А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

ТЕОРИЯ ТРАЕКТОРИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

А. П. ЧЕРЕВКОВ

(Краснодар)

С развитием оптического метода изучения деформаций теория траекторий напряжений становится основой новейших теоретических исследований, ортогональные траектории теории упругости строятся на основании экспериментальных исследований и существенно необходимы для всестороннего изучения распределения напряжений в деформированном теле. Однако интегрирование уравнений траекторий напряжения представляет большие затруднения. Поэтому в таком важном вопросе имеется мало теоретических исследований; в недавней книге Миура[1] собрал большой теоретический и опытный материал по траекториям напряжений, но только в одном случае (равномерно нагруженной полуплоскости) дается их интегрирование. Как указывает Миура, „практическая невозможность решения этих дифференциальных уравнений делает всю теорию траекторий напряжений неясной и неточной".

В настоящем исследовании даны общие методы интегрирования дифференциальных уравнений траекторий напряжения на основе теории ортогональных траекторий. Эти методы не только открывают путь к наиболее простому интегрированию уравнений траекторий напряжений в каждом данном случае нагрузки для плоской задачи теории упругости, но и дают возможность получить общие решения. Таким образом удается проинтегрировать уравнения траекторий напряжений для полуплоскости в общем виде для любой заданной нормальной нагрузки на границе полуплоскости. Точно так же и для круга, нагруженного на своей окружности какой угодно нормальной нагрузкой, мы получаем общий интеграл уравнений траекторий напряжений. При нагрузке на границе касательными силами в случае симметрии решения в отдельных случаях получаются легко, но для общего случая они становятся затруднительными и не могут быть изложены в настоящей статье.

Что касается исходных решений плоской задачи теории упругости, то с появлением исследований Колосова[2] и Мусхелишвили[3] прежние решения

---

[1] Spannungskurven in □ und < Trägern. Von Miura. Berlin, 1928.

[2] Г. Колосов. Применение компл. переменной к теории упругости, Москва, 1935 г.

[3] Н. Мусхелишвили. Некоторые задачи теории упругости, Москва, 1933 г.

посредством функции напряжения Эри должны считаться устаревшими. Прямые методы наших авторов несравненно быстрее ведут к цели и особенно пригодны для настоящего исследования.

1. Общий способ интегрирования траекторий напряжений

Как известно, траектории напряжений задаются двойным углом в виде:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\tau}{\sigma}, \tag{1}$$

где τ — касательное напряжение, а σ — полуразность нормальных напряжений. В плоской задаче теории упругости имеем при нормальной нагрузке:

$$\sigma = MS, \quad \tau = MT, \tag{2}$$

где M — общий множитель, а S и T — определенные величины. Следовательно, из (1) имеем:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{T}{S}, \tag{3}$$

причем по свойству траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta. \tag{4}$$

Далее, из (1) получим:

$$\cos 2\theta = \frac{S}{\sqrt{S^2 + T^2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{T}{\sqrt{S^2 + T^2}},$$

и затем:

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = \frac{S + iT}{\sqrt{S^2 + T^2}}. \tag{5}$$

Отсюда следует:

$$S + iT = \sqrt{S^2 + T^2}\, e^{2i\theta},$$

$$\log (S + iT) = \log \sqrt{S^2 + T^2} + 2i\theta. \tag{6}$$

Так как координатный угол θ является гармонической функцией, то и $\log \sqrt{S^2 + T^2}$ также должен быть[1] гармонической функцией как вещественная часть некоторой функции комплексного переменного $z = x + iy$, т. е. мы на основании (6) имеем общее условие для траекторий напряжений:

$$S + iT = f(z) \tag{7}$$

должно быть аналитической функцией z.

Для выяснения вида этой функции представим, что плоскость z отображена некоторой функцией

$$w = \varphi + i\psi \tag{8}$$

так, что уравнение траекторий напряжений представляется в виде:

$$\psi = C. \tag{9}$$

---

[1] Доказательства этого, основанного на теории ортогональных траекторий, здесь не приводим.

Введем производные этой функции как бы скорости некоторого течения:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{10}$$

Другими словами, полагаем:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\varphi + i d\psi}{dx + i dy} = u - iv \tag{11}$$

или же для обратной функции $\frac{dz}{dw}$, обозначая градиент течения V:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}, \tag{12}$$

имеем:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{u - iv} = \frac{u + iv}{V^2} = \frac{1}{V^2} V e^{i\theta} = \frac{1}{V} e^{i\theta}, \tag{13}$$

так как мы считаем выполненным основное уравнение траекторий:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}. \tag{14}$$

Итак, мы имеем:

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}}{V^2}, \tag{15}$$

или, подставляя сюда $e^{2i\theta}$ из (5):

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \frac{S + iT}{V^2 \sqrt{S^2 + T^2}}. \tag{16}$$

Это уравнение является основным в излагаемой теории траекторий напряжений, и мы должны установить условия его применения. Прежде всего заметим, что в основном задании траекторий напряжений (1) может войти в числитель и знаменатель общий множитель M:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{T}{S} = \frac{MT}{MS}. \tag{17}$$

Это равносильно тому, что вместо S и T были бы соответственно взяты MS и MT. Уравнение (16) при этом не изменило бы своей формы, так как

$$\frac{S + iT}{\sqrt{S^2 + T^2}}$$

при этой замене не изменяется. Однако основное условие нашего метода (7) при этом теряет смысл, так как если $S + iT$ есть функция переменного $z = x + iy$, то $MS + iMT$, очевидно, уже не будет функцией z.

Поэтому необходимым условием нашего метода интегрирования является то, чтобы общий множитель M в $\operatorname{tg}\theta$ был бы сокращен согласно (17), либо, наоборот, введен так, чтобы условие излагаемого способа интегрирования (7) выполнялось, т. е. $S + iT$ должно быть функцией от $z = x + iy$.

В таком случае мы можем упростить выведенное выражение (13); именно, положим:

$$S+iT=Re^{i\Phi}, \qquad \frac{S+iT}{\sqrt{S^2+T^2}}=e^{i\Phi}.$$

Подставляя это в (16) и сравнивая с (13), находим:

$$\theta=\Phi/2. \tag{19}$$

Далее, из (13) следует, что $\frac{1}{V}e^{i\theta}$ есть функция z.

Извлекая же корень из (18), имеем:

$$\sqrt{S+iT}=\sqrt{R}\,e^{i\Phi/2}.$$

Так как в силу (19) $\Phi/2=\theta$, то выражения $\sqrt{R}e^{i\theta}$ и $\frac{1}{V}e^{i\theta}$ должны быть тождественны как одна и та же функция z, поэтому

$$V=\frac{1}{\sqrt{R}}. \tag{20}$$

Подставляя теперь найденные выражения (20) и (18) в (16), получим:

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=R\,e^{i\Phi}=S+iT; \tag{21}$$

в таком виде мы имеем окончательную форму искомого интеграла дифференциальных уравнений траекторий напряжений, при непременном условии, чтобы

$$S+iT=f(z).$$

Интегрируя (21), мы получим уравнение траекторий напряжений в виде

$$\psi=C.$$

2. Приложение изложенного метода к разысканию ортогональных траекторий

Для выяснения излагаемого метода сначала рассмотрим приложение его к основным системам ортогональных траекторий.

Пример 1. Круглые цилиндры.

Пусть система круглых цилиндров (т. е. окружностей на плоскости xy) задана в виде:

$$x^2+y^2=\lambda^2,$$

где λ — параметр. Дифференцируя это уравнение, находим:

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Далее имеем:

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Таким образом основное задание траекторий будет:

$$\frac{T}{S}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Составляя $S+iT$, убеждаемся, что это будет функция комплексного переменного z:

$$S+iT=x^2-y^2+2ixy=(x+iy)^2.$$

В таком случае из уравнения ортогональных траекторий (21)

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=z^2,\quad \frac{dz}{dw}=z,\quad w=\log z$$

и, следовательно,

$$z=e^w=e^\varphi(\cos\psi+i\sin\psi)$$

$$x=e^\varphi\cos\psi,\quad y=e^\varphi\sin\psi,\quad x^2+y^2=e^{2\varphi}=\lambda^2.$$

Значение параметра $\lambda=e^\varphi$, как это и должно быть.

Пример 2. Параболические цилиндры.

Пусть система парабол задана в виде:

$$y^2-2px=k,\qquad \left(y'=\frac{p}{y}\right).$$

Составляя выражение

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{2py}{y^2-p^2}$$

и подставляя в уравнение траекторий (1), получим:

$$\frac{T}{S}=\frac{2py}{y^2-p^2}.$$

Из этого выражения видно, что $S+iT$ не будет функцией $z=x+iy$. Но не нужно упускать из вида, что уравнение траекторий (1) справедливо только на самих траекториях, т. е. когда $\psi=c$. Следовательно, в выражении $\frac{T}{S}$ можно заменить y^2 из уравнения траекторий на $y^2=2px+k$. Получим:

$$\frac{T}{S}=\frac{2py}{2px+k-p^2}.$$

Теперь видим, что

$$S+iT=2p(x+iy)+k-p^2=2pz+k-p^2$$

есть аналитическая функция и можно применить наше уравнение траекторий (21):

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=2pz+k-p^2.$$

Здесь положим $k=p^2$, так как p — произвольный параметр. Интегрирование легко выполняется:

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=2pz,\quad w=\int\frac{dz}{\sqrt{2pz}}=\sqrt{\frac{2z}{p}}.$$

$$pw^2=2z,\quad 2z=p(\varphi+i\psi)^2.$$

Отделяя вещественную и мнимую части

$$x=\frac{p}{2}(\varphi^2-\psi^2), \quad y=p\varphi\psi,$$

находим:

$$\varphi=\frac{y}{p\psi}, \quad x=\frac{p}{2}\left(\frac{y^2}{p^2\psi^2}-\psi^2\right), \quad 2px\psi^2=y^2-p^2\psi^4.$$

Таким образом уравнение ортогональных траекторий будет:

$$y^2=p\psi^2(p\psi^2+2x).$$

Это уравнение действительно определяет ортогональную параболическую сеть.

Пример 3. Эллиптические цилиндры.

Пусть система софокусных эллипсов дана уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

где λ — неизвестный пока параметр. Дифференцируя, найдем:

$$y'=-\frac{\lambda^2-c^2}{\lambda^2}\,\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\theta$$

и

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{2xy}{x^2(\lambda^2-c^2)/\lambda^2-\lambda^2y^2/(\lambda^2-c^2)}.$$

Дифференциальное уравнение траекторий (1) получим в виде:

$$\frac{T}{S}=\frac{2xy}{x^2-y^2-c^2\,[x^2/\lambda^2+y^2/(\lambda^2-c^2)]}.$$

Составляя выражение $S+iT$, убеждаемся, что оно не будет функцией z. Но так как уравнение (1) справедливо только на самих траекториях, где $\psi=C$, то, подставляя в найденное выражение $\frac{T}{S}$

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

будем иметь:

$$\frac{T}{S}=\frac{2xy}{x^2-y^2-c^2}.$$

Из этого же выражения видим, что $T+iS$ есть функция z:

$$S+iT=x^2-y^2-c^2+2ixy=(x+iy)^2-c^2,$$

и, таким образом, дифференциальное уравнение траекторий (21) дает

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=z^2-c^2, \quad w=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-c^2}}, \quad z=c\operatorname{ch}w,$$

$$x+iy=c\operatorname{ch}(\varphi+i\psi).$$

Разделяя вещественную и мнимую части, найдем:

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\varphi\cos\psi,\quad y = c\,\mathrm{sh}\,\varphi\sin\psi,$$

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2\varphi}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2\varphi}=c^2,$$

т. е. параметр $\lambda = \mathrm{ch}\,\varphi$. Эти выражения параметров λ действительно получены Ламе.

Пример 4. Общий вид конического сечения.

Пусть задано коническое сечение:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=k.$$

Дифференцируя это уравнение, найдем:

$$ax+by+d+y'(bx+cy+e)=0.$$

Составляем выражение:

$$\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{-2(ax+by+d)(bx+cy+e)}{(bx+cy+e)^2-(ax+by+d)^2},$$

или, согласно (17),

$$\frac{T}{S}=\frac{-2\,[abx^2+bcy^2+de+(ac+b)^2xy+(ae+bd)x+(be+dc)y]}{(b^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)y^2+e^2-d^2+2(bc-ab)xy+2(be-ad)x+2(ce-bd)y}.$$

Это выражение не приводит к аналитической функции $S+iT$; поэтому, пользуясь заданным уравнением конического сечения, в числителе $\frac{T}{S}$ заменяем ax^2+cy^2, а в знаменателе $2b(c-a)xy$ через другие члены уравнения конического сечения. Получим:

$$\frac{T}{S}=\frac{2(b^2-ac)xy+2(bd-ae)x+2(be-cd)y+2(bf-de-bk)}{(b^2-ac)(x^2-y^2)+2(be-dc)x+2(ae-bd)y+e^2-d^2+(a-c)(f-k)}.$$

Теперь видим, что $S+iT$ будет функцией переменного $z=x+iy$:

$$S+iT=(b^2-ac)z^2+2\,[be-dc+(bd-ae)i]\,z+$$
$$+[e^2-d^2+(a-c)(f-k)+2i(bf-de-bk)],$$

и из дифференциального уравнения ортогональных траекторий (21) имеем:

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=Az^2+Bz+C,\qquad w=\int\frac{dz}{\sqrt{Az^2+Bz+C}}.$$

Здесь значения постоянных таковы:

$$A=b^2-ac,$$
$$B=2\,[be-dc+(bd-ae)i],$$
$$C=e^2-d^2+(a-c)(f-k)+2i(bf-de-bk).$$

После интегрирования и разделения комплексных частей получим в общем виде связь параметра φ с коэффициентами конического сечения.

3. Другой вид представления дифференциального уравнения траекторий напряжения

В формуле (21) мы дали представление ортогональных траекторий посредством производной $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$. Во многих случаях удобнее, однако, исходить из производной $\frac{dw}{dz}$. Если взять эту производную

$$\frac{dw}{dz}=u-iv=Ve^{-i\theta}, \tag{22}$$

где

$$u=V\cos\theta,\ v=V\sin\theta,$$

то для уравнения ортогональной траектории:

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{T}{S},\quad \cos 2\theta=\frac{S}{\sqrt{S^2+T^2}},\quad \sin 2\theta=\frac{T}{\sqrt{S^2+T^2}},$$

найдем:

$$e^{-2i\theta}=\frac{S-iT}{\sqrt{S^2+T^2}}.$$

С другой же стороны, из (22)

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=V^2e^{-2i\theta},$$

следовательно,

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=V^2\frac{S-iT}{\sqrt{S^2+T^2}}.$$

Если положить

$$S-iT=Re^{-i\Phi},$$

то

$$V^2=\sqrt{S^2+T^2}=R,\ V=\sqrt{R},$$

$$V^2e^{-2i\theta}=S-iT=Re^{-i\Phi},\quad \theta=\frac{\Phi}{2}.$$

Все эти условия выполняются, и мы имеем новое дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=S-iT. \tag{23}$$

Возьмем, например, систему круглых цилиндров:

$$x^2+y^2=\lambda.$$

Дифференциальное уравнение траекторий

$$\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2xy/r^4}{(x^2-y^2)/r^4}=\frac{T}{S}$$

согласно уравнению (23) напишется в виде:

$$S-iT=\frac{x^2-y^2-2ixy}{r^4}=\frac{1}{z^2}.$$

Мы здесь должны были разделить числителя и знаменателя дроби $\frac{T}{S}$ на r^4, чтобы получить комплексную переменную, так как

$$\frac{x-iy}{r^2}=\frac{1}{z}.$$

Теперь получим согласно (23):

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{1}{z^2}.$$

Интегрирование немедленно выполняется и дает тот же интеграл траектории, что и раньше:

$$w=\int\frac{dz}{z}=\log z.$$

4. Главные случаи нагрузки полуплоскости

Прежде чем рассматривать траектории напряжений для наиболее общего случая нагрузки на полуплоскости, исследуем отдельные важнейшие случаи нагрузок, имеющие особое значение в технике.

а) Сосредоточенная сила на краю.

Эта нагрузка, как известно, характеризуется следующими напряжениями:

$$\sigma_x=\frac{2}{\pi}F\frac{x^2y}{r^4},\quad \sigma_y=\frac{2}{\pi}F\frac{y^3}{r^4},\quad \tau=\frac{2}{\pi}F\frac{xy^2}{r^4}. \tag{24}$$

Дифференциальное уравнение траекторий напряжений дается выражением:

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\tau}{\sigma_x-\sigma_y},$$

которое на основании данных будет иметь вид:

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{xy/r^4}{(x^2-y^2)/r^4}. \tag{25}$$

Мы здесь сократили общий множитель $2Fy/\pi$, но оставили $1/r^4$. Поэтому в рассматриваемом случае:

$$S-iT=\frac{x^2-y^2-2ixy}{r^4}=\frac{1}{z^2}, \tag{26}$$

и дифференциальное уравнение траекторий и его интеграл будут:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{1}{z^2},\quad w=\int\frac{dz}{z}=\log z. \tag{27}$$

Таким образом в случае одной сосредоточенной силы распределение траекторий напряжений представляет картину истокообразного течения.

б) Нагрузка на краю полуплоскости несколькими сосредоточенными силами.

Если задано на краю несколько нормальных сил F_1, F_2, ..., то напряжения от них выразятся формулами:

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi}\left(F_1 \frac{x_1^2 y}{r_1^4} + F_2 \frac{x_2^2 y}{r_2^4} + \cdots\right), \tag{28}$$

где координаты x_1, x_2, ... отсчитываются от точек приложения сил.

Опуская общий множитель $2y/\pi$ и составляя $S - iT$, получим из (23) дифференциальное уравнение для определения траекторий напряжений:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{F_1}{z_1^2} + \frac{F_2}{z_2^2} + \frac{F_3}{z_3^2} + \cdots \tag{29}$$

или

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{\frac{F_1}{(z-a)^2} + \frac{F_2}{(z-a_2)^2} + \frac{F_3}{(z-a_3)^2} + \cdots}, \tag{30}$$

где a_1, a_2, a_3, ... — точки приложения сосредоточенных сил на краю полуплоскости.

Уравнение траекторий получается весьма сложное и, как видно из выражения интеграла

$$w = \int \sqrt{\frac{F_1}{(z-a_1)^2} + \frac{F_2}{(z-a_2)^2} + \cdots}\, dz, \tag{31}$$

при сложении отдельных нагрузок F_1, F_2, ... траектории напряжений не складываются.

в) Равномерная нагрузка на грани полуплоскости.

Положим, что на краю полуплоскости от точки $x = -a$ до точки $x = a$ приложено постоянное давление. В этом случае направления главных напряжений, определяемые формулой (17)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2X_y}{X_x - Y_y},$$

выразятся так (см. Колосов, стр. 104 указанной книги):

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} = \frac{T}{S}.$$

Составляя выражение:

$$S + iT = x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy = z^2 - a^2,$$

получим искомое дифференциальное уравнение траекторий:

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = z^2 - a^2,$$

и, интегрируя, найдем:

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad z = a \operatorname{ch} w.$$

Отделяя вещественную и мнимую часть:

$$x + iy = a \operatorname{ch}(\varphi + i\psi), \quad x = a \operatorname{ch}\varphi \cos\psi, \quad y = a \operatorname{sh}\varphi \sin\psi,$$

найдем уравнения траекторий напряжения:

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\varphi}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\varphi}=a^2, \quad \frac{x^2}{\cos^2\psi}-\frac{y^2}{\sin^2\psi}=a^2$$

сеть софокусных эллипсов и гипербол, что было найдено Мичелем сложным путем.

Для этой же нагрузки мы рассмотрим еще, следуя Миура, траектории главных касательных напряжений. Как указывает Миура (на стр. 58 своей книги), изоклины для них даются соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\Phi_2=\frac{x}{y}.$$

Получаемое дифференциальное уравнение траекторий

$$\frac{2\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{x}{y}$$

Миура интегрирует сложным путем (подстановкой $y/x=t$) и находит интеграл:

$$y=\frac{x^2}{2c}-\frac{c}{2}$$

параболу с параметром $2c$.

Применяя наше уравнение (21), имеем:

$$\frac{2\tau}{\sigma_y-\sigma_x}=-\frac{x}{y},$$

и из дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=-y+ix=iz$$

немедленно следует:

$$w=\int\frac{dz}{\sqrt{iz}}, \quad iw=2\sqrt{iz}, \quad -w^2=4iz$$

$$-(\varphi+i\psi)^2=4i(x+iy).$$

Отделяя вещественную и мнимую части

$$-(\varphi^2-\psi^2+2i\varphi\psi)=4ix-4y,$$

получим уравнение траекторий:

$$y=\frac{1}{4}(\varphi^2-\psi^2), \quad x=-\frac{1}{2}\varphi\psi.$$

Исключая φ, придем к результату Миуры:

$$y=\frac{x^2}{\psi^2}-\frac{\psi^2}{4}.$$

Однако для построения всей сети траекторий лучше исходить из основного закона отображения

$$4z=iw^2,$$

так как это построение несравненно проще, чем предлагаемое Миурой посредством изоклин.

г) Нагрузка на полуплоскость по трапеции.

Этот случай имеет большое значение в строительной механике грунта.[1] Пусть на участке шириной $2b$ приложена нагрузка по линейному закону $r = kx + p_0$. Как указано в упомянутом труде, напряжения выражаются так:

$$\frac{N_1 - N_2}{2} = \frac{y}{\pi}\left\{2b\,\frac{2kxy + (kx + p_0)(x^2 - b^2 - y^2)}{(x^2 - b^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} + \frac{k}{2}\log\frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2}\right\},$$

$$T = \frac{y}{\pi}\left\{2by\,\frac{2(kx + p_0)x - k(x^2 - b^2 - y^2)}{(x^2 - b^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - K\operatorname{arc\,tg}\frac{2by}{x^2 - b^2 - y^2}\right\}.$$

Составляя выражение $N_1 - N_2 + 2iT$, после преобразований найдем:

$$N_1 - N_2 + 2iT = \frac{2y}{\pi}\left\{2b\,\frac{kz + p_0}{z^2 - b^2} + k\log\frac{z-b}{z+b}\right\}.$$

Так как общий множитель $\frac{2y}{\pi}$ числителя и знаменателя дроби $\frac{2T}{N_1 - N_2}$ можно опустить, то согласно (23) получим дифференциальное уравнение траекторий напряжений:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 2b\,\frac{kz + p_0}{z^2 - b^2} + k\log\frac{z-b}{z+b},$$

а следовательно, и уравнение самих траекторий напряжений:

$$w = \int\sqrt{2b\,\frac{kz + p_0}{z^2 - b^2} + k\log\frac{z-b}{z+b}}\,dz.$$

Сложность этого выражения показывает, что другим способом к интегрированию этих траекторий нельзя было бы притти.

Заметим, что два последних примера в) и г) могут быть легко получены уже из найденной нами формулы (29) для ряда сосредоточенных сил, если считать, что приложенная сила изменяется по заданному закону. Очевидно, вместо (30) получим:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \int\frac{F\,da}{(z-a)^2}. \tag{32}$$

Таким образом, если нагрузка F постоянна, найдем:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = F\int_{-a}^{+a}\frac{da}{(z-a)^2} = \frac{2aF}{z^2 - a^2},$$

что совпадает с найденной нами формулой по данным напряжениям для этого случая.

Для нагрузки же по линейному закону получим:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \int_{-a}^{+a}\frac{Fs\,ds}{(z-s)^2} = F\left[\frac{2az}{z^2 - a^2} + \log\frac{z-a}{z+a}\right],$$

[1] Труды ВИОС, Москва, 1934.

что соответствует формуле, полученной из заданных напряжений непосредственно.

д) Нагрузка на участок полуплоскости по параболическому закону.

Мы рассмотрим еще важный случай нагрузки на полуплоскость по параболе, приведенный в том же сборнике ВИОСС. В этом случае напряжения вычислены в следующем виде:

$$\frac{N_1-N_2}{2}=2y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2by}{x^2-b^2+y^2}-xy\log\frac{(x-b)^2+y^2}{(x+b)^2+y^2}-4by,$$

$$T=2xy \operatorname{arc\,tg} \frac{2by}{x^2-b^2+y^2}+y^2\log\frac{(x-b)^2+y^2}{(x+b)^2+y^2}.$$

После преобразований для N_1-N_2-2iT найдем:

$$N_1-N_2-2iT=-\frac{2p_0}{\pi b^2}\left[yz\log\frac{z-b}{z+b}+2by\right].$$

Опуская общий множитель $2p_0y/\pi b^2$, получим согласно (23) дифференциальное уравнение траекторий:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=2b+z\log\frac{z-b}{z+b},$$

а затем и уравнение траекторий:

$$w=\int\sqrt{2b+z\log\frac{z-b}{z+b}}\,dz,$$

которое не может быть упрощено. Полученное решение легко можно проверить по общей формуле (32). В этом случае приходим к интегралу

$$\int\limits_{-b}^{+b}\frac{b^2-s^2}{(z-s)^2}ds=b\int\limits_{-1}^{+1}\frac{1-t^2}{(z_1-t)^2}dt,\quad (s=bt,\ z=bz_1),$$

интегрирование которого приводит к вышенайденному выражению для $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$.

5. Общий случай радиальнолучевого распределения напряжений

В связи с найденными траекториями напряжений для сосредоточенной силы необходимо рассмотреть этот общий случай, характеризуемый тем, что существует только радиальное напряжение R_r как функция одного радиуса

На основании общей теории плоской задачи (см. Колосов) в этом случае будет:

$$X_x-Y_y+2iX_y=R_r\cos 2\theta+iR_r\sin 2\theta.$$

Заменяя здесь $\cos\theta=x/r$, $\sin\theta=y/r$, найдем:

$$X_x-Y_y-2iX_y=R_r\frac{x^2-y^2-2ixy}{r^2}.$$

Для возможности применения нашего метода вводим множитель r^2:

$$X_x-Y_y-2iX_y=R_r r^2\frac{x^2-y^2-2ixy}{r^4}=R_r r^2\frac{1}{z^2}. \tag{33}$$

Согласно развитой теории общий множитель $R_r r^2$ может быть опущен, и дифференциальное уравнение траекторий

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{1}{z^2}, \quad w = \log z \tag{33'}$$

дает ту же картину истокообразного течения.

Здесь

$$R_r r^2 = Ax + By.$$

Действительно, в данном случае

$$X_x + Y_y = R_r, \qquad \Delta (X_x + Y_y) = \Delta R_r = 0,$$

следовательно,

$$R_r = A\frac{x}{r^2} + B\frac{y}{r^2},$$

так как x/r^2 и y/r^2 — гармонические функции.

Таким образом для определения траекторий напряжений в случае силы, приложенной к углу плоского клина, на основании выражения (33) будет служить то же дифференциальное уравнение (33'), т. е. *траектории напряжений в случае силы, приложенной, как угодно, к вершине плоского клина, распределяются в виде истокообразного течения.*

6. Касательная сила в точке грани полуплоскости

Из выражения напряжений в этом случае:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{2F}{\pi}\left(\frac{-iy}{(z-s)^2} + \frac{1}{z-s}\right) = \frac{2F(x-s)}{\pi}\frac{1}{(z-s)^2}, \tag{34}$$

где F — данная касательная сила в точке s.

Согласно изложенной теории общий множитель $2F(x-s)/\pi$ можно опустить, и дифференциальное уравнение траекторий напряжений и его интеграл будут:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{1}{(z-s)^2}, \quad w = \log(z-s), \tag{35}$$

т. е. *и в случае действия одной касательной силы мы имеем истокообразное распределение траекторий главных напряжений.*

Легко решается также случай двух равных и противоположных касательных сил. Пусть в точке s_1 приложена сила F, а в точке s_2 сила $-F$. Получаем такое выражение:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{2F}{\pi}\left[\frac{1}{z-s_1} - \frac{1}{z-s_2} - \frac{iy}{(z-s_1)^2} + \frac{iy}{(z-s_2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2F(s_1-s_2)}{\pi}\frac{[(z-s_1)(z-s_2) - iy(2z-s_1-s_2)]}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2}.$$

Выражение в квадратных скобках легко упрощается. Окончательно получим:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{2F(s_1 - s_2)}{\pi} \frac{x^2 + y^2 - x(s_1 + s_2) + s_1 s_2}{(z - s_1)^2 (z - s_2)^2}.$$

Если опустить все множители, не зависящие от z, то получим дифференциальное уравнение согласно (23):

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{1}{(z - s_1)^2 (z - s_2)^2}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{(z - s_1)(z - s_2)},$$

и его интеграл

$$w = \int \frac{dz}{(z - s_1)(z - s_2)}, \quad w = \frac{1}{s_2 - s_1} \log \frac{z - s_2}{z - s_1}$$

дает *распределение траекторий напряжений в виде истокообразного течения с двумя источниками.*

7. Общий случай нагрузки какими угодно силами на границе полуплоскости

В случае задания на границе полуплоскости нагрузок

$$X_y = f_1(x), \quad Y_y = f_2(x);$$

исходя из основного уравнения плоской задачи

$$2X_y + 2i[(\lambda + \mu)\Delta - Y_y] = -y\Phi'(z) + F(z),$$

получим выражение для самой общей нагрузки на краю полуплоскости:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = \frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s) + if_2(s)}{(s - z)^2} ds - \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s)}{s - z} ds. \tag{36}$$

В том случае, когда на полуплоскости действует только нормальная нагрузка $f_2(s) = Y_y$, $f_1(s) = 0$, из (36), опуская множитель $2y/\pi$, получаем дифференциальное уравнение траекторий напряжения:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s)\,ds}{(s - z)^2}, \tag{37}$$

и, следовательне, для этого весьма общего случая нагрузки полуплоскости какими угодно нормальными силами уравнение траекторий напряжений будет:

$$w = \int \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s)\,ds}{(s - z)^2}}\, dz. \tag{38}$$

8. Нагрузка полуплоскости парою сил на краю

В этом случае напряжения в полярных координатах:

$$R_r = \Theta_0 = 0, \quad R_0 = -\frac{M}{2\pi r^2}.$$

Составляя

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{r^2}{z^2}(R_r - \Theta_0 - 2iR_0) = \frac{r^2}{z^2} \frac{2iM}{2\pi r^2},$$

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{iM}{\pi} \frac{1}{z^2} \tag{39}$$

и опуская множитель iM/π, получим дифференциальное уравнение траекторий напряжений и их уравнение

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{1}{z^2}, \quad w = \log z,$$

т. е. имеем *истокообразное распределение траекторий.*

Заметим, что в этом случае, как видно из (39), распределение траекторий дает также и величину напряжений $X_y, (X_x - Y_y)/2$, так что *для полного решения задачи можно обойтись только одной диаграммой траекторий напряжений.*

В общем случае, когда нагрузка моментами на краю полуплоскости задана по любому закону $M(s)$, для точки $x = s$ из выражения

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{iM(s)}{\pi} \frac{1}{(z-s)^2}$$

получим суммированием дифференциальное уравнение траекторий:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \int \frac{M(s)\,ds}{(z-s)^2}, \tag{40}$$

откуда следует уравнение траекторий.

9. Нахождение траекторий напряжений для общего случая нагрузки на окружности

Положим, что на окружности $r = R$ приложена нагрузка

$$R_\theta = f_1(\theta), \quad R_r = f_2(\theta).$$

Для общего решения плоской задачи в полярных координатах

$$(R_r - \Theta_\theta - 2iR_\theta)\, r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \Phi'(\zeta) - iF(\zeta)$$

получаем, по Колосову, следующее решение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} [f_2(\varphi) + if_1(\varphi)]\, d\varphi,$$

$$(R_r - \Theta_\theta - 2iR_\theta)\, r^2 = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\, \Phi'(\zeta) - \frac{iR^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} f_1(\varphi)\, d\varphi. \tag{41}$$

Из этого решения составляем нужное нам выражение:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = \frac{1}{2}(R^2 - r^2) \frac{\Phi'(\zeta)}{z^2} - \frac{iR^2}{\pi z^2} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} f_1(\varphi)\, d\varphi, \tag{42}$$

и, преобразуя его в полярные координаты, получим:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = e^{-2i\theta}(R_r - \Theta_\theta - 2iR_\theta) = \frac{r^2}{z^2}(R_r - \Theta_\theta - 2iR_\theta),$$

причем $\Phi'(\zeta) = z\,\Phi'(z)$, так как $\zeta = \log z$.

Если на круг действует только нормальная нагрузка $f_2(\varphi)=R_r, f_1(\varphi)=R_\theta=0$, то из выражения (42), опуская множитель $\frac{1}{2}(R^2-r^2)$, получим дифференциальное уравнение траекторий напряжений:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{\Phi'(\zeta)}{z^2}=\frac{1}{z}\Phi'(z)$$

или, подставляя выражение $\Phi(z)$:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{1}{z}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f_2(\varphi)\,Re^{i\varphi}\,d\varphi}{(Re^{i\varphi}-z)^2}. \tag{43}$$

Отсюда легко найдется общий интеграл, т. е. уравнение траекторий в случае самой общей нагрузки на окружности нормальными силами.

Рассмотрим несколько частных случаев нормальной нагрузки.

Пусть к кругу приложены две противоположные силы P по горизонтальной оси, т. е. для $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Согласно (42) будем иметь:

$$X_x-Y_y-2iX_y=\frac{1}{\pi}\frac{R^2-z^2}{z}\left(\frac{PR}{(R-z)^2}-\frac{PR}{(R+z)^2}\right)=\frac{4PR^2(R^2-r^2)}{\pi(R^2-z^2)^2}.$$

Следовательно, опуская множитель, не зависящий от z, получим дифференциальное уравнение траекторий и его интеграл

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{1}{(R^2-z^2)^2},\quad \frac{dw}{dz}=\frac{1}{R^2-z^2},\quad w=\frac{1}{2R}\log\frac{R+z}{R-z}, \tag{44}$$

т. е. *распределение траекторий имеем в виде истокообразного течения с двумя источниками равной мощности в точках* $z=R$ *и* $z=-R$.

Рассмотрим еще случай четырех попарно симметричных и противоположных сил, нормально действующих на круг. К прежнему выражению $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ из (44) добавится такой же член, составленный из нагрузок в $z=iR$ и $z=-iR$:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=\frac{1}{(R^2-z^2)^2}-\frac{1}{(R^2+z^2)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{dw}{dz}=\frac{2Rz}{(R^2-z^2)(R^2+z^2)},\quad w=\frac{1}{2}\log\frac{R^2+z^2}{R^2-z^2}.$$

Здесь *распределение траекторий также истокообразное с четырьмя источниками в точках приложения сил.*

THEORIE DER HAUPTSPANNUNGSTRAJEKTORIÊN

A. P. CZEREVKOV
(Krasnodar)

(Zusammenfassung)

Die Differentialgleichung der Hauptspannungstrajektorien des ebenen Problems der Elastizität

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta, \quad \text{für} \quad \operatorname{tg} 2\theta=\frac{2\tau}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{MT}{MS}$$

führt zu einer Integraldarstellung

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=S-iT,$$

falls $S-iT$ eine analytische Funktion von z wird.

Auf Grund einer allgemeinen Lösung des ebenen Problems bei Normalbelastung

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}-i\tau=Mf(z),$$

gibt diese Darstellung

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=f(z).$$

Somit wird die Integration leicht ausgeführt

$$w=\varphi+i\psi$$

und die Hauptspannungstrajektorie wird in folgender Form gefunden

$$\psi=C.$$

Dieses Integrationsverfahren wird an die Probleme der Normalbelastung der Halbebene und des Kreises angewendet.