АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЕСТЕСТВЕННО СКРУЧЕННЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ[1]

А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

§ 1. Уравнения Кирхгоффа-Клебша

В этом вводном параграфе мы напоминаем со всей возможной краткостью основные уравнения теории изгиба тонких стержней с целью разъяснить смысл применяемых ныне обозначений.[2]

Будем рассматривать два состояния стержня: 1—естественное и 2—деформированное. В состоянии 1 определим в каждой точке M_0 оси стержня следующую систему осей: за ось z_0 примем касательную к оси стержня, направленную в сторону возрастания дуги s_0, определяющей положение M_0 на оси стержня и отсчитываемой от одного из концов его; за оси x_0 и y_0 примем главные оси инерции поперечного сечения стержня. Пусть система осей x_0, y_0, z_0 двигается так, что ее вершина M_0 имеет скорость, равную 1 ($ds_0 = dt$), а оси x_0, y_0, z_0 занимают в каждый момент описанное выше положение. При этом триедр $M_0 x_0 y_0 z_0$ будет вращаться с угловой скоростью ω_0, проекции которой на оси x_0, y_0, z_0 обозначаем через

$$p_0, q_0, r_0.$$

Здесь p_0 и q_0 представляют кривизны проекций элемента дуги ds_0 на плоскости $y_0 z_0$ и $x_0 z_0$. Через r_0 обозначено кручение стержня, равное:

$$r_0 = \frac{1}{\tau_0} + \frac{d\psi}{ds_0}, \tag{a}$$

[1] Настоящая работа была почти закончена (исключая § 5), когда автору стало известно обширное и весьма интересное исследование С. А. Тумаркина на ту же тему („Равновесие и колебания закрученных стержней". Труды Центрального аэро-гидродинамического института, № 341, 1937 г.). Поскольку в этом исследовании не использованы, по нашему мнению, все возможности максимального упрощения хода решения задачи, опубликование настоящей работы не представляется излишним. В указанной выше работе С. А. Тумаркина достаточно полно рассмотрена также задача о колебаниях естественно скрученного стержня и указаны те видоизменения, которым должны быть подвергнуты методы Релея и Ритца-Галеркина при приближенном определении частот свободных колебаний естественно скрученных стержней

[2] См., например, Е. Л. Николаи, Известия Ленинградского политехнического института, 27, 1918.

где $\frac{1}{\tau_0}$ — кручение оси стержня, а слагаемое $\frac{d\psi}{ds_0}$ характеризует быстроту поворота главных осей инерции поперечного сечения стержня (главные оси инерции двух поперечных сечений, отстоящих одно от другого на расстоянии ds_0, повернуты одно относительно другого на угол $d\psi$).

Точки оси стержня в состоянии 2 располагаются по некоторой кривой, которую назовем деформированной осью. За ось z примем касательную в точке M (направленную в сторону возрастания дуги s) к деформированной оси. Частицы вещества, располагавшиеся в состоянии 1 на главной оси x_0, расположатся в состоянии 2 по некоторой кривой; в плоскости, содержащей ось z и касательную к этой кривой, проведем перпендикулярно оси z ось x; ось y перпендикулярна плоскости xz, и система осей xyz одноименна с системой $x_0 y_0 z_0$.

Будем считать деформации весьма малыми, а ось стержня нерастяжимой ($ds_0 = ds$). Переход от триедра $M_0 x_0 y_0 z_0$ к триедру $Mxyz$ можно осуществить, сообщив точке M_0 перемещение $\overrightarrow{M_0 M}$ и сообщив триедру $M_0 x_0 y_0 z_0$ весьма малый поворот Ω. Проекции векторов $\overrightarrow{M_0 M}$ и Ω на оси $x_0 y_0 z_0$ назовем соответственно через

$$\begin{aligned} &u, \quad v, \quad w, \\ &\alpha, \quad \beta, \quad \gamma. \end{aligned} \tag{b}$$

Между этими величинами имеют место соотношения Клебша:[1]

$$\beta = \dot{u} + q_0 w - r_0 v, \tag{1'}$$

$$-\alpha = \dot{v} + r_0 u - p_0 w, \tag{2'}$$

$$0 = \dot{w} + p_0 v - q_0 u. \tag{3'}$$

Обозначим через ω угловую скорость, которую имеет триедр $Mxyz$, когда вершина его двигается со скоростью 1 вдоль деформированной оси стержня а через p, q, r проекции ω на оси xyz. Пусть далее

$$\delta p = p - p_0, \quad \delta q = q - q_0, \quad \delta r = r - r_0. \tag{c}$$

Вторая группа зависимостей Клебша имеет вид:

$$\delta p = \dot{\alpha} + \gamma q_0 - \beta r_0, \tag{4'}$$

$$\delta q = \dot{\beta} + \alpha r_0 - \gamma p_0, \tag{5'}$$

$$\delta r = \dot{\gamma} + \beta p_0 - \alpha q_0. \tag{6'}$$

Обозначим через $\mathbf{V}$ и $\mathbf{L}$ главный вектор и главный момент внутренних сил в сечении M стержня. Проекции их на оси, т. е.

$$V_x, \quad V_y, \quad V_z, \tag{d}$$

$$L_x, \quad L_y, \quad L_z, \tag{e}$$

представляют перерезывающие силы, растягивающую силу, изгибающие моменты и крутящий момент. Если через $\mathbf{F}$ обозначить вектор внешних распре-

[1] Точками обозначаем дифференцирование по дуге s.

деленных сил, отнесенной к единице длины оси стержня, **K** — вектор внешних распределенных моментов, также отнесенный к единице длины оси стержня, то уравнения статики тонких стержней — уравнения Кирхгоффа — могут быть записаны в виде:

$$\dot{V}_x + qV_z - rV_y + F_x = 0, \tag{7'}$$

$$\dot{V}_y + rV_x - pV_z + F_y = 0, \tag{8'}$$

$$\dot{V}_z + pV_y - qV_x + F_z = 0, \tag{9'}$$

$$\dot{L}_x + qL_z - rL_y - V_y + K_x = 0, \tag{10'}$$

$$\dot{L}_y + rL_x - pL_z + V_x + K_y = 0, \tag{11'}$$

$$\dot{L}_z + pL_y - qL_x + K_z = 0. \tag{12'}$$

К уравнениям (1) — (12), устанавливающим связь между 15 величинами (b) — (e), присоединяются еще три соотношения между величинами, характеризующими внутренние усилия в стержне, и величинами, характеризующими деформацию стержня. Эти соотношения Кирхгоффа имеют вид:

$$L_x = A\delta p, \tag{13'}$$

$$L_y = B\delta q, \tag{14'}$$

$$L_z = C\delta r, \tag{15'}$$

где A и B — жесткости на изгиб, C — жесткость при кручении.

§ 2. Изгиб естественно скрученного стержня с прямолинейной осью силами и парами, приложенными к концам стержня

Поскольку ось стержня в естественном состоянии прямолинейна,

$$p_0 = q_0 = 0, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0, \quad r_0 = \dot{\psi}. \tag{*}$$

По условию задачи имеем далее:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{K} = 0,$$

на концах стержня при $s = 0$ и $s = l$ отсутствуют растягивающая сила и крутящий момент, т. е.

$$V_z^{(0)} = V_z^{(l)} = 0, \quad L_z^{(0)} = L_z^{(l)} = 0. \tag{**}$$

Система уравнений Клебша-Кирхгоффа будет:

$$\beta = \dot{u} - r_0 v, \tag{1}$$

$$-\alpha = \dot{v} + r_0 u, \tag{2}$$

$$0 = \dot{w}; \tag{3}$$

$$\delta p = \dot{\alpha} - \beta r_0, \tag{4}$$

$$\delta q = \dot{\beta} + \alpha r_0, \tag{5}$$

$$\delta r = \dot{\gamma}; \tag{6}$$

$$\dot{V}_x + V_z \delta q - V_y r = 0, \tag{7}$$

$$\dot{V}_y + V_x r - V_z \delta p = 0, \tag{8}$$

$$\dot{V}_z + V_y \delta p - V_x \delta q = 0; \tag{9}$$

$$\dot{L}_x + L_z \delta q - L_y r = V_y, \tag{10}$$

$$\dot{L}_y + L_x r - L_z \delta p = -V_x, \tag{11}$$

$$\dot{L}_z + L_y \delta p - L_x \delta q = 0; \tag{12}$$

$$L_x = A \delta p, \tag{13}$$

$$L_y = B \delta q, \tag{14}$$

$$L_z = C \delta r. \tag{15}$$

Из (12), (13) и (14) находим:

$$\dot{L}_z + (B - A) \delta p \, \delta q = 0$$

и, отбрасывая малые второго порядка, в силу (**):

$$\dot{L}_z = 0, \quad \text{т. е.} \quad L_z = L_z^{(0)} = 0. \tag{16}$$

Из (15) теперь получаем:

$$\delta r = 0, \quad \text{т. е.} \quad r = r_0. \tag{17}$$

Уравнения (10), (11), (13) и (14) теперь дают:

$$V_y = A (\delta p)^{\cdot} - r_0 B \delta q,$$
$$-V_x = B (\delta q)^{\cdot} + r_0 A \delta p,$$

и подстановка в (9) приводит к соотношению:

$$\dot{V}_z + A \delta p (\delta p)^{\cdot} + B \delta q (\delta q)^{\cdot} + r_0 (A - B) \delta p \, \delta q = 0.$$

Пренебрегая малыми второго порядка, найдем в силу (**):

$$\dot{V}_z = 0, \quad V_z = V_z^{(0)} = 0. \tag{18}$$

Уравнениям (1) — (15) теперь можно придать вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_x - r_0 V_y &= 0, \\ \dot{V}_y + r_0 V_x &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}_x - r_0 L_y &= V_y, \\ \dot{L}_y + r_0 L_x &= -V_x; \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= A \delta p, \\ L_y &= B \delta q; \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

$$\begin{aligned}\delta p &= \dot{\alpha} - r_0 \beta,\\ \delta q &= \dot{\beta} + r_0 \alpha;\end{aligned} \tag{IV}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \dot{u} - r_0 v,\\ -\alpha &= \dot{v} + r_0 u.\end{aligned} \tag{V}$$

Введем в рассмотрение следующие комплексные величины:

a) вектор перерезывающей силы:

$$V_x + iV_y = V, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

b) вектор изгибающего момента:

$$L_x + iL_y = L,$$

c) вектор изменения кривизны:

$$\delta p + i\delta q = \delta\omega,$$

d) вектор поворота:

$$\alpha + i\beta = \lambda,$$

e) вектор перемещения:

$$u + iv = \chi.$$

Умножая каждое второе из уравнений (I — V) на i и складывая с первым, получим:[1]

$$\dot{V} + ir_0 V = 0, \tag{I'}$$

$$\dot{L} + ir_0 L = -iV, \tag{II'}$$

$$\delta\omega = \frac{A+B}{2AB} L - \frac{A-B}{2AB} \overline{L}, \tag{III'}$$

$$\dot{\lambda} + ir_0 \lambda = \delta\omega, \tag{IV'}$$

$$\dot{\chi} + ir_0 \chi = -i\lambda. \tag{V'}$$

Рассмотрим оператор дифференцирования:

$$L(f) = \dot{f} + ir_0 f = e^{-i\int\limits_0^s r_0\,ds} \frac{d}{ds} f e^{i\int\limits_0^s r_0\,ds};$$

тогда, вводя обозначение

$$f^* = f e^{i\int\limits_0^s r_0\,ds} = f e^{i\psi(s)},$$

приведем систему (I′) — (V′) к виду:

$$\dot{V}^* = 0, \tag{I*}$$

$$\dot{L}^* = -iV^*, \tag{II*}$$

$$(\delta\omega)^* = \frac{A+B}{2AB} L^* - \frac{A-B}{2AB} \overline{L}^* e^{2i\psi(s)}, \tag{III*}$$

$$\dot{\lambda}^* = \delta\omega^*, \tag{IV*}$$

$$\dot{\chi}^* = -i\lambda^*, \tag{V*}$$

[1] Черточкой над буквой обозначаем переход к сопряженному комплексному числу.

Пусть x^* и y^* — главные оси инерции начального сечения стержня ($s=0$): главные оси инерции в сечении с абсциссой s повернуты относительно осей x^* и y^* на угол $\psi(s)$. Поэтому, если $f=f_x+if_y$ представляет комплексное число, вещественная и мнимая части которого выражают проекции вектора f на оси x и y, то вещественная и мнимая части вектора $f^*=fe^{i\psi(s)}$ будут проекциями того же вектора f на неподвижные оси x^* и y^*. Задача об изгибе естественно скрученного стержня, как показывает сравнение формул (I) — (V) и (I*)—(V*), проще формулируется при переходе к неподвижным осям x^* и y^*, чем во вращающейся системе осей xy.

Система уравнений (I*)—(V*) непосредственно интегрируется. Ограничимся рассмотрением случая постоянных A и B. Получим:

$$\left.\begin{aligned}
&V^*=V_0^*,\\
&L^*=L_0^*-iV_0^*s,\\
&\lambda^*=\frac{A+B}{2AB}\left(L_0^*s-iV_0^*\frac{s^2}{2}\right)-\frac{A-B}{2AB}\int\limits_0^s(\overline{L}_0^*+i\overline{V}_0^*s_1)e^{2i\psi(s_1)}ds_1+\lambda_0^*,\\
&\chi^*=\chi_0^*-i\lambda_0^*s-i\frac{A+B}{2AB}\left(L_0^*\frac{s^2}{2}-iV_0^*\frac{s^3}{6}\right)+\\
&\qquad+i\frac{A-B}{2AB}\int\limits_0^s ds_1\int\limits_0^{s_1}(\overline{L}_0^*+i\overline{V}_0^*s_2)e^{2i\psi(s_2)}ds_2.
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

В этих формулах индексом нуль обозначены значения соответствующих величин в сечении $s=0$. Конечно, первые две формулы непосредственно следуют из простейших предложений статики.

Выражение для смещения χ^* может быть представлено в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\chi^*=\chi_0^*-i\lambda_0^*s-i\frac{A+B}{2AB}\left(L_0^*\frac{s^2}{2}-iV_0^*\frac{s^3}{6}\right)+i\frac{A-B}{2AB}\left(\overline{L}_0^*\frac{s^2}{2}+i\overline{V}_0^*\frac{s^3}{6}\right)-\\
&\qquad-i\frac{A-B}{2AB}\int\limits_0^s ds_1\int\limits_0^{s_1}(\overline{L}_0^*+i\overline{V}_0^*s_2)(1-e^{2i\psi(s_2)})ds_2,
\end{aligned}\right\}\quad (A')$$

причем последнее слагаемое выражает влияние скрученности стержня на изгиб.

§ 3. Изгиб естественно скрученного стержня силами, распределенными вдоль его оси. Частный случай консольного стержня

Сохраняем все предположения § 2, кроме предположения об обращении в нуль F_x и F_y. Для упрощения письма отбросим еще звездочки над комплексными числами так, что, например, теперь L, χ и т. д. обозначают комплексные числа, вещественная и мнимая части которых представляют проекции векторов на оси инерции начального сечения стержня.

Система уравнений (I*) — (V*) § 2 примет теперь вид:

$$\dot{V}+F=0, \tag{I}$$

$$\dot{L}=-iV,$$

$$\delta\omega=\frac{A+B}{2AB}L-\frac{A-B}{2AB}\overline{L}e^{2i\psi(s)}, \tag{III}$$

$$\delta\omega=\dot{\lambda}, \tag{IV}$$

$$\dot{\chi}=-i\lambda. \tag{V}$$

Интегрируя, получим:

$$V=-\int_0^s F\,ds+V_0,$$

$$L=i\int_0^s (s-s_1)F(s_1)\,ds_1+V_0 s+L_0,$$

$$\lambda=\frac{A+B}{2}\left[L_0 s+V\frac{s^2}{2}+i\int_0^s \frac{(s-s_1)^2}{2}F(s_1)\,ds_1\right]+\lambda_0-$$

$$-\frac{A-B}{2AB}\left[\int_0^s(\overline{L}_0+i\overline{V}_0 s_1)e^{2i\psi(s_1)}\,ds_1-i\int_0^s e^{2i\psi(s_1)}\,ds_1\int_0^{s_1}(s_1-s_2)\overline{F}(s_2)\,ds_2\right], \tag{B}$$

$$\chi=\chi_0-i\lambda_0 s-i\frac{A+B}{2AB}\left[L_0\frac{s^2}{2}+V_0\frac{s^3}{6}+i\int_0^s\frac{(s-s_1)^3}{6}F(s_1)\,ds_1\right]+$$

$$+i\frac{A-B}{2AB}\left[\int_0^s(\overline{L}_0+i\overline{V}_0 s_1)e^{2i\psi(s_1)}(s-s_1)\,ds_1-\right.$$

$$\left.-i\int_0^s e^{2i\psi(s_1)}(s-s_1)\,ds_1\int_0^{s_1}(s_1-s_2)\overline{F}(s_2)\,ds_2\right].$$

Рассмотрим случай консольного стержня; в этом случае

$$V_0=0,\quad L_0=0;\quad \lambda(l)=\chi(l)=0. \tag{*}$$

Для краткости введем обозначение

$$\int_0^s(s-s_1)F(s_1)\,ds_1=\Phi(s). \tag{**}$$

Из (B) после некоторых преобразований получим:

$$\lambda=\lambda_0+i\frac{A+B}{2AB}\int_0^s\Phi(s_1)\,ds_1+i\frac{A-B}{2AB}\int_0^s e^{2i\psi(s_1)}\overline{\Phi}(s_1)\,ds_1,$$

$$\chi=\chi_0-i\lambda_0 s+\frac{A-B}{2AB}\int_0^s(s-s_1)\Phi(s_1)\,ds_1+\frac{A-B}{2AB}\int_0^s e^{2i\psi(s_1)}(s-s_1)\Phi(s_1)\,ds_1.$$

Определив λ_0 и χ_0 из краевых условий (*), найдем:

$$\chi = \frac{A+B}{2AB}\int_s^l \Phi(s_1)(s_1 - s)\,ds_1 + \frac{A-B}{2AB}\int_s^l \overline{\Phi}(s_1)\,e^{2i\psi(s_1)}(s - s_1)\,ds_1. \qquad (B_1)$$

В качестве примера решим задачу об изгибе консольного стержня сосредоточенной силой $Q = Q_x + iQ_y$, * расположенной в сечении t. Мы можем написать в данном случае:

$$F(s_1) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s_1 < t - \varepsilon \\ \dfrac{Q}{2\varepsilon} & \quad „ \quad t - \varepsilon < s_1 < t + \varepsilon \\ 0 & \quad „ \quad t + \varepsilon < s_1. \end{cases}$$

Пусть $s < t - \varepsilon$. Тогда в (**) $s_1 < t - \varepsilon$ и $\Phi(s) = 0$. Если же $s > t + \varepsilon$, то в (**)

$$\int_0^s = \int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{s} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$\Phi(s) = \frac{Q}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}(s - s_1)\,ds_1 \approx (s - t)\,Q.$$

Получаем, таким образом, при $\varepsilon \to 0$:

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s \leqslant t \\ Q(s - t) & \text{при} \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

Подстановка в (B_1) теперь дает:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{A+B}{2AB}\,Q\displaystyle\int_t^l (s_1 - t)(s_1 - s)\,ds_1 + \dfrac{A-B}{2AB}\,\overline{Q}\displaystyle\int_t^l e^{2i\psi(s_1)}(s_1 - t)(s_1 - s)\,ds_1 & \text{при } s < t \\ \dfrac{A+B}{2AB}\,Q\displaystyle\int_s^l (s_1 - t)(s_1 - s)\,ds_1 + \dfrac{A-B}{2AB}\,\overline{Q}\displaystyle\int_s^l e^{2i\psi(s_1)}(s_1 - t)(s_1 - s)\,ds_1 & \text{при } s > t. \end{cases} \qquad (1)$$

В частности, в случае силы, приложенной к концу стержня $(t = 0)$, находим при постоянной степени кручения r_0:

$$\chi = \frac{A-B}{2AB}\,Q\left(\frac{l^3}{3} - \frac{sl^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) +$$
$$+ \frac{A-B}{2AB}\,\overline{Q}\left[e^{2ir_0 l}\left(\frac{i}{4r_0^3} + \frac{l}{2r_0^2} - \frac{il^2}{2r_0} - \frac{s}{4r_0^2} + \frac{ils}{2r_0}\right) - e^{2ir_0 s}\left(\frac{i}{4r_0^3} + \frac{s}{4r_0^2}\right)\right], \qquad (2)$$

откуда при $s = 0$ получаем выражение для прогиба свободного конца:

$$\chi_0 = f_1 Q + f_2\,\overline{Q}\,(a + ib) = f_1 Q + f_2\,\overline{Q}\,\sqrt{a^2 + b^2}\,e^{i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}}, \qquad (3)$$

* Т. е. $Q^* = Q_{x^*} + iQ_{y^*}$ в обозначениях § 2.

где введены обозначения:

$$f_1 = \frac{A+B}{2AB}\frac{l^3}{3}, \quad f_2 = \frac{A-B}{2AB}\frac{l^3}{2}, \tag{4}$$

$$a+ib = e^{2i\psi}\left(\frac{i}{2\psi^3}+\frac{1}{\psi^2}-\frac{i}{\psi}-\frac{ie^{-2i\psi}}{2\psi^3}\right) \tag{5}$$

и через ψ обозначен полный угол скрученности $r_0 l$.

Отделив в формуле (3) вещественную и мнимую части, найдем проекции прогиба свободного конца стержня на направление главных осей инерции этого сечения (x^* и y^*).

Пусть сила Q составляет угол λ с осью x^*. Из (3) найдем:

$$\frac{\chi_0}{Q} = \frac{1}{\nu} = f_1 + f_2\sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}-2\lambda\right)}. \tag{6}$$

Величина ν будет вещественной при соблюдении условий.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} - 2\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} - 2\lambda = \pi. \tag{7}$$

Таким образом определяются два взаимно перпендикулярных направления (оси сопротивления стержня), приложение сил вдоль которых создает прогиб, имеющий направление силы.[1]

Соответствующие этим направлениям „коэффициенты жесткости" ν определяются из уравнений:

$$\frac{1}{\nu_1} = f_1 + f_2\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{для} \quad \lambda = \lambda_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} \tag{8}$$

и

$$\frac{1}{\nu_2} = f_1 - f_2\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{для} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}. \tag{8'}$$

§ 4. Изгиб естественно скрученных стержней с прямолинейной осью при наличии продольной растягивающей силы

Сохраняя все прочие предположения § 2, кроме предположения об обращении в нуль продольной растягивающей силы, получим вместо (18) § 2:

$$\dot{V}_z = 0, \; V_z = V_z^{(0)} = V^{(l)}.$$

Система (I)—(V) § 2 примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{V}_x + V_z^0\,\delta q - V_y r_0 + F_x = 0,\\ &\dot{V}_y - V_z^0\,\delta p + V_x r_0 + F_y = 0,\end{aligned}\right. \tag{I}$$

$$\dot{L}_x - r_0 L_y = V_y, \; \dot{L}_y + r_0 L_x = -V_x, \tag{II}$$

$$L_x = A\delta p, \; L_y = B\delta q, \tag{III}$$

$$\delta p = \dot{\alpha} - r_0\beta, \; \delta q = \dot{\beta} + r_0\alpha, \tag{IV}$$

$$\beta = \dot{u} - r_0 v, \; -\alpha = \dot{v} + r_0 u. \tag{V}$$

---

[1] См. С. А. Туманкин, loc. cit. стр. 55.

Отсюда, как в § 1, найдем:

$$\dot{V} + r_0 iV - iV_z^0 \delta\omega + F = 0, \tag{I'}$$

$$\dot{L} + r_0 iL = -iV, \tag{II'}$$

$$\delta\omega = \frac{A+B}{2AB} L - \frac{A-B}{2AB} \overline{L}, \tag{III'}$$

$$\dot{\lambda} + ir_0 \lambda = \delta\omega, \tag{IV'}$$

$$\dot{\chi} + ir_0 \chi = -i\lambda. \tag{V'}$$

После перехода к неподвижным осям $x^* y^*$ эта система приведется к виду:

$$\dot{V}^* - iV_z^0 (\delta\omega)^* + F^* = 0, \tag{I*}$$

$$\dot{L}^* = -iV^*, \tag{II*}$$

$$(\delta\omega)^* = \frac{A+B}{2AB} L^* - \frac{A-B}{2AB} \overline{L}^* e^{2i\psi(s)}, \tag{III*}$$

$$\dot{\lambda}^* = \delta\omega, \quad \dot{\chi}^* = -i\lambda^*. \tag{IV*—V*}$$

Комбинируя (I*) и (IV*), найдем:

$$\dot{V}^* - iV_z^0 \dot{\lambda}^* + F^* = 0,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$V^* = iV_z^0 \lambda^* - \int_0^s F^* ds + C_1. \tag{1}$$

Подставляя вместо V^* его значение (II*) и заменяя λ^* согласно (V*), после вторичного интегрирования найдем:

$$L^* = iV_z^0 \chi^* + i \int_0^s (s - s_1) F^*(s_1)\, ds_1 - iC_1 s + C_2. \tag{2}$$

Замечая, что в силу (IV* — V*)

$$(\delta\omega)^* = i\ddot{\chi}^*, \tag{3}$$

получим после подстановки в (III*):

$$\ddot{\chi}^* - \frac{A+B}{2AB} V_z^0 \chi^* - \frac{A-B}{2AB} V_z^0 \overline{\chi}^* e^{2i\psi(s)} = \Phi^*(s), \tag{4}$$

где для краткости принято обозначение:

$$\begin{aligned} \Phi^*(s) = &-i\frac{A+B}{2AB}\left[C_2 - iC_1 s + i\int_0^s (s-s_1) F^*(s_1)\, ds_1\right] + \\ &+ i\frac{A-B}{2AB}\left[\overline{C}_2 + i\overline{C}_1 s - i\int_0^s (s-s_1)\overline{F}^*(s_1)\, ds_1\right] e^{2i\psi(s)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для решения уравнения (4) проще всего вернуться к подвижным осям x и y. При постоянной степени кручения получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Восемь произвольных постоянных (четыре комплексных произвольных постоянных) должны быть определены из краевых условий на концах $s=0$ и $s=l$.

§ 5. Устойчивость естественно скрученного консольного стержня с прямолинейной осью под действием сжимающей силы

Пусть свободному сечению консоли соответствует значение $s=0$. Обозначим через Q сжимающую силу и будем считать, что сила Q сохраняет неизменное (вертикальное, например, направление). В формулах (1) — (5) § 4 нужно положить $F^*=0$, $V_z^0=-Q$. Нетрудно сообразить, что перерезывающая сила при $s=0$ имеет значение:

$$V_0^*=-iQ\lambda_0, \tag{1}$$

где λ_0 — значение поворота при $s=0$. Поэтому в формуле (1) § 4 надо положить $C_1=0$. Замечая далее, что $L_0^*=0$ и называя через χ_0^* прогиб стержня при $s=0$, получим из (2) § 4:

$$C_2=iQ\chi_0^*$$

и, следовательно,

$$L^*=-iQ(\chi^*-\chi_0^*),\quad V^*=-iQ\lambda^*. \tag{2}$$

Для определения χ^* получаем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\chi}^*+\frac{A+B}{2AB}Q\chi^*+\frac{A-B}{2AB}Q\bar{\chi}^*e^{2i\psi(s)}=\frac{A+B}{2AB}Q\chi_0^*+\frac{A-B}{2AB}Q\bar{\chi}_0^*e^{2i\psi(s)}; \tag{3}$$

его общее решение будет иметь вид:

$$\chi^*=\chi_0^*+\chi_a^*,$$

где χ_a^* является общим решением однородного уравнения:

$$\ddot{\chi}_a^*+\frac{A+B}{2AB}Q\chi_a^*+\frac{A-B}{2AB}Q\bar{\chi}_a^*e^{2i\psi(s)}=0. \tag{4}$$

Три комплексных произвольных постоянных (χ_0^* и две постоянных, входящих в χ_a^*) должны быть определены из условий:

$$(\chi_a^*)=0,\quad (\chi_a^*)_{s=l}=-\chi_0^*,\quad (\dot{\chi}_a^*)_{s=l}=0. \tag{5}$$

Рассмотрим в дальнейшем случай постоянной степени кручения ($r_0=\text{const}$, $\psi=r_0s$). Мы получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, совершив в (4) переход к подвижным осям; это уравнение будет иметь вид:

$$\ddot{\chi}_a+2r_0i\dot{\chi}_a+\left(\frac{A+B}{2AB}Q-r_0^2\right)\chi_a+\frac{A-B}{2AB}Q\bar{\chi}_a=0. \tag{6}$$

Отделив вещественную и мнимые части, придем к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{u}_a-2r_0\dot{v}_a+\left(\frac{Q}{B}-r_0^2\right)u_a=0,\quad \ddot{v}+2r_0\ddot{u}_a+\left(\frac{Q}{A}-r_0^2\right)v_a=0. \tag{7}$$

Пусть μ_1^2 и μ_2^2 обозначают корни алгебраического уравнения

$$(\lambda_1-\mu^2)(\lambda_2-\mu^2)-4\mu^2=0, \tag{8}$$

где для краткости положено:

$$\frac{Q}{Br_0^2}=\lambda_1+1, \qquad \frac{Q}{Ar_0^2}=\lambda_2+1. \tag{9}$$

Оба корня μ_1^2 и μ_2^2 положительны, если

$$\lambda_1\lambda_2>0, \tag{10}$$

что в дальнейшем будем предполагать. Получим:

$$u_a=2\mu_1 C_1\cos\mu_1 r_0 s+(\lambda_2-\mu_1^2)D_1\sin\mu_1 r_0 s+2\mu_2 C_2\cos\mu_2 r_0 s+ \\ +(\lambda_2-\mu_2^2)D_2\sin\mu_2 r_0 s,$$

$$v_a=(\lambda_1-\mu_1^2)C_1\sin\mu_1 r_0 s-2\mu_1 D_1\cos\mu_1 r_0 s+(\lambda_1-\mu_2^2)C_2\sin\mu_2 r_0 s- \\ -2\mu_2 D_2\cos\mu_2 r_0 s.$$

Выражая, что $u_a(0)=v_a(0)=0$, т. е. используя первое условие (5), найдем:

$$2\mu_1 C_1=-2\mu_2 C_2=A, \qquad 2\mu_1 D_1=2\mu_2 D_2=-B.$$

Составляя теперь $\chi_a^*=\chi_a e^{ir_0 s}=(u_a+iv_a)e^{ir_0 s}$, получим:

$$\begin{aligned}\chi_a^*=\Big\{A\Big[\Big(\cos\mu_1 r_0 s+\frac{\lambda_1-\mu_1^2}{2\mu_1}i\sin\mu_1 r_0 s\Big)-\\-\Big(\cos\mu_2 r_0 s+\frac{\lambda_1-\mu_2^2}{2\mu_2}i\sin\mu_2 r_0 s\Big)\Big]+iB\Big[\Big(\cos\mu_1 r_0 s+\frac{\lambda_2-\mu_1^2}{2\mu_1}i\sin\mu_1 r_0 s\Big)-\\-\Big(\cos\mu_2 r_0 s+\frac{\lambda_2-\mu_2^2}{2\mu_2}i\sin\mu_2 r_0 s\Big)\Big]\Big\}e^{ir_0 s},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot\chi_a^*=r_0\Big\{Ai\Big[\Big(\frac{2+\lambda_1-\mu_1^2}{2}\cos\mu_1 r_0 s+i\frac{\mu_1^2+\lambda_1}{2\mu_1}\sin\mu_1 r_0 s\Big)-\\-\Big(\frac{2+\lambda_1-\mu_2^2}{2}\cos\mu_2 r_0 s+i\frac{\mu_2^2+\lambda_1}{2\mu_2}\sin\mu_2 r_0 s\Big)\Big]-\\-B\Big[\Big(\frac{2+\lambda_2-\mu_1^2}{2}\cos\mu_1 r_0 s+i\frac{\mu_1^2+\lambda_2}{2\mu_1}\sin\mu_1 r_0 s\Big)-\\-\Big(\frac{2+\lambda_2-\mu_2^2}{2}\cos\mu_2 r_0 s+i\frac{\mu_2^2+\lambda_2}{2\mu_2}\sin\mu_2 r_0 s\Big)\Big]\Big\}e^{ir_0 s}.\end{aligned} \tag{12}$$

Условие обращения в нуль $\dot\chi_a^*(l)$ приводит к системе двух однородных уравнений:

$$\begin{aligned}A\Big(\frac{\mu_2^2+\lambda_1}{\mu_2}\sin\mu_2\psi-\frac{\mu_1^2+\lambda_1}{\mu_1}\sin\mu_1\psi\Big)+\\+B\left[(2+\lambda_2-\mu_2^2)\cos\mu_2\psi-(2+\lambda_2-\mu_1^2)\cos\mu_1\psi\right]=0,\\-A\left[(2+\lambda_1-\mu_2^2)\cos\mu_2\psi-(2+\lambda_1-\mu_1^2)\cos\mu_1\psi\right]+\\+B\Big(\frac{\mu_2^2+\lambda_2}{\mu_2}\sin\mu_2\psi-\frac{\mu_1^2+\lambda_2}{\mu_1}\sin\mu_1\psi\Big)=0,\end{aligned} \tag{13}$$

где через $\psi=r_0 l$ обозначен угол кручения стержня.

Выражая, что определитель системы (13) должен обратиться в нуль и пользуясь соотношениями

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1^2 \mu_2^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 4 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \tag{14}$$

а также уравнением (8), получим после вычислений уравнение для определения критической длины стержня:

$$\left[\frac{k+1-\varepsilon}{2\sqrt{4k(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}} + \frac{1}{2\varepsilon}(1-k-\varepsilon)\right] \cos \sqrt{\left[4k+2\varepsilon\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{4k(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}\right)\right]\frac{Q}{A+B}}\, l -$$
$$-\left[\frac{k+1-\varepsilon}{2\sqrt{4k(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}} - \frac{1}{2\varepsilon}(1-k-\varepsilon)\right] \cos \sqrt{\left[4k+2\varepsilon\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{4k(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}\right)\right]\frac{Q}{A+B}}\, l = 1. \tag{15}$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$\frac{(A+B)\, r_0^2}{Q} = \varepsilon, \quad \frac{(A+B)^2}{4AB} = k. \tag{16}$$

Для трех частных случаев $\varepsilon = 0$, $k = 1$ и $\varepsilon = \infty$ получаем следующие результаты:

1°. $\varepsilon = 0$ (отсутствие скручивания).

Уравнение (16) принимает вид:

$$\cos 2\sqrt{(k-\sqrt{k})\frac{Q}{A+B}}\, l + \cos 2\sqrt{(k+\sqrt{k})\frac{Q}{A+B}}\, l = 0,$$

откуда находим:

$$\cos\sqrt{\frac{Q}{A}}\, l \cdot \cos\sqrt{\frac{Q}{B}}\, l = 0.$$

[Нетрудно проверить, что при $A > B$

$$\left[\sqrt{k+\sqrt{k}} + \sqrt{k-\sqrt{k}}\right]\sqrt{\frac{Q}{A+B}}\, l = \sqrt{\frac{Q}{B}}\, l,$$

$$\left[\sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k-\sqrt{k}}\right]\sqrt{\frac{Q}{A+B}}\, l = \sqrt{\frac{Q}{A}}\, l. \text{]}$$

Получаем известное выражение для критической длины прямолинейного стержня:

$$l_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{B}{Q}}\, \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

2°. $k = 1$, т. е. $A = B$. $l_{\text{кр}}$ должно иметь то же значение (17), так как при $A = B$ изгиб стержня не зависит от первоначального скручивания. Уравнение (16) дает действительно:

$$\cos 2\sqrt{\frac{Q}{B}}\, l = -1,$$

откуда снова находим (17).

3°. При $\varepsilon \to \infty$ (для „бесконечно закрученного стержня“)[1] получаем:

$$\sqrt{\left[4k+2\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon^2+4k(1-\varepsilon)}\,\right]\frac{Q}{A+B}}\approx$$

$$\approx\sqrt{\left[4k+2\varepsilon-2\varepsilon\left(1-\frac{4k}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]\frac{Q}{A+B}}\approx\sqrt{8k\frac{Q}{A+B}}\approx\sqrt{2\frac{Q(A+B)}{AB}},$$

и уравнение (15) получает вид:

$$\cos 2\sqrt{\frac{Q}{Б}}\,l=-1,\quad \text{где}\quad \frac{1}{Б}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right),$$

т. е. стержень ведет себя как нескрученный, имеющий жесткость при изгибе $Б$.

FLEXION AND STABILITY OF NATURALLY TORSIONED RECTILINEAL RODS

A. I. LOURIÉ

(Leningrad)

(Summary)

In the present work the author begins from the Kirchoff-Klebsch's statics equations of the thin rods (§ 1). He transfers these equations to the axes with unchangeable direction. By virtue of the simple form of results (§§ 2 and 3) he obtains the possibility to integrate directly the equations of the thin rod naturally torsioned by the forces perpendicular to its axis.

By the same method, the problem of the thin naturally torsioned rod, in the presence of a longitudinal force, can be deduced to the system of two differential equations of second order, which can be integrated. This system is written in the form one equation (4) § 4.

In the § 5 this equation is applied to the problem of stability of a consol rod under the pressure of compressed force which acts along the axis of the rod.

[1] С. А. Тумаркин, loc. cit., стр. 19.