А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

ГРАФО-МЕХАНИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВОЙНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

К. И. АНТИМОНОВ

(Ленинград)

В тех случаях, когда функция двух переменных задана графически, коэффициенты ее разложения в тригонометрический ряд могут быть вычислены графо-механическим способом, не прибегая к гармоническому анализатору.

Идея способа. Пусть задана в прямоугольной системе координат некоторая поверхность, например подводная поверхность судна. Рассечем поверхность рядом равноотстоящих плоскостей, параллельных координатной плоскости. В сечении получим кривые, которые в общем случае могут иметь какой угодно вид. В нашем случае, если секущие плоскости параллельны горизонтальной, кривые сечений являются ватерлиниями поверхности судна (фиг. 1).

Возьмем значения равноотстоящих ординат из кривых и отложим их на „гармонической сетке", представляющей совокупность параллельных прямых, расстояние между которыми меняется с изменением расстояния от начальной по закону синуса или косинуса (фиг. 1).

Так, если ордината ватерлинии имеет абсциссу и отстоит от соседней на расстоянии Δx, то при длине ватерлинии L расстояние между этими ординатами на гармонической сетке будет равным

$$\Delta x \sin\frac{2\pi x}{L} \quad \text{или} \quad \Delta x \cos\frac{2\pi x}{L}.$$

Очевидно, что площадь ω, окаймляемая построенной таким образом кривой $f(x, z_k)$, будет связана с одним из коэффициентов Фурье A_{10} для данной кривой равенством:

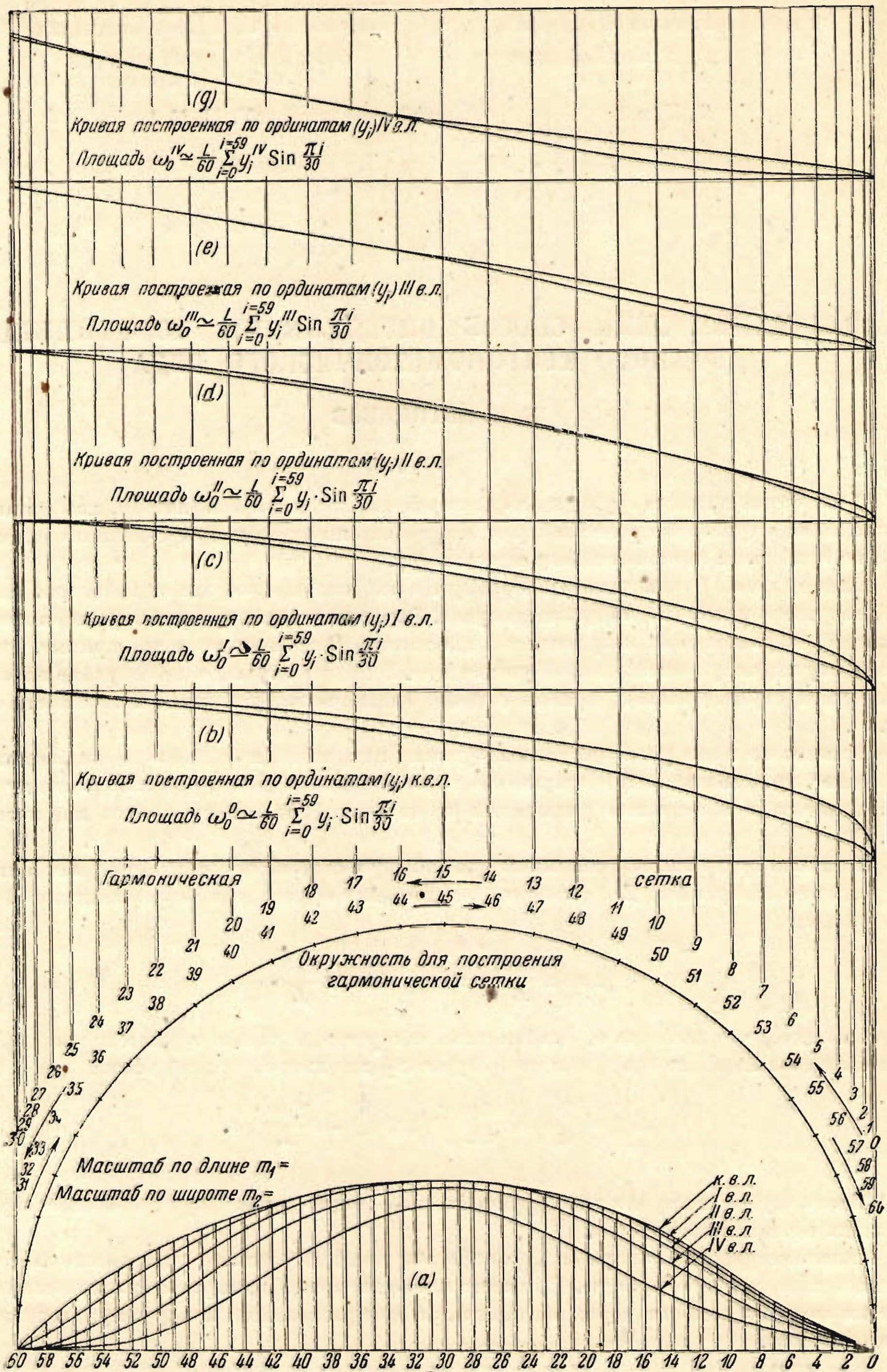
$$A_{10} = \frac{2}{\pi L}\,\omega \simeq \frac{2}{\pi L}\int f(x, z_0)\sin\frac{2\pi x}{L}\,dx.$$

Таким путем построим на гармонической сетке „трансформированные" кривые остальных сечений поверхности.

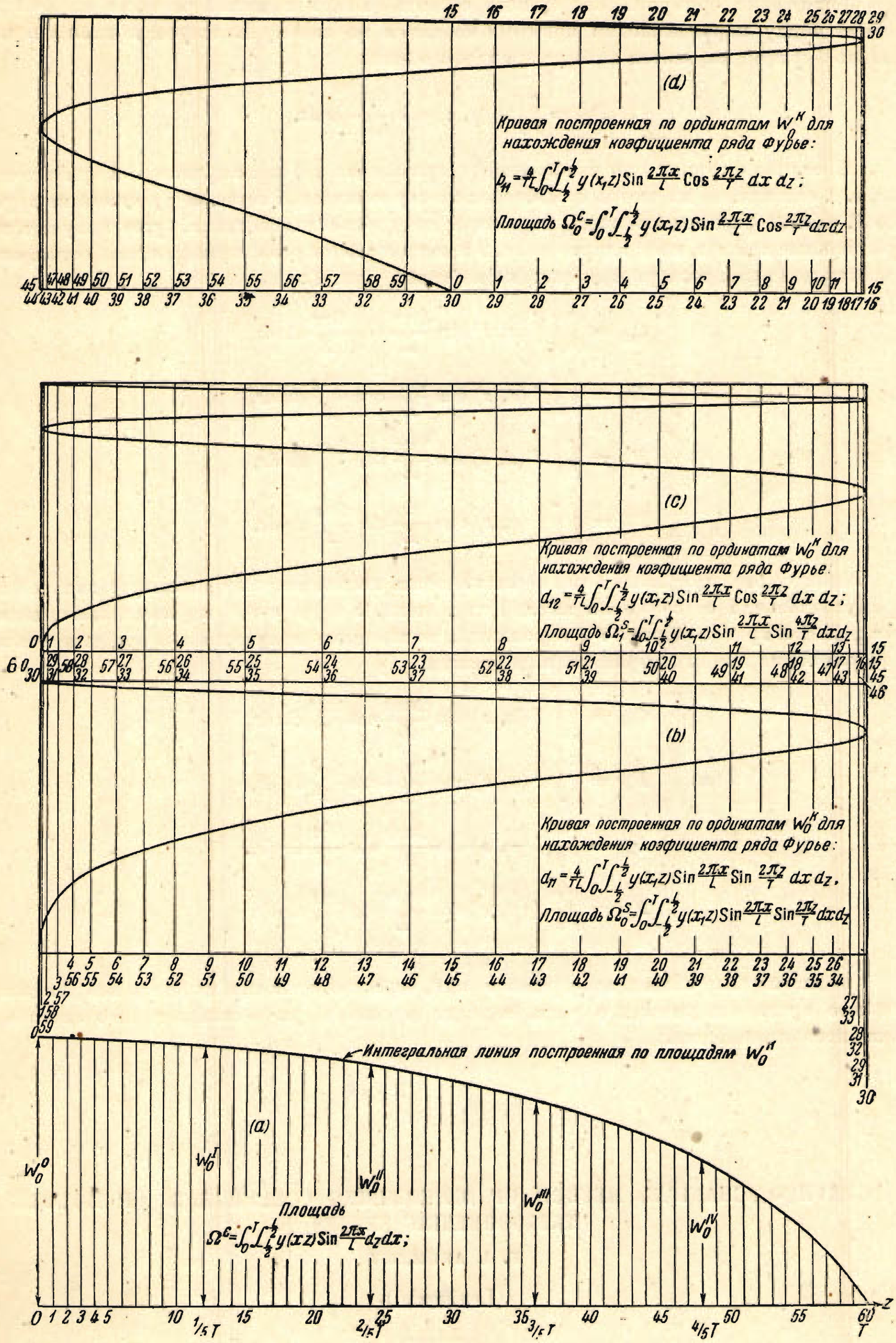
Спланиметрировав каждую из „трансформированных" кривых, построим по значениям площадей интегральную кривую. Для этого площади трансформированных кривых откладываем в качестве ординат через интервалы, равные расстоянию между секущими плоскостями (фиг. 2 a).

Для кривых на фиг. 1, трансформированных на синусоидальной сетке, площадь интегральной кривой выразится двойным интегралом:

$$C_{10} = \iint f(x, z)\sin\frac{2\pi x}{L}\,dx\,dz. \tag{1}$$


(g)
Кривая построенная по ординатам (y_i) IV в.л.
Площадь $\omega_0^{IV} \simeq \frac{L}{60} \sum_{i=0}^{i=59} y_i^{IV} \sin \frac{\pi i}{30}$
(e)
Кривая построенная по ординатам (y_i) III в.л.
Площадь $\omega_0^{III} \simeq \frac{L}{60} \sum_{i=0}^{i=59} y_i^{III} \sin \frac{\pi i}{30}$
(d)
Кривая построенная по ординатам (y_i) II в.л.
Площадь $\omega_0^{II} \simeq \frac{L}{60} \sum_{i=0}^{i=59} y_i \cdot \sin \frac{\pi i}{30}$
(c)
Кривая построенная по ординатам (y_i) I в.л.
Площадь $\omega_0^{I} \simeq \frac{L}{60} \sum_{i=0}^{i=59} y_i \cdot \sin \frac{\pi i}{30}$
(b)
Кривая построенная по ординатам (y_i) к.в.л.
Площадь $\omega_0^{0} \simeq \frac{L}{60} \sum_{i=0}^{i=59} y_i \cdot \sin \frac{\pi i}{30}$
Гармоническая сетка
Окружность для построения гармонической сетки
Масштаб по длине m_1 =
Масштаб по широте m_2 =
К.в.л.
I в.л.
II в.л.
III в.л.
IV в.л.
(a)
60 58 56 54 52 50 48 46 44 42 40 38 36 34 32 30 28 26 24 22 20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 0
База

Фиг. 1.


(d)
Кривая построенная по ординатам W_0^K для нахождения коэфициента ряда Фурье:
$b_{11}=\frac{4}{Tl}\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz;$
Площадь $\Omega_0^C=\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz$
(c)
Кривая построенная по ординатам W_0^K для нахождения коэфициента ряда Фурье
$d_{12}=\frac{4}{Tl}\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz;$
Площадь $\Omega_1^S=\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi z}{T}\,dx\,dz$
(b)
Кривая построенная по ординатам W_0^K для нахождения коэфициента ряда Фурье:
$d_{11}=\frac{4}{Tl}\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz,$
Площадь $\Omega_0^S=\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(x,z)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz$
Интегральная линия построенная по площадям W_0^K
(a)
W_0^0
W_0^I
W_0^{II}
W_0^{III}
W_0^{IV}
Площадь
$\Omega^C=\int_0^T\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y(xz)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{l}\,dz\,dx;$
0 1 2 3 4 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 z
1/5 T
2/5 T
3/5 T
4/5 T
T

Фиг. 2.

Если трансформированные кривые строить на гармонической сетке, на которой расстояния между параллельными прямыми меняются по закону косинуса, то площадь интегральной кривой выразится интегралом другого вида:

$$D_{10}=\iint f(x,\ z)\cos\frac{2\pi x}{L}\,dx\,dz. \tag{2}$$

Поступая с ординатами интегральных кривых так же, как с ординатами кривых сечений, т. е. откладывая их таким же способом на гармонической сетке, построенной на другой базе T, равной расстоянию между крайними секущими плоскостями, будем получать преобразованные кривые, площади которых, в зависимости от рода гармонической сетки, определяются двойными интегралами следующих типов (фиг. 2):

$$\left.\begin{aligned}C_{11}&=\iint f(x,\ z)\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz,\\ D_{11}&=\iint f(x,\ z)\cos\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz,\\ E_{11}&=\iint f(x,\ z)\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz,\\ F_{11}&=\iint f(x,\ z)\cos\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{2\pi z}{T}\,dx\,dz.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если ординаты кривых сечений откладывать последовательно на синусоидальной или косинусоидальной сетке не на каждой параллели, а через $s+1$ параллелей, а ординаты интегральной кривой через $t+1$ параллелей, то площади полученных в результате такого преобразования кривых выразятся интегралами:

$$\begin{aligned}C_{st}&=\iint f(x,\ z)\sin\frac{2\pi sx}{L}\cos\frac{2\pi t}{T}\,dx\,dz,\\ D_{st}&=\iint f(x,\ z)\cos\frac{2\pi sx}{L}\cos\frac{2\pi t}{T}\,dx\,dz,\\ E_{st}&=\iint f(x,\ z)\sin\frac{2\pi sx}{L}\sin\frac{2\pi t}{T}\,dx\,dz,\\ F_{st}&=\iint f(x,\ z)\cos\frac{2\pi sx}{L}\sin\frac{2\pi t}{T}\,dx\,dz.\end{aligned}$$

Аналогия полученных интегралов с теми, через которые определяются коэффициенты двойного тригонометрического ряда, и лежит в основе графо-механического способа их численного определения.

GRAPHO-MECHANICAL METHOD OF DETERMINING COEFFICIENTS OF DOUBLE TRIGONOMETRIC SERIES

K. I. ANTIMONOV

(Leningrad)

(Summary)

The author shows that in cases where the function of two variables is given graphically, the coefficients of its dissolution in the trigonometric series can be calculated by grapho-mechanical means without resorting to the harmonic analysator.