

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

Б. А. БОДНЕР

(Ленинград)

§ 1. Введение

Во многих вопросах техники встречается необходимость исследования устойчивости пластин, подверженных действию продольных периодических сил. Переборки и обшивка судов и самолетов, тонкие стенки и полки балок в мостовых конструкциях и др. представляют примеры, где вопросы устойчивости под действием продольных периодических сил играют большую роль. До сих пор были исследованы вопросы устойчивости разного рода пластин для случая постоянных продольных сил, не зависящих от времени.¹ Известно, что при некотором значении сжимающей продольной силы, называемом критическим значением, пластинка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Но совсем другое дело будем иметь в том случае, когда на пластинку действует продольная периодическая сила вида $P = P_1 \cos \omega t$, где P_1 — амплитуда силы и ω — ее частота. Сила P_1 может быть гораздо меньше критической силы для данной пластинки, но вместе с тем пластинка потеряет устойчивость при определенном соотношении между одной из собственных частот и частотой силы P . Как будет видно из дальнейшего, при отношении частот

$$\frac{2\omega_{mn}}{\omega} = 1, 2, 3, \dots,$$

где ω_{mn} — одна из собственных частот, пластинка теряет устойчивость независимо от величины силы P_1 . Для определенных конечных значений P_1 пластинка теряет устойчивость не только для частот $\omega = \omega_{mn}$, $\omega = 2\omega_{mn}$, ..., но и для частот, расположенных вблизи от этих по обе стороны. Таким образом имеются целые области частот, в которых пластинка теряет устойчивость.

Из приведенных соображений явствует, насколько важно уметь рассчитывать пластинку так, чтобы она была устойчива к продольным периодическим силам. Задача этого типа, насколько известно, ставится впервые. Н. М. Белляев решил подобную задачу для стержня, шарнирно закрепленного по концам.⁽¹⁾ Для прямоугольной пластинки с опертым краем задача решается по методу Фурье. В остальных случаях применяется приближенный метод Б. Г. Галеркина.

¹ Во время чтения корректуры автору стало известно о работе В. Н. Челомея на ту же тему („Устойчивость пластин у специальных випадках“. Журнал Института Математики Акад. Наук. УРСР, № 1, 1938). В. Н. Челомей исследует устойчивость пластины, опертой по контуру.

Будем рассматривать поперечные колебания тонких пластин, подверженных действию распределенных по периметру и лежащих в срединной плоскости периодических сил. Если ограничиться рассмотрением малых колебаний пластинки, то дифференциальные уравнения движения будут:

$$D \Delta \Delta w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Delta \varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь w — смещение срединной плоскости, φ — функция Airy, h — толщина пластинки, ρ — ее плотность и $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Следует заметить, что в действительности задача гораздо более сложна, так как при наличии сил, действующих по контуру, зависящих от времени, уравнения статики, а следовательно и уравнение (2), отпадают.

Пресобразуем и решим эти уравнения для следующих частных случаев: а) прямоугольной, б) круглой и в) кольцеобразной пластинки.

Выше было сделано предположение об отсутствии деформаций срединной плоскости (малые колебания). Но, очевидно, в областях неустойчивости такого предположения сделать нельзя, так как прогибы пластины становятся сравнимыми с ее толщиной. Это, повидимому, должно сказаться на уменьшении ширины областей неустойчивости по сравнению с той, которая получается, если рассматривать малые колебания.

§ 2. Прямоугольная пластинка

Пусть на прямоугольную пластинку со сторонами $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ действует распределенная по контуру нагрузка так, как указано на фиг. 1. К уравнению (2), которое может быть решено независимо от (1), необходимо прибавить граничные условия — при $x=0$ и $x=a$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -P_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

при $y=0$ и $y=b$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -P_2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

При этих граничных условиях решение уравнения (2) будет:

$$\varphi = -\frac{P_2}{2}(x^2 - ax) - \frac{P_1}{2}(y^2 - by). \quad (3)$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -P_2$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -P_1$, приведем уравнение (1) для прямоугольной пластинки к виду:

$$\Delta \Delta w + \frac{P_1}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{P_2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения для случая постоянных P_1 и P_2 , не зависящих от времени, хорошо известно. В дальнейшем будем полагать, что силы P_1 и P_2 являются периодическими функциями времени, причем мы рассмотрим частный случай периодической силы, а именно:

$$P_1 = P_{01} + P_{11} \cos \omega t \quad \text{и} \quad P_2 = P_{02} + P_{22} \cos \omega t.$$

Если взять более общий случай, то для нахождения условий устойчивости придется искать устойчивые или неустойчивые решения не уравнения Mathieu, а уравнения Hill. Принципиальной разницы здесь нет, а вычисления в последнем случае усложняются.

Для прямоугольной пластинки с опертым краем решение уравнения (4) можно искать в виде:

$$w = U(x, y) T(t).$$

Подставляя это в уравнение (4), получим:

$$\frac{\Delta \Delta U}{U} + \frac{1}{U} \left(\frac{P_1}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{P_2}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} = 0, \quad (5)$$

где $C^2 = \frac{D}{\rho h}$. Переменные в уравнении (5) непосредственно не разделяются, но, применяя известный метод⁽¹⁾, получим:

$$\Delta \Delta U + \frac{P_1}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{P_2}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\alpha + \beta \frac{P_1}{D} + \gamma \frac{P_2}{D} \right) U = 0, \quad (6)$$

$$T'' + C^2 \left(\alpha + \beta \frac{P_1}{D} + \gamma \frac{P_2}{D} \right) T = 0. \quad (7)$$

Здесь α , β и γ — произвольные постоянные числа, которые должны быть так выбраны, чтобы $U(x, y)$ не зависело от времени.

В случае пластинки с опертыми краями (граничные условия: $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при $x=0$ и $x=a$, $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ при $y=0$ и $y=b$) можно удовлетворить уравнению (7) и граничным условиям, полагая

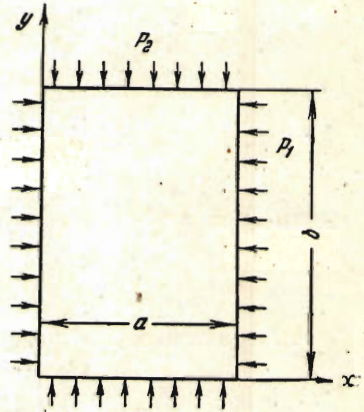
$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в уравнение (6):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{P_1}{D} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{P_2}{D} - \alpha - \beta \frac{P_1}{D} - \gamma \frac{P_2}{D} \right] A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0.$$

Так как это выражение должно быть тождественно нулем, то

$$\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{P_1}{D} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{P_2}{D} - \alpha - \beta \frac{P_1}{D} - \gamma \frac{P_2}{D} = 0.$$



Фиг. 1.

Отсюда следует:

$$\alpha = \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2, \quad \beta = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad \gamma = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

Предположим, что силы P_1 и P_2 имеют вид:

$$P_1 = P_{01} + P_{11} \cos \omega t, \quad P_2 = P_{02} + P_{22} \cos \omega t,$$

тогда уравнение (7) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 T_{mn}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{mn}^2}{\omega^2} (1 - \epsilon \cos 2\tau) T_{mn} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

где

$$\omega_{mn} = C\pi \sqrt{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2}{a^2} \frac{P_{01}}{D} - \frac{n^2}{b^2} \frac{P_{02}}{D}}$$

есть средняя собственная частота пластинки,

$$P_{mn} = \pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

есть критическая сила,

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \quad \epsilon = \frac{\alpha^2 P_{11} + P_{22}}{(\alpha^2 + 1) P_{mn} - \alpha^2 P_{01} - P_{02}}, \quad \alpha^2 = \frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2}.$$

Уравнение (9) является хорошо известным уравнением Mathieu. Вопрос об устойчивости движения пластинки сводится к исследованию его решения.

Если при данных ϵ и $\frac{2\omega_{mn}}{\omega}$ решение уравнения (9) остается ограниченным при возрастании аргумента τ , то мы говорим, что движение пластинки устойчиво. Если же решение этого уравнения неограниченно возрастает при $\tau \rightarrow \infty$, то движение неустойчиво. В дальнейшем мы более подробно займемся исследованием уравнения (9).

Теперь рассмотрим другие случаи прямоугольной пластинки. Здесь, как и в дальнейшем, метод Фурье для решения уравнения (4) не применим. Для решения воспользуемся приближенным методом Б. Г. Галеркина. Согласно этому методу, решение уравнения (4) можно искать в виде:

$$w_{mn} = T_{mn}(t) U_{mn}(x, y) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (10)$$

где коэффициенты $T_{mn}(t)$ являются функциями времени. Их можно принять за обобщенные координаты пластинки. За функции $U_{mn}(x, y)$ можно взять собственные функции задачи о колебаниях пластинки при соответствующих граничных условиях. По существу, решение уравнения (4) в виде (10) аппроксимирует формы изгиба пластинки формами ее собственных колебаний.

Подставляя w_{mn} из (10) в уравнение (4), получим выражение, которое для краткости обозначим через $F(x, y, t, T''_{mn}, T_{mn})$.

Вообще говоря, функция F не равна нулю тождественно, так как w_{mn} , определяемое выражением (10), не является решением уравнения (4). Умножая

функцию $F(x, y, t, T_{mn}'', T_{mn})$ на $U_{mn}(x, y) dx dy$, интегрируя полученное выражение по всей площади пластинки и приравняв результат нулю, получим:

$$\int_0^a \int_0^b F(x, y, t, T_{mn}'', T_{mn}) U_{mn}(x, y) dx dy = 0. \quad (11)$$

Отсюда получаем уравнение:

$$T_{mn}'' + f(a, b, t) T_{mn} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (12)$$

где функция $f(a, b, t)$ определяется видом продольных сил и граничными условиями.

Возьмем, например, пластинку с закрепленным краем (граничные условия: $w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ при $x=0$ и $x=a$, $w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ при $y=0$ и $y=b$).

Приближенное значение искривленной поверхности пластинки можно взять в виде следующего выражения:

$$w_{mn} = T_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (13)$$

где T_{mn} — обобщенные координаты и $X_m(x)$, $Y_n(y)$ — функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи. За функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ можно взять собственные функции закрепленного с двух концов стержня. Функции эти суть:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= (\sin k_m - \operatorname{sh} k_m) \left(\cos k_m \frac{x}{a} - \operatorname{ch} k_m \frac{x}{a} \right) - \\ &\quad - (\cos k_m - \operatorname{ch} k_m) \left(\sin k_m \frac{x}{a} - \operatorname{sh} k_m \frac{x}{a} \right), \\ Y_n(y) &= (\sin k_n - \operatorname{sh} k_n) \left(\cos k_n \frac{y}{b} - \operatorname{ch} k_n \frac{y}{b} \right) - \\ &\quad - (\cos k_n - \operatorname{ch} k_n) \left(\sin k_n \frac{y}{b} - \operatorname{sh} k_n \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где k — корень уравнения

$$\cos k \operatorname{ch} k = 1. \quad (15)$$

Подставляя (13) в уравнение (4), получим:

$$\begin{aligned} T_{mn} \left[\frac{k_m^4}{a^4} X_m Y_n + \frac{k_n^4}{b^4} X_m Y_n + 2 X_m'' Y_n'' + \frac{P_1}{D} X_m'' Y + \frac{P_2}{D} X_m Y_n'' \right] + \\ + \frac{1}{C^2} X_m Y_n T_{mn}'' = 0. \end{aligned}$$

Умножим это выражение на $X_m(x) Y_n(y) dx dy$ и проинтегрируем по всей площади пластинки; после преобразования найдем:

$$T_{mn}'' + C^2 \left[\frac{k_m^4}{a^4} + \frac{k_n^4}{b^4} + 2 \frac{\delta_m^2(a) \gamma_n^2(b)}{X_m''(a) Y_n''(b)} - \frac{P_1 \delta_m^2(a)}{D X_m''(a)} - \frac{P_2 \gamma_n^2(b)}{D Y_n''(b)} \right] T_{mn} = 0. \quad (16)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями:

$$\int_0^a X_m^2(x) dx = \frac{a}{4} X_m''(a), \quad \int_0^b Y_n^2(y) dy = \frac{b}{4} Y_n''(b);$$

кроме того, ввели обозначения:

$$\int_0^a X_m(x) X_m''(x) dx = - \int_0^a U_m''(x) dx = - \frac{a}{4} \delta_m^2(a),$$

$$\int_0^b Y_n(y) Y_n''(y) dy = - \int_0^b Y_n''(y) dy = - \frac{b}{4} \gamma_n^2(b).$$

Вычисления дают:

$$\frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} = \frac{\frac{1}{k_m} (\sin k_m - \operatorname{sh} k_m) (\operatorname{sh}^2 k_m \cos k_m + \sin^2 k_m \operatorname{ch} k_m) + (\cos k_m - \operatorname{ch} k_m)^2}{\frac{k_m^2}{a^2} (\cos k_m \operatorname{sh} k_m - \sin k_m \operatorname{ch} k_m)},$$

$$\frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)} = \frac{\frac{1}{k_n} (\sin k_n - \operatorname{sh} k_n) (\operatorname{sh}^2 k_n \cos k_n + \sin^2 k_n \operatorname{ch} k_n) + (\cos k_n - \operatorname{ch} k_n)^2}{\frac{k_n^2}{a^2} (\cos k_n \operatorname{sh} k_n - \sin k_n \operatorname{ch} k_n)}.$$

Уравнение (16) можно привести к обычному виду уравнения Mathieu, если положить $P_1 = P_{01} + P_{11} \cos \omega t$, $P_2 = P_{02} + P_{22} \cos \omega t$,

$$\frac{d^2 T_{mn}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{mn}^2}{\omega^2} (1 - \varepsilon \cos 2\tau) T_{mn} = 0, \quad (17)$$

где

$$\omega_{mn} = C \sqrt{\frac{4k_m^4}{a^4} + \frac{k_n^4}{b^4} + 2 \frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} \frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)} - \frac{P_{01}}{D} \frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} - \frac{P_{02}}{D} \frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)}}$$

есть средняя собственная частота зажатой по контуру пластинки, а

$$\varepsilon = \frac{\frac{P_{11}}{D} \frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} + \frac{P_{22}}{D} \frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)}}{\frac{k_m^4}{a^4} + \frac{k_n^4}{b^4} + 2 \frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} \frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)} - \frac{P_{01}}{D} \frac{\delta_m^2(a)}{X_m''(a)} - \frac{P_{02}}{D} \frac{\gamma_n^2(b)}{Y_n''(b)}}.$$

По этому методу можно исследовать устойчивость прямоугольных пластин при других граничных условиях, если только возможно задать искривленную форму пластинки в виде:

$$w = T_{mn} X_m(x) Y_n(y).$$

§ 3. Круглая пластинка

Теперь перейдем к рассмотрению круглой пластинки радиуса a (фиг. 2). Преобразуем уравнение (1) для этого случая. Для решения уравнения (2) имеем следующие граничные условия при $r = a$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -P, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Если предположить распределение напряжений в пластинке симметричным, то уравнение (2) в полярных координатах примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0. \quad (18)$$

Решение этого уравнения при данных граничных условиях будет:

$$\varphi = -\frac{P}{2} (r^2 - a^2). \quad (19)$$

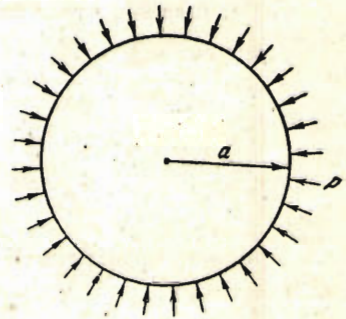
Учитывая, что $\sigma_r = -P$, $\sigma_\theta = -P$ и $\tau_{\theta r} = 0$, приведем уравнение (1) для круглой пластинки к виду:

$$\Delta \Delta w + \frac{P}{D} \Delta w + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (20)$$

где

$$C^2 = \frac{D}{\rho h}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Разберем сперва случай зажатой по краю пластинки. Пусть интенсивность продольных сил, действующих по контуру пластинки, есть P (фиг. 2). Предположим, что форма изгиба зажатой по контуру сплошной круглой пластинки может быть изображена выражением:



Фиг. 2.

$$w = T_{nj} \left[I_n(i\mu_{nj}) I_n\left(\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) - I_n(\mu_{nj}) I_n\left(i\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) \right] e^{in\theta} \quad (21)$$

($n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots$),

где T_{nj} — обобщенные координаты пластинки; $i = \sqrt{-1}$; $I_n\left(\mu_{nj} \frac{r}{a}\right)$ и $I_n\left(i\mu_{nj} \frac{r}{a}\right)$ — функции Бесселя первого рода соответственно вещественного и мнимого аргументов, а μ_{nj} является корнем уравнения:

$$\frac{i I_n'(i\mu_{nj})}{I_n(i\mu_{nj})} - \frac{I_n'(\mu_{nj})}{I_n(\mu_{nj})} = 0. \quad (22)$$

Корни этого уравнения легко могут быть вычислены, например, графическим способом. Первые четыре корня суть:

$$\mu_{01} = 3.1961, \quad \mu_{11} = 4.6110, \quad \mu_{02} = 6.3064, \quad \mu_{12} = 7.7993.$$

Подставим значение w , определяемое из (21), в уравнение (20). Умножая полученное выражение на

$$\left[I_n(i\mu_{nj}) I_n\left(\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) - I_n(\mu_{nj}) I_n\left(i\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) \right] e^{in\theta} r dr d\theta$$

и интегрируя по всей площади пластинки, получим после элементарных преобразований:

$$T_{nj}'' + C^2 \left[\frac{\mu_{nj}^4}{a^4} - \frac{\mu_{nj}^2 b_2 P}{a^2 b_1 D} \right] T_{nj} = 0, \quad (23)$$

где

$$b_2 = \int_0^a \left[I_n^2(i\mu_{nj}) I_n^2\left(\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) - I_n^2(\mu_{nj}) I_n^2\left(i\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) \right] r dr,$$

$$b_1 = \int_0^a \left[I_n(i\mu_{nj}) I_n\left(\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) - I_n(\mu_{nj}) I_n\left(i\mu_{nj} \frac{r}{a}\right) \right]^2 r dr.$$

Вычисления этих интегралов показывают, что

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{I_n'^2(\mu_{nj})}{I_n^2(\mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}. \quad (24)$$

Предполагая, что $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$, найдем

$$\frac{d^2 T_{nj}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} (1 - \varepsilon \cos 2\tau) T_{nj} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots), \quad (25)$$

где

$$\omega_{ni} = C \frac{\mu_{nj}}{a} \sqrt{\frac{\mu_{nj}^2}{a^2} - \frac{P_0}{D} \left[\frac{I_n'^2(\mu_{nj})}{I_n^2(\mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2} \right]}$$

есть средняя собственная частота закрепленной по контуру сплошной круглой пластинки,

$$P_{nj} = D \frac{\mu_{nj}^2}{a^2} \frac{1}{\frac{I_n'^2(\mu_{nj})}{I_n^2(\mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}}$$

есть критическая сила и

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_{nj} - P_0}.$$

Разберем еще случай круглой сплошной пластинки, опертой по краю. В этом случае форма искривленной поверхности пластинки может быть изображена тем же выражением (21), только здесь μ_{nj} является корнем следующего уравнения:

$$\frac{i I_n'(i\mu_{nj})}{I_n(i\mu_{nj})} - \frac{I_n'(\mu_{nj})}{I_n(\mu_{nj})} = \frac{2\mu_{nj}}{1-\sigma}, \quad (26)$$

где σ — постоянная Пуассона.

Поступая в этом случае так, как и выше, приходим к уравнению:

$$T_{nj}'' + C^2 \left[\frac{\mu_{nj}^4}{a^4} - \frac{\mu_{nj}^2}{a^2} \frac{b_2}{b_1} \frac{P}{D} \right] T_{nj} = 0, \quad (27)$$

где

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{I_n'^2(\mu_{nj}')}{I_n^2(\mu_{nj}')} + \frac{2\mu_{nj} I_n'(\mu_{nj}')}{1-\sigma I_n(\mu_{nj}')} + \frac{2\mu_{nj}^2}{(1-\sigma)^2} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}}{1 - \frac{2\mu_{nj} I_n'(\mu_{nj}')}{1-\sigma I_n(\mu_{nj}')} - \frac{2\mu_{nj}^2}{(1-\sigma)^2}}.$$

Полагая $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$, получим:

$$\frac{d^2 T_{nj}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} (1 - \varepsilon \cos 2\tau) T_{nj} = 0, \quad (28)$$

где:

$$\omega_{nj} = C \frac{\mu_{nj}}{a} \sqrt{\frac{\mu_{nj}}{a^2} - \frac{b_2 P_0}{b_1 D}}$$

есть средняя собственная частота круглой сплошной, опертой по краю пластинки,

$$P_{nj} = D \frac{b_1 \mu_{nj}^2}{b_2 a^2}$$

есть критическая сила и

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_{nj} - P_0}$$

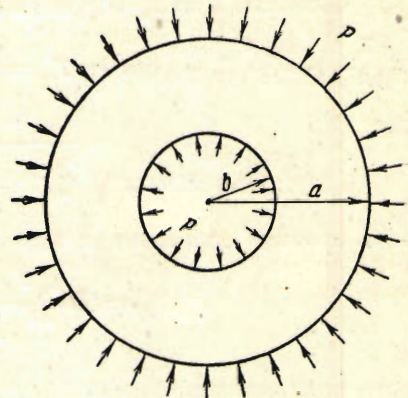
Таким образом и в случае круглой пластинки исследование ее устойчивости под действием продольных периодических сил сводится к нахождению устойчивых или неустойчивых решений уравнения Mathieu. Очевидно, этим методом могут быть исследованы круглые пластинки при других граничных условиях.

§ 4. Кольцеобразная пластинка

Для кольцеобразной пластинки, подверженной действию продольных периодических сил по внутреннему и внешнему контурам с интенсивностью P , рассмотрением которой мы и ограничимся, уравнение (20) сохраняет свою силу. Если же силы действуют только по внешнему контуру или только по внутреннему или если интенсивность продольных сил по внешнему и по внутреннему контурам различна, тогда σ_r и σ_θ являются функциями расстояния и уравнение (1) будет с переменными коэффициентами, зависящими от r .

Пусть закрепленная по внутреннему и внешнему контурам пластинка (граничные условия $w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0$ при $r = b$ и $r = a$) имеет внутренний радиус b и внешний a (фиг. 3).

Форма кольцеобразной пластинки при данных граничных условиях может быть изображена следующим выражением:



Фиг. 3.

$$w = T_{nj} \left[\Delta_{11} I_n \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) - \Delta_{12} Y_n \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) + \Delta_{13} I_n \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) - \Delta_{14} Y_n \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) \right] e^{in\theta}. \quad (29)$$

Здесь T_{nj} — функции времени, принимаемые за обобщенные координаты, $i = \sqrt{-1}$, I_n и Y_n — функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка от вещественного и мнимого аргументов, μ — корень уравнения:

$$\begin{vmatrix} I_n(\mu) & Y_n(\mu) & I_n(i\mu) & Y_n(i\mu) \\ I_n'(\mu) & Y_n'(\mu) & iI_n'(i\mu) & iY_n'(i\mu) \\ I_n(a\mu) & Y_n(a\mu) & I_n(ia\mu) & Y_n(ia\mu) \\ I_n'(a\mu) & Y_n'(a\mu) & iI_n'(ia\mu) & iY_n'(ia\mu) \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

и $\alpha = \frac{b}{a}$. Числа $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}$ пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов первой строки определителя (30).

Подставим выражение (29) в уравнение (20) и умножим на

$$\left[\Delta_{11} I_n \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) - \Delta_{12} Y_n \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) + \Delta_{13} I_n \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) - \Delta_{14} Y_n \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) \right] e^{in\theta} r dr d\theta.$$

Интегрируя по всей площади пластинки, получим:

$$T_{ij}'' + C^2 \left[\frac{\mu_{nj}^4}{a^4} - \frac{\mu_{nj}^2 b_2 P}{a^2 b_1 D} \right] T_{nj} = 0, \quad (31)$$

где:

$$b_2 = \int_b^a \left[Z_n^2 \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) - K_n^2 \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) \right] r dr,$$

$$b_1 = \int_b^a \left[Z_n \left(\mu_{nj} \frac{r}{a} \right) + K_n \left(i \mu_{nj} \frac{r}{a} \right) \right]^2 r dr,$$

$$Z_n(x) = \Delta_{11} I_n(x) - \Delta_{12} Y_n(x), \quad K_n(ix) = \Delta_{13} I_n(ix) - \Delta_{14} Y_n(ix).$$

Вычисляя интегралы, найдем:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{Z_n'^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n'^2(\alpha \mu_{nj})}{Z_n^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n^2(\alpha \mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}.$$

Полагая $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$, найдем:

$$\frac{d^2 T_{nj}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} (1 - \varepsilon \cos 2\tau) T_{nj} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots, j=1, 2, 3, \dots), \quad (32)$$

где

$$\omega_{nj} = C \frac{\mu_{nj}}{a} \sqrt{\frac{\mu_{nj}^2}{a^2} - \frac{P_0}{D} \left[\frac{Z_n'^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n'^2(\alpha \mu_{nj})}{Z_n^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n^2(\alpha \mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2} \right]}$$

— есть средняя собственная частота кольцеобразной пластинки,

$$P_{nj} = D \frac{\mu_{nj}^2}{a^2} \frac{1}{\frac{Z_n'^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n'^2(\alpha \mu_{nj})}{Z_n^2(\mu_{nj}) - \alpha^2 Z_n^2(\alpha \mu_{nj})} - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}}$$

— есть критическая сила и

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_{nj} - P_0}.$$

По этому методу можно исследовать устойчивость колебаний не только пластин, но и мембран, натяжение которых меняется периодически, причем в случае мембран можно применять метод Фурье для решения уравнения колебаний.

§ 5. Исследование устойчивости пластинки

Сейчас перейдем к выяснению условий, при которых колебания пластинки, подверженной продольным периодическим силам, будут устойчивы. Для этого необходимо исследовать решения уравнения Mathieu. Как известно, решение этого уравнения можно представить в виде

$$T_{nj} = A_{nj} e^{i\nu_{nj}\tau} F_{nj}(\tau) + B_{nj} e^{-i\nu_{nj}\tau} F_{nj}(-\tau), \quad (33)$$

где $F_{nj}(\tau)$ — периодическая функция времени с периодом τ или 2τ , A_{nj} и B_{nj} — произвольные постоянные и ν_{nj} — характеристический показатель Hill. Для нашей цели нет надобности интересоваться видом функции $F_{nj}(\tau)$, ибо она остается ограниченной при возрастании аргумента τ . Достаточно только установить связь между коэффициентами уравнения Mathieu ϵ и $\frac{2\omega_{nj}}{\omega}$ и характеристическим показателем ν_{nj} , так как устойчивые или неустойчивые решения определяются видом ν_{nj} .

Для того чтобы колебания пластинки были устойчивы, характеристический показатель ν_{nj} должен быть чисто вещественным. Если ν_{nj} является комплексным или мнимым, то в выражении (33), как легко проверить, один из членов в правой части будет неограниченно возрастать при возрастании τ . Таким образом колебания пластинки для этого случая будут неустойчивы. Наконец, если $\nu_{nj} = 0$, то, вообще говоря, колебания пластинки неустойчивы, так как в решении (33) появляются вековые члены. Решение (33) для этого случая приводится к виду:

$$T_{nj} = A_{nj} \psi_{nj}(\tau) + B_{nj} \tau h_{nj}(\tau), \tag{34}$$

где $\psi_{nj}(\tau)$ и $h_{nj}(\tau)$ — некоторые периодические функции. Только когда множитель при τ в (34) окажется тождественно нулем, тогда решение (34) будет периодическим.

Характеристический показатель ν_{nj} можно определить из соотношения⁽²⁾,

$$\cos \pi \nu = 1 - 2\Delta(0) \sin^2 \frac{\pi \lambda}{2}, \tag{35}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2}$$

и

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & -\epsilon & 1 & -\epsilon & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} & 1 & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2} & 1 & \frac{-\epsilon}{1 - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

После несложных преобразований формулы (35) можно получить следующую формулу для вычисления ν_{nj} , пригодную для малых ϵ ($\epsilon < 1$):

$$\cos \pi \nu = \cos \pi \lambda - \frac{\pi \lambda^3 \epsilon^2 \sin \pi \lambda}{4(1-\lambda^2)} - Q(\epsilon^4). \quad (36)$$

Здесь $Q(\epsilon^4)$ — функция ϵ , убывающая вместе с убыванием ϵ как ϵ^4 .

Если правая часть уравнения (36) больше ± 1 , то ν_{nj} обязательно будет мнимым или комплексным, другими словами, в этом случае движение пластинки будет неустойчиво. Как будет видно из дальнейшего, имеются целые области устойчивых и неустойчивых движений. Области устойчивых колебаний пластинки будут для тех значений параметров уравнения Mathieu ϵ и $\frac{2\omega_{nj}}{\omega}$, которые удовлетворяют неравенству:

$$-1 < \cos \pi \lambda - \frac{\pi \lambda^3 \epsilon^2 \sin \pi \lambda}{4(1-\lambda^2)} - Q(\epsilon^4) < 1. \quad (37)$$

В том случае, когда в правой части формулы (40) получается ± 1 , необходимо взять еще один из членов, и тогда эта формула преобразуется в следующую, пригодную для тех же значений ϵ :

$$\begin{aligned} \cos \pi \nu = \cos \pi \lambda - \frac{\pi \lambda^3 \epsilon^2 \sin \pi \lambda}{4(1-\lambda^2)} - \\ - \frac{\pi \lambda^7 \epsilon^4 \sin \pi \lambda}{32(1-\lambda^2)} \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{1-\lambda^2} + \frac{9}{2} \frac{1}{4-\lambda^2} \right] - Q(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (38)$$

При данных ϵ и $\frac{2\omega_{nj}}{\omega}$ легко определить по формулам (35), (36) и (38), имеем ли мы область устойчивых или неустойчивых колебаний пластинки.

Для дальнейшего удобно представить решение уравнения Mathieu в виде ряда, расложенного по возрастающим степеням ϵ^4 . Уравнение Mathieu представим в виде:

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} + \lambda^2 (1 - \epsilon \cos 2\tau) T = 0, \quad (39)$$

где, как и выше, $\lambda^2 = \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2}$. Будем предполагать, что ϵ меньше единицы. Известно, что области устойчивых колебаний отделяются от областей неустойчивых кривыми, на которых решения уравнения Mathieu являются или периодическими с периодом 2π или неограниченно возрастающими. Поэтому решение уравнения (39) будем искать в виде ряда:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k T_k, \quad (40)$$

предполагая его периодическим с периодом 2π или неограниченно возрастающим. Первое решение будет соответствовать устойчивым колебаниям пластинки,

а второе — неустойчивым. Значения параметра λ^2 , отвечающие первому или второму решению, тоже ищем в виде ряда

$$\lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \lambda_k^2. \tag{41}$$

Подставим ряды (40) и (41) в уравнение (39). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} T_0'' + \lambda_0^2 T_0 &= 0, \\ T_1'' + \lambda_0^2 T_1 + \lambda_1^2 T_0 - \lambda_0^2 T_0 \cos 2\tau &= 0, \\ T_2'' + \lambda_0^2 T_2 + \lambda_2^2 T_0 + \lambda_1^2 T_1 - \lambda_0^2 T_1 \cos 2\tau - \lambda_1^2 T_0 \cos 2\tau &= 0, \\ T_3'' + \lambda_0^2 T_3 + \lambda_3^2 T_0 + \lambda_2^2 T_1 + \lambda_1^2 T_2 - \lambda_2^2 T_0 \cos 2\tau - \lambda_1^2 T_1 \cos 2\tau - \lambda_0^2 T_0 \cos 2\tau &= 0, \\ \dots \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь T_0, T_1, T_2, \dots — функции времени и $\lambda_0^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$ — постоянные. Решение первого из уравнений (42) будет:

$$T_0 = A_0 \cos \lambda_0 \tau + B_0 \sin \lambda_0 \tau. \tag{43}$$

Для того чтобы функция T_0 была периодической с периодом 2π , необходимо следует:

$$\lambda_0 = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{44}$$

Учитывая, что λ_0^2 является нулевым приближением $\lambda^2 = \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2}$, получим:

$$\frac{2\omega_{nj}}{\omega} = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{45}$$

т. е. нулевое приближение дает ряд критических частот.

Не приводя решения системы (42), дадим окончательный результат. Требование отсутствия вековых членов в решении уравнения (39) приводит к неравенству для $n = 1$:

$$1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{7}{32} \epsilon^2 - \frac{55}{512} \epsilon^3 + \dots \leq \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} \leq 1 + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{7}{32} \epsilon^2 + \frac{55}{512} \epsilon^3 + \dots \tag{46}$$

Для значений $\frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2}$, удовлетворяющих неравенству (46), имеем область неустойчивости. Это будет первая область неустойчивости.

Для $n = 2$ получим вторую область неустойчивости; здесь $\frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2}$ содержит только четные степени ϵ :

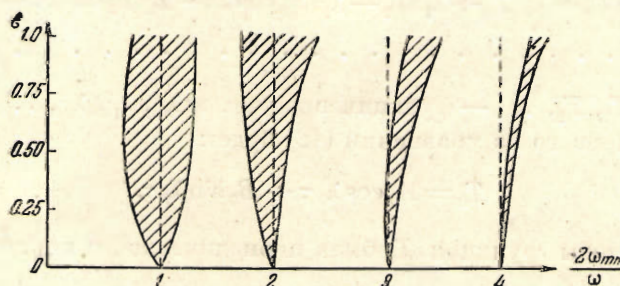
$$4 - \frac{1}{3} \epsilon^2 + \dots \leq \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} \leq 4 + \frac{5}{3} \epsilon^2 + \dots \tag{47}$$

Аналогично получается выражение для третьей области неустойчивости ($n = 3$):

$$9 + \frac{81}{64} \epsilon^2 - \frac{9}{8} \epsilon^3 + \dots \leq \frac{4\omega_{nj}^2}{\omega^2} \leq 9 + \frac{81}{64} \epsilon^2 + \frac{9}{8} \epsilon^3 + \dots \tag{48}$$

Из формул (46), (47) и (48) следует, что наибольшая область неустойчивости соответствует отношению частот $\frac{2\omega_{nj}}{\omega} = 1$. Практически наиболее важной является первая область неустойчивости. Ширина второй, третьей и высших областей неустойчивости убывает с возрастанием порядка области n как ϵ^n . А. Андронов и М. Леонтович построили кривые $\epsilon = f\left(\frac{2\omega_{nj}}{\omega}\right)$, разграничивающие области устойчивых и неустойчивых колебаний (фиг. 4). Для первой области неустойчивости уравнения граничных кривых суть (с точностью до ϵ^3):

$$\frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{7}{32}\epsilon^2 - \frac{55}{512}\epsilon^3} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{7}{32}\epsilon^2 - \frac{55}{512}\epsilon^3}. \quad (49)$$



Фиг. 4.

Для второй и третьей областей неустойчивости соответствующие уравнения граничных кривых будут:

$$\frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{4 - \frac{1}{3}\epsilon^2} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{4 + \frac{5}{3}\epsilon^2}, \quad (50)$$

$$\frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{9 + \frac{81}{64}\epsilon^2 - \frac{9}{8}\epsilon^3} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega_{nj}}{\omega} = \sqrt{9 + \frac{81}{64}\epsilon^2 + \frac{9}{8}\epsilon^3}. \quad (51)$$

Из формул (49), (50) и (51) можно определить критические частоты, при которых колебания пластинки будут неустойчивы. Имеем:

$$\omega_{кр} = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{2}\epsilon + \frac{7}{32}\epsilon^2 \pm \frac{55}{512}\epsilon^3}} \quad (52)$$

для первой,

$$\omega_{кр}' = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3}\epsilon^2}} \quad \text{и} \quad \omega_{кр}'' = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3}\epsilon^2}} \quad (53)$$

для второй и

$$\omega_{кр} = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{9 + \frac{81}{64}\epsilon^2 \pm \frac{9}{8}\epsilon^3}} \quad (54)$$

для третьей области неустойчивости.

Подставив в формулы (52) и (53) значения параметра ϵ , получим (с точностью до ϵ^2):

$$\omega_{кр} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 P_{11} + P_{22}}{(\alpha^2 + 1) P_{mn} - \alpha^2 P_{01} - P_{02}} + \frac{7}{32} \left[\frac{\alpha^2 P_{11} + P_{22}}{(\alpha^2 + 1) P_{mn} - \alpha^2 P_{01} - P_{02}} \right]^2}} \quad (55)$$

для прямоугольной пластинки с опертым краем (первая область неустойчивости).

Для второй области неустойчивости имеем:

$$\omega'_{кр} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \left[\frac{\alpha^2 P_{11} - P_{22}}{(\alpha^2 + 1) P_{mn} - \alpha^2 P_{01} - P_{02}} \right]^2}}, \quad (56)$$

$$\omega''_{кр} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3} \left[\frac{\alpha^2 P_{11} + P_{22}}{(\alpha^2 + 1) P_{mn} - \alpha^2 P_{01} - P_{02}} \right]^2}}.$$

Соответствующие формулы для круглой пластинки будут:

$$\omega_{кр} = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_{nj} - P_0} + \frac{7}{32} \frac{P_1^2}{(P_{nj} - P_0)^2}}}, \quad (57)$$

$$\omega'_{кр} = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \frac{P_1^2}{(P_{nj} - P_0)^2}}}, \quad \omega''_{кр} = \frac{2\omega_{nj}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3} \frac{P_1^2}{(P_{nj} - P_0)^2}}}. \quad (58)$$

В формулах (55), (56), (57) и (58) предполагаются известными размеры пластинки и величины продольных сил. По этим данным вычисляются области критических частот. Если же известны величины продольных сил и их частоты, то размеры пластинки так могут быть подобраны, чтобы избежать нежелательных резонансных явлений.

§ 6. Примеры

Чтобы иллюстрировать использование приводимых в тексте формул, сделаем просчет двух случаев. Для этого возьмем прямоугольную пластину с опертым краем и круглую пластину с закрепленным краем.

Пример 1. Стальная прямоугольная пластина, опертая по краю, имеет ширину $a = 225$ см, высоту $b = 200$ см и толщину $h = 1$ см; данные материала: $\rho = 7.9$ гр/см³, $E = 2.1 \times 10^{12}$ дин/см², $\sigma = 0.3$.

Постоянная составляющая продольной силы

$$P_{01} = P_{02} = 5 \times 10^7 \text{ дин/см,}$$

переменная составляющая

$$P_{11} = P_{22} = 3 \times 10^7 \text{ дин/см.}$$

Вычисляем жесткость пластины D и постоянную C . Имеем:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} = \frac{2.1 \times 10^{12} \times 1^3}{12(1 - 0.3^2)} = 1.92 \times 10^{11} \frac{\text{гр. см}^2}{\text{сек}^2},$$

$$C = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{1.92 \times 10^{11}}{7.9 \times 1}} = 1.55 \times 10^5 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Критическая сила (число полуволн $m = n = 1$)

$$P_{mn} = \pi^2 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \pi^2 \times 1.92 \times 10^{11} \left(\frac{1}{225^2} + \frac{1}{200^2} \right) = 8.55 \times 10^7 \text{ дин/см.}$$

Собственная частота пластины

$$\omega_{11} = C\pi \sqrt{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{P_0}{D} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} = 44,$$

$$f_{11} = \frac{44}{2\pi} = 7 H_z \text{ (герц).}$$

Вычисляем параметр ϵ :

$$\epsilon = \frac{P_{11}}{P_{mn} - P_{01}} = \frac{3 \times 10^7}{8.55 \times 10^7 - 5 \times 10^7} = 0.845.$$

Критические частоты для первой области неустойчивости:

$$f'_{кр} = \frac{2f_{11}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{7}{32}\epsilon^2}} = \frac{2 \times 7}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot 0.845 + \frac{7}{32} \cdot 0.845^2}} = 11.2 H_z,$$

$$f''_{кр} = \frac{2f_{11}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{7}{32}\epsilon^2}} = 16.4 H_z.$$

Таким образом, если на данную пластину будут действовать указанные выше силы и если частота этих сил будет лежать в промежутке от 11.2 до 16.4 H_z , то можно ожидать появление неприятных резонансных явлений. Вычислим еще критические частоты для второй области неустойчивости:

$$f'_{кр} = \frac{2f_{11}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3}\epsilon^2}} = \frac{2 \times 7}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \cdot 0.845^2}} = 7.2 H_z,$$

$$f''_{кр} = \frac{2f_{11}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3}\epsilon^2}} = 6.2 H_z.$$

Из этого примера еще раз видно, что ширина первой области неустойчивости наибольшая. При расчетах вторую и высшие области неустойчивости можно не принимать во внимание.

Пример 2. Стальная круглая пластинка, закрепленная по контуру, имеет диаметр 16 см и толщину 0.3 см. Данные материала: $\rho = 7.9 \text{ гр/см}^3$, $E = 2.1 \times 10^{12} \text{ дин/см}^2$, $\sigma = 0.3$.

Продольная сила

$$P_0 = 5 \times 10^8 \text{ дин/см}, P_1 = 1.5 \times 10^8 \text{ дин/см.}$$

Предположим, что колебания пластинки симметричны. Вычислим критические частоты для основного вида колебаний.

Жесткость пластинки D и постоянная C будут:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} = \frac{2.1 \times 10^{12} \times 0.3^3}{12(1 - 0.3^2)} = 5.2 \times 10^9 \frac{\text{гр. см}^2}{\text{сек}^2}$$

$$C = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{5.2 \times 10^9}{7.9 \times 0.3}} = 4.7 \times 10^4 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Критическая сила (число узловых диаметров $n=0$, число узловых окружностей $j=1$).

$$P_{nj} = D \frac{\mu_{01}^2}{a^2} \frac{I_0^2(\mu_{01})}{I_0^2(\mu_{01})} = 5.2 \times 10^9 \frac{3.1961^2}{8^2} \frac{(-0.32)^2}{0.26^2} = 1.26 \times 10^9 \text{ дин/см.}$$

Собственная частота

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= C \frac{\mu_{01}}{a} \sqrt{\frac{\mu_{01}^2}{a^2} - \frac{P_0}{D} \frac{I_0'^2(\mu_{01})}{I_0^2(\mu_{01})}} = \\ &= 4.7 \times 10^4 \frac{3.1961}{8} \sqrt{\frac{3.1961^2}{8^2} - \frac{5 \times 10^8}{5.2 \times 10^9} 0.66} = 5.8 \times 10^3, \\ f_{01} &= \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{5.8 \times 10^3}{2\pi} = 930 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

Параметр ε

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_{nj} - P_0} = \frac{1.5 \times 10^8}{12.6 \times 10^8 - 5 \times 10^8} = 0.2.$$

Вычисляем критические частоты для первой области неустойчивости:

$$\begin{aligned} f'_{\text{кр}} &= \frac{2f_{01}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{7}{32}\varepsilon^2}} = \frac{2 \times 930}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 + \frac{7}{32} \cdot 0.2^2}} = 1730 \text{ Hz,} \\ f''_{\text{кр}} &= \frac{2f_{01}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{7}{32}\varepsilon^2}} = 1970 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

Критические частоты для второй области неустойчивости:

$$f'_{\text{кр}} = \frac{2f_{01}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3}\varepsilon^2}} = \frac{2 \times 930}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \cdot 0.2^2}} = 934 \text{ Hz,} \quad f''_{\text{кр}} = \frac{2f_{01}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3}\varepsilon^2}} = 920 \text{ Hz.}$$

Итак, первая область неустойчивости расположена по частотам от 1730 Hz до 1970 Hz , а вторая область неустойчивости — от 920 Hz до 934 Hz .

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. А. П. Лурье за помощь в работе и за ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней. Статья в сборнике „Инженерные сооружения и строительная механика“, 1924.
2. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, ч. II, стр. 243.
3. Андронов А. и Леонтович М. Ж. Р. Ф.-Х. О., т. 59, стр. 430, 1927.
4. Кочин Н., Прикладная математика и механика, Старая серия, т. II, вып. 1, стр. 1—28.

STABILITY OF PLATES UNDER THE ACTION OF PERIODIC FORCES

V. A. Bodner

(Leningrad)

(Summary)

In the present article an attempt is made to solve the problem of stability of plates subjected to the action of longitudinal periodic forces in the form of

$$P = P_0 + P_1 \cos \omega t.$$

It is shown that* for defined finite values of longitudinal force P_1 there arise complete domains of critical frequencies located around the value $\frac{2\omega_{mn}}{\omega} = 1, 2, 3, \dots$, where ω_{mn} is one of the plate's own frequencies in which the oscillation of the plate is unstable.

For solving the problem in the case of a rectangular plate with supported edge, the Fourier method is applied. In the remaining cases* the approximation method of V. G. Galerkin is applied.

Differential equations describing the motion of the plate are

$$D \Delta \Delta w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Delta \varphi = 0,$$

where w is displacement of the middle plane, φ is the Airy function, h — thickness of plate, ρ — its density and $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ the cylindrical stiffness.

If the form of the plate can be given then the study of stability will consist of discovering the stable or unstable solutions of Mathieu's equation.

For the first domain of instability, the critical frequencies are determined by formula:

$$\omega_{\text{sp}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{2} \epsilon + \frac{7}{32} \epsilon^2 \pm \frac{55}{512} \epsilon^3}}. \quad (2)$$

The corresponding formulae for the second domain of instability will be

$$\omega'_{\text{sp}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \epsilon^2}}, \quad \omega''_{\text{sp}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3} \epsilon^2}}. \quad (3)$$

By means of formulae (2) and (3), with given values of acting longitudinal forces and size of plates, the critical frequencies can be determined under which the plate oscillations are unstable. If the value of the longitudinal forces and their frequencies be given, the size of plate can be chosen in such manner that no domains of instability will exist in the working frequency range.