АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК СРЫВА СТРУЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНКИ

И. М. БЕЛЕНЬКИЙ и И. Е. ЗЕЛЕНСКИЙ

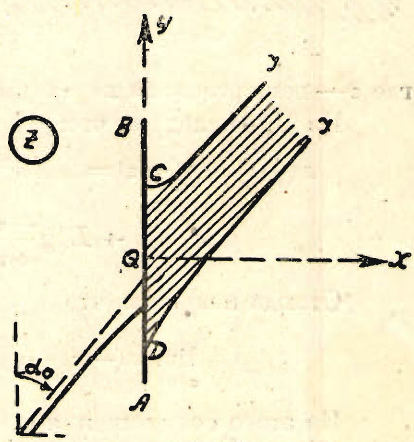
(Харьков)

1. Задача о струйном обтекании пластинки плоско-параллельным потоком идеальной и несжимаемой жидкости, при котором происходит плавное обтекание обеих острых кромок, а струи срываются с задней стороны, была решена.[1]

При этом положение точек отрыва струй не определяется, а просто задается.

Эта статья имеет своей целью установление связи между положением точек отрыва струй и шириной застойной области на бесконечности.

Для этого выпишем формулы, относящиеся к задаче обтекания пластинки по схеме, изображенной на фиг. 1. Решение дается через вспомогательную плоскость t (фиг. 2), где внутренности единичного полукруга соответствует область, занятая движущейся жидкостью плоскости z.[1]



Фиг. 1.

Комплексный потенциал потока равен:

$$f(z) = M\frac{(1-2t\cos\gamma+t^2)^2}{t^2}, \tag{1, 1}$$

где M — некоторая действительная величина, а γ — аргумент точки Q в плоскости t. Величина, обратная комплексной скорости, равна:

$$\frac{dz}{df} = i\,\frac{(t-e^{i\alpha})\,(t-e^{i\beta})\,(1-te^{i\gamma})}{(1-te^{i\alpha})\,(1-te^{i\beta})\,(t-e^{i\gamma})}. \tag{1, 2}$$

Между параметрами α, β, γ и углом α_0 существует соотношение:

$$\alpha+\beta-\gamma=\pi-\alpha_0. \tag{1, 3}$$

[1] См. Беленький И. М. и Зеленский И. Е., К обтеканию пластинки косым потоком по обобщенной схеме Schmieden, ХАИ, 1936 г.

И, наконец, связь между плоскостями z и t имеет вид:

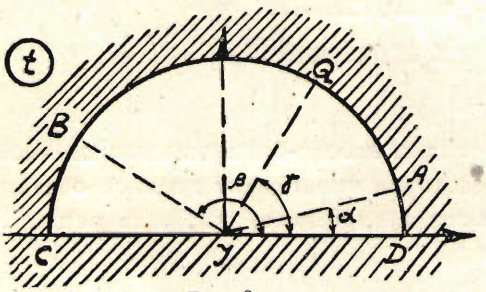
$$z(t) = 2iMe^{i\alpha_0}\left\{\frac{1}{2}t^2 + At + B\lg t - \frac{C}{t} - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{2t^2} + E\lg(t - e^{-i\alpha}) + F\lg(t - e^{-i\beta})\right\} + \text{const}, \quad (1, 4)$$

где A, B, C, D, E и F — постоянные.

Для дальнейшего нам понадобятся значения коэффициентов B и C, которые мы здесь и выпишем:

$$B = -e^{2i\alpha+2i\beta} - 2e^{2i\alpha+i\beta-i\gamma} - 2e^{i\alpha+2i\beta-i\gamma} - e^{i\alpha+i\beta-2i\gamma} - e^{3i\alpha+3i\beta-2i\gamma} +$$
$$+ 2e^{2i\alpha+3i\beta-i\gamma} + 3e^{2i\alpha+2i\beta-2i\gamma} + e^{i\alpha+3i\beta-2i\gamma} - e^{2i\alpha+4i\beta-2i\gamma} + 2e^{3i\alpha+2i\beta-i\gamma} +$$
$$+ e^{3i\alpha+i\beta-2i\gamma} - e^{4i\alpha+2i\beta-2i\gamma}, \quad (1, 5)$$

$$C = -2e^{i\alpha+i\beta-i\alpha_0} + e^{-i\beta-2i\alpha_0} + e^{-i\alpha-2i\alpha_0} - e^{i\beta-2i\alpha_0} - e^{i\alpha-2i\alpha_0}. \quad (1, 6)$$



Фиг. 2.

Струям CI и DI плоскости z соответствует в плоскости t диаметр полукруга. Переходу с одной струи на другую в плоскости z соответствует обход точки I в плоскости t. Поэтому величина, характеризующая ширину кильватера на бесконечности, может быть найдена, если мы определим выражение:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [z(-\varepsilon) - z(+\varepsilon)],$$

где ε — вещественная переменная, стремящаяся к нулю.

Из (1, 4) следует, что:

$$z(-\varepsilon) - z(+\varepsilon) = 2iMe^{i\alpha_0}\left\{-2A\varepsilon + B\lg(-\varepsilon) - B\lg(+\varepsilon) + \frac{2C}{\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + E\lg\frac{-\varepsilon - e^{-i\alpha}}{+\varepsilon - e^{-i\alpha}} + F\lg\frac{-\varepsilon - e^{-i\beta}}{+\varepsilon - e^{-i\beta}}\right\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [z(-\varepsilon) - z(+\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[B\lg(-1) + \frac{2C}{\varepsilon}\right]. \quad (1, 7)$$

Из этого соотношения следует, что в случае произвольного выбора α и β [γ определится из условия (1, 3)], что соответствует произвольному заданию положения точек отрыва, ширина застойной области на бесконечности равна бесконечности, так как в этом случае C, вообще говоря, не равно нулю.

Если мы потребуем, чтобы ширина застойной области на бесконечности была конечная величина, то это приводит на основании (1, 7) к условию:

$$C = 0. \quad (1, 8)$$

Соотношения (1, 8) достаточно для определения параметров α и β. Можно, однако, поставить еще одно условие. Таким вторым условием будет вполне естественное требование, чтобы ширина застойной области на бесконечности обращалась в нуль, т. е. чтобы струи по мере удаления на бесконечность приближались бы друг к другу. Это приводит нас к такому условию:

$$B = 0. \quad (1, 9)$$

Если угол α_0 задан, то соотношения (1, 8) и (1, 9) в совокупности с (1, 3) позволяют определить параметры α, β и γ, т. е. положение точек отрыва струй.

Введем для сокращения письма обозначения:

$$e^{i\alpha}=x, \qquad e^{i\beta}=y, \qquad e^{i\alpha_0}=a. \tag{1, 10}$$

Определяя γ из (1, 3) и подставляя его в (1, 5) и (1, 6), получим, что

$$-2\frac{xy}{a}+\frac{1}{a^2 y}+\frac{1}{a^2 x}-\frac{y}{a^2}-\frac{x}{a^2}=0$$

и

$$\frac{xy}{a^2}+\frac{1}{a^2}-x^2y^2+\frac{2x}{a}+\frac{2y}{a}-\frac{1}{a^2xy}+(x+y)\left(-2\frac{xy}{a}+\frac{1}{a^2 y}+\frac{1}{a^2 x}-\frac{y}{a^2}-\frac{x}{a^2}\right)=0.$$

Второе равенство на основании первого может быть переписано:

$$\frac{xy}{a^2}+\frac{1}{a^2}-x^2y^2+\frac{2x}{a}+\frac{2y}{a}-\frac{1}{a^2xy}=0.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$\begin{gathered}-2ax^2y^2+x+y-xy^2-x^2y=0,\\ x^2y^2+xy-a^2x^3y^3+2ax^2y+2axy^2=1.\end{gathered} \tag{1, 11}$$

Вводя новые неизвестные, по формулам:

$$u=xy, \quad v=x+y, \tag{1, 12}$$

перепишем (1, 11):

$$-2au^2+v-uv=0, \quad u^2+u-a^2u^3+2auv=1.$$

Определим v из первого уравнения:

$$v=\frac{2au^2}{1-u} \tag{1, 13}$$

и подставим полученное значение во второе уравнение:

$$a^2u^4+(3a^2-1)u^3+2u-1=0. \tag{1, 14}$$

Так как $u=xy=e^{i(\alpha+\beta)}$, то при решении уравнения (1, 14) относительно u нас будут интересовать лишь те корни, которые по модулю равны единице. Отсутствие таких корней будет означать, что поставленные нами выше требования невыполнимы.

Далее заметим, что x и y входят в уравнения (1, 12) симметрично и определяются как корни квадратного уравнения:

$$z^2-vz+u=0. \tag{1, 15}$$

Из фиг. 2 следует, что $\alpha<\beta$, поэтому за x должен быть взят тот корень, который имеет меньший аргумент. Аргументы обоих корней должны быть положительны и меньше, чем π. Подставляя в (1, 14) значение a, равное $e^{i\alpha_0}$, и полагая $u=re^{i\omega}$, получим:

$$r^4e^{4i\omega}+(3-e^{-2i\alpha_0})r^3e^{3i\omega}+2re^{i(\omega-2\alpha_0)}-e^{-2i\alpha_0}=0.$$

Отделяя действительную и мнимую части, будем иметь:

$$r^4 \cos 4\omega + 3r^3 \cos 3\omega - r^3 \cos(3\omega - 2\alpha_0) + 2r \cos(\omega - 2\alpha_0) - \cos 2\alpha_0 = 0,$$

$$r^4 \sin 4\omega + 3r^3 \sin 3\omega - r^3 \sin(3\omega - 2\alpha_0) + 2r \sin(\omega - 2\alpha_0) + \sin 2\alpha_0 = 0,$$

что может быть приведено к виду:

$$-(r^3 \cos 3\omega - 2r \cos\omega + 1)\cos 2\alpha_0 + (-r^3 \sin 3\omega + 2r \sin\omega)\sin 2\alpha_0 = \\ = -r^4 \cos 4\omega - 3r^3 \cos 3\omega,$$

$$(-r^3 \sin 3\omega + 2r \sin\omega)\cos 2\alpha_0 + (r^3 \cos 3\omega - 2r \cos\omega + 1)\sin 2\alpha_0 = \\ = -r^4 \sin 4\omega - 3r^3 \sin 3\omega.$$

Возводя в квадрат и складывая, получим:

$$r^6 + 4r^2 + 1 - 4r^4 \cos 2\omega + 2r^3 \cos 3\omega - 4r \cos\omega = r^8 + 9r^6 + 6r^7 \cos\omega.$$

Выше отмечено, что нас интересуют корни, модуль которых равен единице. Поэтому, полагая $r = 1$, получим уравнение для определения ω:

$$\cos^3\omega - \cos^2\omega - 2\cos\omega = 0; \quad \text{откуда} \quad \omega_1 = \pi/2,\ \omega_2 = \pi$$

(третье значение ω мнимое). Соответственные значения u будут:

$$u_1 = e^{i\omega_1} = i,\ u_2 = e^{i\omega_2} = -1.$$

Пользуясь этими значениями, можно определить соответственные значения a_1, a_2, при которых ширина застойной области на бесконечности равна нулю. Из (1, 14) получаем два равенства:

$$a_1^2 u_1^4 + (3a_1^2 - 1)u_1^3 + 2u_1 - 1 = 0, \quad a_2^2 u_2^4 + (3a_2^2 - 1)u_2^3 + 2u_2 - 1 = 0,$$

откуда

$$a_1^2 = 1, \quad a_2^2 = -1,$$

и для угла атаки α_0 получаем четыре значения: 0, π, $\pi/2$, $-\pi/2$.

Первые два значения соответствуют тривиальному случаю пластинки, параллельной потоку, вторые два значения соответствуют случаю пластинки, нормальной к набегающему потоку. Таким образом *при обтекании пластинки со срывом струй ширина застойной области на бесконечности может быть равна нулю лишь в двух случаях:* 1) *пластинка параллельна потоку* и 2) *пластинка перпендикулярна к набегающему потоку.*

2. Применим эти соображения к некоторым случаям обтекания пластинки.

Случай Kirchoff. Пластинка перпендикулярна к набегающему потоку, и срыв струй происходит на концах. Здесь:

$$\alpha = 0,\ \beta = \pi,\ \gamma = \frac{\pi}{2},\ \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{следовательно,} \quad x = 1,\ y = -1,\ a = i,$$

и мы имеем, что

$$B = -2,\ C = -2i.$$

Следовательно, при такой схеме обтекания ширина застойной области на бесконечности не может иметь даже конечной величины.

Случай Schmieden. Пластинка перпендикулярна к потоку, а срыв струй происходит с задней стороны пластинки в двух равно удаленных от ее концов точках. В этом случае:

$$\alpha_0 = \pi/2, \quad \alpha + \beta = \pi, \quad \text{следовательно,} \quad a = e^{i\alpha_0} = i, \quad u = xy = e^{i(\alpha+\beta)} = -1.$$

Имея значение u, из (1, 13) найдем, что $v = i$, и уравнение (1, 15) напишется так:

$$z^2 - iz + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно,

$$z_1 = x = e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad z_2 = y = e^{\frac{5\pi i}{6}},$$

откуда

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 150^\circ,$$

т. е. при обтекании пластинки по схеме Schmieden ширина застойной области на бесконечности равна нулю, если срыв струй с задней стороны происходит в точках, определяемых на полукруге (фиг. 2) аргументами $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 150^\circ$.

3. Требование равенства нулю ширины застойной области на бесконечности оказалось очень сильным, ибо привело нас только к одному случаю (исключая тривиальный случай параллельности пластинки потоку) — схемы Schmieden.

Здесь мы поставим более слабое требование, чтобы ширина застойной области на бесконечности была конечной величиной, отличной от нуля.

Тогда мы имеем лишь одно условие (1, 8) $C = 0$, т. е. первое уравнение системы (1, 11). Вводя в это уравнение углы α, β и α_0 согласно (1, 10) и отделяя действительную часть от мнимой, получим:

$$\begin{aligned} -2\cos(\alpha_0 + 2\alpha + 2\beta) + \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + 2\beta) - \cos(2\alpha + \beta) = 0, \\ -2\sin(\alpha_0 + 2\alpha + 2\beta) + \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + 2\beta) - \sin(2\alpha + \beta) = 0. \end{aligned} \qquad (3,\ 1)$$

Исключая отсюда α_0, после несложных преобразований получим:

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 1.$$

Принимая во внимание, что $0 < \alpha < \beta < \pi$, имеем:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 1. \qquad (3,\ 2)$$

Из (3, 1) находим:

$$\operatorname{tg}(\alpha_0 + 2\alpha + 2\beta) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + 2\beta) - \sin(2\alpha + \beta)}{\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + 2\beta) - \cos(2\alpha + \beta)},$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha_0 + 2\alpha + 2\beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right), \quad \text{откуда} \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) + k\pi,$$

где k — целое число и должно быть взято так, чтобы α_0 попадало в интервал $0, \frac{\pi}{2}$. Из (1, 3) мы имеем:

$$\alpha_0 = \pi + \gamma - (\alpha + \beta), \quad \text{следовательно,} \quad \gamma = k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда видно, что для k нужно взять значение, равное единице, так как $\gamma < \pi$. Поэтому $\gamma = \pi/2$ и

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}\pi - (\alpha + \beta). \tag{3, 3}$$

Из соотношений (3, 2) и (3, 3) α и β могут быть определены через угол атаки α_0:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha_0}{2} + \arccos \frac{1}{2\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha_0}{2}\right)}, \\ \alpha &= \frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha_0}{2} - \arccos \frac{1}{2\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha_0}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3, 4}$$

Можно показать, что для любого α_0 в интервале $0, \pi/2$ для β и α по формулам (3, 4) получаются вещественные значения, а именно:

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5}{6}\pi \leqslant \beta \leqslant \pi. \tag{3, 5}$$

Таким образом *при обтекании пластинки косым потоком со срывом струй с задней стороны ширина застойной области на бесконечности будет иметь конечную величину при любом угле атаки* α_0, *если* α *и* β, *определяющие положение точек срыва струй, будут иметь значения, определяемые формулами* (3, 4).

DETERMINATION OF JET BREAKING POINTS POSITION IN PLATE CIRCUMFLUENCE

I. M. BELENKY & I. E. ZELENSKY

(Kharkov)

(Summary)

The positions of jet breaking points are determined in this work by the admission of finite width of the standstill up to infinity.