен при фиксированном r_0 независимо от r, ε, η; $\ln \frac{M_3}{1-r^2}$ интегрируем вместе со своим квадратом. Итак, вся функция, стоящая под знаком интегрирования по области (r, φ), интегрируема вместе с квадратом, и по теореме о предельном переходе под знаком интеграла мы можем сначала выполнять интегрирования, а потом предельный переход. Переставим, как и в начале n°, порядок интегрирований $\Big($законность такой перестановки, хотя $\ln \frac{M_3}{1-r^2}$ и неограничено, легко доказывается этим же способом, вспоминая неравенство (40)$\Big)$ и, пользуясь определением несобственного интеграла, получаем окончательно:

$$\iint_\Omega |G(r_1, \varphi_1; r_0, \varphi_0)| \left(\iint_\Omega |G(r, \varphi, r_1, \varphi_1)| \ln \frac{M_3}{1-r^2} r\, dr\, d\varphi \right) r_1\, dr_1\, d\varphi.$$

Тогда в силу неравенств (59), (48) и (47) внутренний интеграл ограничен независимо от r_1, а тогда весь интеграл ограничен независимо от r_0, т. е.

$$\iint_\Omega |G_2(r, \varphi, r_0, \varphi_0)| \ln \frac{M_3}{1-r^2} r\, dr\, d\varphi < M_6$$

и

$$|\Phi^*(r_0, \varphi_0)| < (\mu)^2 M_5 M_6.$$

Итак, всякое решение однородного уравнения, получаемое из миноров определителя Фредгольма, ограничено.

Заметим также, что если бы какое-нибудь решение $\widetilde{\Phi}(r, \varphi)$ однородного уравнения (63) было неограничено, то интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \left|\widetilde{\Phi}(r, \varphi)\right| \ln \frac{M_3}{1-r^2}\, r\, dr\, d\varphi$$

не имел бы смысла. Действительно, если последний интеграл существует, то в силу неравенства (61) и уравнения (63) мы имели бы:

$$\left|\widetilde{\Phi}(r_0, \varphi_0)\right| < |\mu|^2 \frac{M_1}{25} \ln \frac{M_3}{1-r_0^2} \iint\limits_{\Omega} \left|\widetilde{\Phi}(r, \varphi)\right| \ln \frac{M_3}{1-r^2}\, r\, dr\, d\varphi$$

и по предположению, что

$$\iint\limits_{\Omega} \left|\widetilde{\Phi}(r, \varphi)\right| \ln \frac{M^3}{1-r^2}\, r\, dr\, d\varphi$$

существует,

$$\left|\widetilde{\Phi}(r_0, \varphi_0)\right| < M^* \ln \frac{M_3}{1-r_0^2}.$$

Повторяя теперь дословно доказательство, проведенное для решения, получаемого из минора определителя Фредгольма, мы показали бы и ограниченность $\widetilde{\Phi}(r, \varphi)$.

Как и в случае ограниченного ядра, всякое ограниченное решение уравнения (63) получается из минора определителя Фредгольма, доказательство чего сводится к выполнению некоторых интегрирований и перестановок порядка интегрирования, возможных в силу неравенств (61) и (62). Конечно, отсюда не следует еще отсутствие таких решений, для которых интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \left|\widetilde{\Phi}(r, \varphi)\right| \ln \frac{M_3}{1-r^2}\, r\, dr\, d\varphi$$

не имеет смысла, но решения такого рода, если бы они и были, не представляли бы интереса, ибо физическое значение имеют лишь ограниченные решения.

12°. При преобразованиях уравнения (57) нам придется еще воспользоваться тем обстоятельством, что все значения λ^2, являющиеся характеристическими для уравнения (57), а равно и все значения λ^2, являющиеся характеристическими для уравнения

$$w_-(r_0, \varphi_0) = \iint\limits_{\Omega} r\left[-A(r, \varphi) + \lambda^2 B(r, \varphi)\right] w_-(r, \varphi)\, K(r, \varphi; r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi, \quad (64),$$

вещественны. Займемся доказательством этого обстоятельства, причем все рассуждения будем проводить в приложении к уравнению (57); для уравнения (64), отличающегося лишь знаком, они будут проводиться так же.

Будем рассматривать вместе с уравнением (57) и сопряженное ему уравнение

$$\gamma(r_0, \varphi_0) = \iint\limits_{\Omega} r\Big(A(r_0, \varphi_0) - \lambda^2 B(r_0, \varphi_0)\Big)\gamma(r, \varphi)\, K(r, \varphi; r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi. \quad (65)$$

Если $w_n(r, \varphi)$ есть решение уравнения (57), отвечающее $\lambda^2=\lambda_n^2$, то

$$\gamma_n(r, \varphi)=w_n(r, \varphi)\Big(A(r, \varphi)-\lambda_n^2 B(r, \varphi)\Big)$$

будет решением уравнения (65) для того же самого λ^2, в чем можно убедиться, например, подставляя вместо γ_n его выражение и сокращая обе части на

$$\Big(A(r_0, \varphi_0)-\lambda_n^2 B(r_0, \varphi_0)\Big).$$

При этом, так как A и B ограничены, ограниченному w отвечает и ограниченное γ. Наоборот, если $\gamma^*(r, \varphi)$ есть ограниченное решение уравнения (65) для $\lambda^2=\lambda^{*2}$, то

$$w^*(r_0, \varphi_0)=\iint\limits_{\Omega} r\gamma^*(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi$$

будет решением уравнения (67) для того же самого λ^2. Действительно, подставляя это w^* в (57), имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} r\gamma^*(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi=$$

$$=\iint\limits_{\Omega} r\Big(A(r, \varphi)-\lambda^{*2} B(r, \varphi)\Big) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\iint\limits_{\Omega} r_1\gamma^*(r_1, \varphi_1) K(r_1, \varphi_1, r, \varphi)\, dr_1\, d\varphi_1\, dr\, d\varphi,$$

т. е., в силу уравнения (65), тождество. При этом, в силу неравенства (47) и ограниченности γ^*, w^* также ограничено. Итак, каждому ограниченному решению уравнения (57) отвечает ограниченное решение уравнения (65) и наоборот.

Введем обозначения:

$$\widetilde{w}_n(r_0, \varphi_0)=\iint\limits_{\Omega} r w_n(r, \varphi) B(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi$$

$$\widetilde{\gamma}_n(r_0, \varphi_0)=\iint\limits_{\Omega} r\gamma_n(r, \varphi) B(r_0, \varphi_0) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi=B(r_0, \varphi_0)\, w_n(r_0, \varphi_0), \quad (66)$$

и рассмотрим:

$$\lambda_m^2\iint\limits_{\Omega} w_n(r_0, \varphi_0)\widetilde{\gamma}_m(r_0, \varphi_0)\, r_0\, dr_0\, d\varphi_0=$$

$$=\lambda_m^2\iint\limits_{\Omega} w_n(r_0, \varphi_0)\iint\limits_{\Omega}\gamma_m(r, \varphi) B(r_0, \varphi_0) K(r, \varphi; r_0, \varphi_0)\, r\, dr\, d\varphi\, r_0\, dr_0\, d\varphi_0;$$

в силу уравнения (65) это выражение равно:

$$\iint\limits_{\Omega} w_n(r_0, \varphi_0)\iint\limits_{\Omega}\gamma_m(r, \varphi) A(r_0, \varphi_0) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, r\, dr\, d\varphi\, r_0\, dr_0\, d\varphi_0-$$

$$-\iint\limits_{\Omega} w_n(r_0, \varphi_0)\,\gamma_m(r_0, \varphi_0)\, r_0\, dr_0\, d\varphi_0.$$

Переставляя в первом слагаемом порядок интегрирования, законность чего доказывается совершенно так же, как в начале $n^\circ 11$, и меняя во втором слагаемом обозначения, имеем:

$$\iint_\Omega \gamma_m(r,\varphi)\left[\iint_\Omega w_n(r_0,\varphi_0)A(r_0,\varphi_0)K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)r_0\,dr_0\,d\varphi_0 - w_n(r,\varphi)\right]r\,dr\,d\varphi,$$

или в силу уравнения (57):

$$\lambda_n^2\iint_\Omega \gamma_m(r,\varphi)\iint_\Omega w_n(r_0,\varphi_0)\,B(r_0\,\varphi_0)\,K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)r_0\,dr_0\,d\varphi_0\,r\,dr\,d\varphi,$$

и, снова меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\lambda_n^2\iint_\Omega w_n(r_0,\varphi_0)\left\{\iint_\Omega \gamma_m(r,\varphi)B(r_0,\varphi_0)K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)r\,dr\,d\varphi\right\}r_0\,dr_0\,d\varphi.$$

Окончательно имеем:

$$0=(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\iint_\Omega w_n(r,\varphi)\widetilde{\gamma}_m(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{67}$$

Эта формула является естественным обобщением теоремы о взаимной ортогональности собственных функций, отвечающих различным характеристическим числам в случае уравнения с симметричным ядром, и правой частью, однородной относительно параметра. В силу соотношения (66) формулу (67) можно переписать в виде:

$$(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\iint_\Omega w_n(r,\varphi)\,w_m(r,\varphi)\,B(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{68}$$

Пусть теперь λ_m^2 — число комплексное. Так как A, B, K все вещественные числа, то $\bar\lambda_m^2$, комплексное сопряжение с λ_m^2, также будет характеристическим числом. Собственные функции, отвечающие $\bar\lambda_m^2$, также будут комплексными сопряженными собственными функциями, отвечающими λ_m^2, в частности, $\bar w_m$ будет собственной функцией для $\bar\lambda_m^2$. Тогда, полагая $\lambda_n^2=\bar\lambda_m^2$, имеем:

$$(\lambda_m^2-\bar\lambda_m^2)\iint_\Omega |w_m(r,\varphi)|^2 B(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=0,$$

но

$$B=\frac{1}{ga}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1-u^2-v^2}{gh}\left|\frac{d(x+iy)}{d(u+iv)}\right|^2$$

(см. формулу (11)), а потому всегда положительно, и либо $w_m=0$, т. е. λ_m^2 не есть характеристическое число, либо $\bar\lambda_m^2=\lambda_m^2$, т. е. λ_m^2 вещественно.

Итак, у уравнения (57) и аналогично у уравнения (64) все характеристические числа вещественны.

13°. Перейдем теперь к преобразованиям уравнения (57). Пусть λ^{*2} не есть характеристическое число ни для уравнения (57) ни для уравнения (64). Такие числа есть; в частности, как только что доказано, всякое комплексное число обладает этим свойством. Перепишем уравнение (57) в виде:

$$w(r_0, \varphi_0) = \iint\limits_{\Omega} \{(A - \lambda^{*2} B) - (\lambda^2 - \lambda^{*2}) B\} w(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi,$$

и введем обозначения:

$$A - \lambda^{*2} B = A^*; \quad \lambda^2 - \lambda^{*2} = \nu.$$

Уравнение примет вид:

$$w(r_0, \varphi_0) = \iint\limits_{\Omega} A^*(r, \varphi) w(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi - \\ - \nu \iint\limits_{\Omega} B(r, \varphi) w(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi. \tag{69}$$

В силу ограниченности A и B, A^* также ограничено. Так как λ^{*2} не есть характеристическое число ни для уравнения (57) ни для (64), то ни $\mu = 1$ ни $\mu = -1$ не будут характеристическими числами уравнения

$$w(r_0, \varphi_0) = \mu \iint\limits_{\Omega} A^*(r, \varphi) w(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi + g(r_0, \varphi_0), \tag{70}$$

ибо уравнение (70), когда $g = 0$ тождественно и $\mu = 1$, совпадает с уравнением (57), если в последнем положить $\lambda^2 = \lambda^{*2}$, а когда $g = 0$ тождественно и $\mu = -1$, уравнение (70) совпадает с уравнением (64), если в последнем положить $\lambda^2 = \lambda^{*2}$.

Уравнение (70) принадлежит как раз к тому типу, который рассматривался в n° 11.

Переходя к итерированному ядру, имеем:

$$w(r_0, \varphi_0) = \\ = \mu^2 \iint\limits_{\Omega} w(r, \varphi) \left\{ \iint\limits_{\Omega} A^*(r, \varphi) A^*(r_1, \varphi_1) K(r, \varphi, r_1, \varphi_1) K(r_1, \varphi_1, r_0, \varphi_0) r_1\, dr_1\, d\varphi_1 \right\} r\, dr\, d\varphi + \\ + \left[g(r_0, \varphi_0) + \mu \iint\limits_{\Omega} A^*(r, \varphi) g(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi \right]. \tag{71}$$

Так как ни $\mu = 1$ ни $\mu = -1$ не есть характеристическое число уравнения (70), то $\mu^2 = 1$ не есть характеристическое число уравнения (71).

Обозначая определитель Фредгольма для уравнения (71) через $D_{A^*}(\mu^2)$, а его минор через $D_{A^*}(r, \varphi, r_0, \varphi_0; \mu^2)$, имеем при $\mu^2 = 1$ решение в следующем виде:

$$w(r_0, \varphi_0) = \left\{ g(r_0, \varphi_0) + \iint\limits_{\Omega} A^*(r, \varphi) g(r, \varphi) K(r, \varphi, r_0, \varphi_0) r\, dr\, d\varphi \right\} + \\ + \iint\limits_{\Omega} \frac{D_{A^*}(r, \varphi, r_0, \varphi_0; 1)}{D_{A^*}(1)} \times \\ \times \left\{ g(r, \varphi) + \iint\limits_{\Omega} A^*(r_1, \varphi_1) g(r_1, \varphi_1) K(r_1, \varphi_1, r, \varphi) r_1\, dr_1\, d\varphi_1 \right\} r\, dr\, d\varphi, \tag{72}$$

что вытекает из рассуждений n° 11, если $g(r, \varphi)$ считать ограниченным. Если положить $\mu=1$,

$$g(r_0, \varphi_0) = -\nu \iint_\Omega B(r, \varphi)\, w(r, \varphi)\, K(r, \varphi, r_0, \varphi_0)\, r\, dr\, d\varphi,$$

то уравнение (70) перейдет в уравнение (69). Значит, если в решение (72) подставить

$$g(r_0, \varphi_0) = -\nu \iint_\Omega B w K r\, dr\, d\varphi,$$

то мы получим уравнение, которому удовлетворяет всякое решение уравнения (69), а потому и (57). Так как левая часть формулы (72) однородна относительно $g(r, \varphi)$, то, подставляя

$$g = -\nu \iint_\Omega B w K r\, dr\, d\varphi,$$

мы получаем такое интегральное уравнение, левая часть которого однородна относительно параметра ν. Мы предположили, что $g(r, \varphi)$ ограничено, но так как мы ищем $w(r, \varphi)$, ограниченные во всей области, а $B(r, \varphi)$ ограничено, то в силу неравенства (4) $g(r, \varphi)$ действительно ограничено.

Интегральное уравнение, которое мы получили подстановкой вместо $g(r, \varphi)$ его значения, снова принадлежит к тому классу, который рассматривался n° 11, значит, переходя в нем к итерированному ядру, мы получим все возможные значения $\nu^2 = (\lambda^2 - \lambda^{*2})^2$ как нули определителя Фредгольма для невыписанного нами последнего уравнения с итерированным ядром. Все же ограниченные собственные функции $w(r, \varphi)$ мы получим либо непосредственно, как значение первого, не обращающегося при данном ν^2 в 0, минора, фиксированием в нем всех точек, кроме одной, либо, в крайнем случае, как линейную комбинацию этих значений. Другими словами, последнее интегральное уравнение будет решаться так же, как если бы его итерированное ядро было ограничено. Таким образом решение задачи доводится до конца.

ON THE LONG STANDING WAVES IN LAKES OF IRREGULAR FORM

B. DAVISON

(Leningrad)

(Summary)

In the present article the author studies the seiches, i. e. long standing waves in lakes and other water-basins, considering the motion as two-dimensional. The main differential equation has the form

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g h \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g h \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \tag{5}$$

where $h(x,y)$ is the depth, ζ — the vertical displacement of free surface, the axes x and y are horizontal. Along the border of the water-basin the author

assumes to have $h=0$. The whole boundary of the region is thus a singular line. The displacements are assumed to be bounded throughout the region and this condition is shown to be sufficient for the determination of the solution.

Following the Fourier method and carrying out the conformal representation of the region of motion upon the circle $r\leqslant 1$, we at last obtain the differential equation of the problem under the form

$$L(w)\equiv(1-r^2)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1-3r^2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1-r^2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}-w=(A(r,\varphi)-\lambda^2 B(r,\varphi))w, \quad (16)$$

the functions $A(r,\varphi)$ and $B(r,\varphi)$ depending on the form of the lake and on the distribution of depths, i. e. on the function $h(x,y)$.

Denote by $S_k(r)$ the solution of the equation $L(u(r)\cos k\varphi)=0$ regular at the point $r=0$ by $C_k(r)$ the solution of the same equation regular for $r=\pm 1$ and by δ_k some constants and put

$$\begin{aligned} K_k(r,r_0)&=\delta_k^{-1}S_k(r)\,C_k(r_0), \quad \text{for} \quad r<r_0, \\ K_k(r,r_0)&=\delta_k^{-1}S_k(r_0)\,C_k(r), \quad \text{for} \quad r_0<r, \end{aligned} \quad (22)$$

$$K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}K_0(r,r_0)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}K_k(r,r_0)\cos k(\varphi-\varphi_0). \quad (23)$$

Then each solution of the differential equation (16) bounded throughout the region must satisfy the integral equation

$$w(r_0,\varphi_0)=\iint_{\Omega}K(r,\varphi,r_0,\varphi_0)[A(r,\varphi)-\lambda^2 B(r,\varphi)]\,w(r,\varphi)\,rdrd\varphi. \quad (57)$$

Thereby, under the condition that $A(r,\varphi)$, $B(r,\varphi)$ are bounded throughout the region, any solution of (57) is also bounded throughout the region. Further, the equation (57) is put to such a form to which the ordinary theory of Fredholm's equations may be applied.

The same phenomenon of seiches was recently studied by Stenij — „Zur Theorie der Wasserströmungen...", Societas Scientarum Fennicae 1932. He started from the same differential equation (5), but used other boundary conditions; instead of the assumption that the displacements remain bounded, he assumed that there is some dependency between the vertical displacement and the horizontal one along the contour of the region.