ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

(Поправка к статье)

В § 3 моей статьи „Проблема упругого последействия и внутреннее трение" (сборн. „Прикл. мат. и мех.", т. I, вып. 4, 1937) намечено доказательство единственности решения данного там уравнения колебаний упругой вязкой нити. Приведенная схема доказательства вряд ли оказалась убедительной, и к тому же отсутствуют указания на способ перехода к пределу. Ниже намечен путь к ее исправлению.

Речь идет об интеграле $u(x, t)$ уравнения

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} M + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего при $T > 0$ условиям:

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0. \tag{2}$$

Расширяем область $S\,(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, восстанавливая перпендикуляры равной длины ε в плоскости XT к границе C этой области (направленные наружу). Концы этих перпендикуляров определяют замкнутый контур Σ, содержащий внутри себя C и нигде не касающийся последнего. Можно потребовать, чтобы u, которое по условию исчезает вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ на C, исчезало бы тождественно внутри области S_+ между C и Σ и на Σ.

Применение формулы Гаусса к S и S_+ приводит к выводу, что

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \left(dx\,dt = 0 \qquad \text{где } v = \eta \frac{\partial u}{\partial t} + Mu\right).$$

Отсюда следует, что $u \equiv 0$ в S, как это и было показано. Результат остается в силе, каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Заставляя ε стремиться к нулю, получим, что решение уравнения (1) при условиях (2) равно тождественно нулю в S.

Так как это верно при всяком $T > 0$, то при $T \to +\infty$ получим доказываемую теорему. При этом нет никакой надобности рассматривать знак $\eta H - \sigma M$. Но зато существенным является требование, чтобы не только $\frac{\partial u}{\partial t}$, но и u обращалось в 0 при $t = +\infty$. Это значит, что потенциальная и кинетическая энергия колебаний с течением времени переходит в теплоту.

Далее в цитированной работе (§ 11) идет речь о сходимости ряда

$$f(x, t) = \sum_m w_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

для $u(x, t)$ уравнения

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t).$$

Чтобы ряды, составленные формально для

$$u, \ \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

равномерно и абсолютно сходились, достаточно предположить, что порядок малости $w_m(t)$ равномерно для всех $t \geqslant 0$ с возрастанием m был не ниже, чем m^{-2}, т. е. что производная первого порядка по x от f удовлетворяет в $[0, l]$ условиям Дирихле. Значит, нет надобности считать f_x' непрерывной, как это указывается в тексте.

А. Герасимов