А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

ЗАМЕТКИ

О ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СИЛ

Ю. С. СИКОРСКИЙ

(Одесса)

§ **1.** Предположим, что однородная, совершенно гибкая нить (канат), кроме собственного веса, подчиняется еще действию сплошных вертикальных сил, изменяющихся вдоль оси OX в горизонтальном направлении, причем закон их изменения задан.

Подобного рода обстоятельство приблизительно может иметь место например тогда, когда нить есть канат, поддерживающий настил висячего моста.

При исследовании формы нити примем за начало координат центр тяжести того поперечного сечения ее, в котором он расположен ниже центров тяжести прочих сечений. Начало координат O будет в то же время началом отсчета дуг. Будем пользоваться общими дифференциальными уравнениями равновесия нитей:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X\,ds=0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\,ds=0, \tag{1}$$

в которых T обозначает натяжение нити в произвольно взятом сечении M, x и y — координаты центра тяжести этого сечения, X и Y — проекции на координатные оси внешней отнесенной к единице длины силы P, s — длина дуги OM.

Если F есть площадь поперечного сечения нити, R — нормальное напряжение, то $T=RF$, причем для нити равного сопротивления $R=\text{const}$. В нашем случае P есть сила тяжести и равна $F\delta_0$, где $\delta_0=P$ при $F=1$.

Расположив ось OY вертикально вверх, будем иметь: $X=0$, $Y=-P$.

Пусть $f(x)$ есть отнесенная к единице длины пролета вертикально действующая и изменяющаяся в горизонтальном направлении сила. Будем считать, что эта сила может быть направлена как сверху вниз, так и снизу вверх.

Дифференциальные уравнения (1) принимают вид:

$$d\left(F\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(F\frac{dy}{ds}\right)-\frac{F\delta_0}{R}\,ds-\frac{f(x)}{R}\,dx=0.$$

Принимая во внимание, что $F\dfrac{dx}{ds}=F_0$, где F_0 есть F при $s=0$, находим:

$$F_0\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{F_0\delta_0}{R}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-\frac{f(x)}{R}=0,$$

либо, полагая $\frac{dy}{dx} = p$, получим:

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{k}(1 + p^2) - \frac{f(x)}{T_0} = 0,$$

где $k = \frac{R}{\delta_0}$, а T_0 — натяжение в поперечном сечении, проходящем через начало координат

Придав полученному уравнению вид:

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p^2}{k} = \varphi(w), \tag{2}$$

где

$$\varphi(w) = \frac{1}{k} + \frac{f(x)}{T_0}, \tag{3}$$

мы видим, что вопрос о форме нити приводится к интегрированию уравнения Рикатти. Общий интеграл этого уравнения, как известно:

$$p = -k\frac{Cz_1' + z_2'}{Cz_1 + z_2},$$

где z_1 и z_2 — линейно независимые частные решения уравнения:

$$z'' + \frac{\varphi(x)}{k} z = 0, \tag{4}$$

(см. Г у р с а. Курс математического анализа, т. II, стр. 373).

Следовательно, обозначив произвольную постоянную через Г, имеем:

$$y = \ln\frac{\Gamma}{(Cz_1 + z_2)^k} \quad \text{либо} \quad e^{\frac{y}{k}}(C_2 z_1 + C_2 z_2) = 1. \tag{5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются на основании граничных условий, в силу которых при $x = 0$ будет $y = 0$ и $y' = 0$. Обозначая z_1, z_2, z_1', z_2' при $x = 0$ через z_{10}, z_{20}, z_{10}', z_{20}', получим:

$$C_1 z_{10} + C_2 z_{20} = 1 \quad \text{и} \quad C_1 z_{10}' + C_2 z_{20}' = 0.$$

Вследствие линейной независимости решений z_1 и z_2 определитель Вронского $\Delta_0 \neq 0$ и для постоянных получаем вполне определенные значения:

$$C_1 = \frac{z_{20}'}{\Delta_0}, \quad C_2 = -\frac{z_{10}'}{\Delta_0}, \quad (\Delta_0 = z_{10} z_{20}' - z_{20} z_{10}'),$$

при помощи которых уравнение представится в виде:

$$e^{\frac{y}{k}}(z_1 z_{20}' - z_2 z_{10}') = \Delta_0. \tag{6}$$

Уравнение (5) представляет собою весьма общее уравнение цепных линий равного сопротивления, подверженных, кроме собственного веса, еще действию вертикально направленных и изменяющихся в горизонтальном направлении сил. Очевидно, уравнение (5) может быть получено путем умножения общего интеграла линейного однородного дифференциального уравнения (4) на $e^{y/k}$ и приравнивания произведения единице. Таким образом мы приходим к представлению об образовании обширного класса рассматриваемых линий согласно простому закону.

§ 2. Исходя из (6), нетрудно получить, как частные случаи, уравнения известных видов цепных линий равного сопротивления. Так, например, в случае, когда $f(x) = 0$, из (3) имеем $\varphi(x) = 1/k$. Уравнение (4) принимает вид:

$$z'' + \frac{z}{k^2} = 0.$$

В этом случае

$$z_1 = \sin\frac{x}{k}, \quad z_2 = \cos\frac{x}{k}, \quad z_{10} = 0, \quad z_{20} = 1, \quad z_{10}' = \frac{1}{k}, \quad z_{20}' = 0, \quad \Delta_0 = -\frac{1}{k},$$

согласно (6) имеем:

$$e^{\frac{y}{k}} \cos\frac{x}{k} = 1,$$

уравнение, найденное Кориолисом (см. журнал Лиувиля, т. I).

Пусть теперь $f(x) = \pm q = \text{const}$ $(q > 0)$. В таком случае

$$\varphi(x) = \frac{1}{k} \pm \frac{q}{T_0} = \frac{\delta_0}{R} \pm \frac{q}{T_0} = \frac{h^2}{k},$$

где $h^2 = 1 \pm \frac{kq}{T_0}$, причем при $f(x) = -q$ предположим, что $\frac{q}{T_0} < \frac{\delta_0}{R}$. Дифференциальное уравнение (4) и соответственно уравнение цепной линии будут:

$$z'' + \frac{h^2}{k^2} z = 0, \qquad e^{\frac{y}{k}} \cos\frac{hx}{k} = 1.$$

[Случай, рассматриваемый I. Petzval Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1904, B. 50, Theorie der Störungen der Stützlinien].

Если $\frac{q}{T_0} > \frac{\delta_0}{R}$, то, полагая $1 - \frac{kq}{T_0} = -h^2$, будем иметь: $z'' - \frac{h^2}{k^2} z = 0$. В этом случае

$$z_1 = \operatorname{sh}\frac{hx}{k}, \quad z_2 = \operatorname{ch}\frac{hx}{k}, \quad z_{10} = 0, \quad z_{20} = 1, \quad z_{10}' = \frac{h}{k}, \quad z_{20}' = 0, \quad \Delta_0 = -\frac{h}{k}.$$

Уравнение цепной линии равного сопротивления получается в виде:

$$e^{\frac{y}{k}} \operatorname{ch}\frac{hx}{k} = 1.$$

Симметричная относительно оси OY и проходящая через начало координат кривая выпуклостью направлена вверх.

Если $\frac{q}{T_0} = \frac{\delta_0}{R}$, то цепная линия равного сопротивления совпадает с осью OX.

Если, например, возьмем уравнение $z'' + \frac{a^2 z}{(a^2 - x^2)^2} = 0$, то его частные решения

$$z_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2} \ln\frac{a + x}{a - x}$$

при $x = 0$, дают: $z_{10} = a$, $z_{20} = 0$, $z_{10}' = 0$, $z_{20}' = 2$, $\Delta_0 = 2a$. Вследствие этого уравнение соответствующей линии будет:

$$e^{\frac{y}{k}} \sqrt{a^2 - x^2} = a, \tag{7}$$

причем

$$\frac{\varphi(x)}{k} = \frac{1}{k^2} + \frac{f(x)}{kT_0} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^2}.$$

Если выберем $k = b$, то

$$f(x) = \frac{T_0}{b} \frac{a^2 b^2 - (a^2 - x^2)^2}{(a^2 - x^2)}. \tag{8}$$

Уравнение (7) принимает вид:

$$e^{\frac{y}{k}} \sqrt{a^2 - x^2} = a.$$

и представляет цепную линию равного сопротивления, подверженную действию вертикальных сил, изменяющихся согласно закону, выраженному равенством (8).

Площадь поперечного сечения нити определяется формулой:

$$F = F_0 \frac{ds}{dx} = F_0 \sqrt{1 + p^2},$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, и во всех отмеченных случаях эта производная может быть легко вычислена.

SUR LA FORME D'ÉQUILIBRE D'UN FIL PESANT D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUMIS À L'ACTION DE FORCES VERTICALES

G. SIKORSKI
(Odessa)

(Sommaire)

Supposons qu'un fil pesant d'égale résistance parfaitement flexible et inextensible est soumis à l'action de forces verticales, qui varient le long de l'axe horisontal OX. Désignons par:

x, y, z — les coordonnées d'un point quelconque M de l'axe du fil;

s — la longueur de l'arc $M_0 M$ qu'on mesure à partir d'un point déterminé M_0 de la courbe;

F — l'aire de la section transversale qui passe par le point M.

$R = \text{const}$ — la tension par unité carrée de F;

$f(x)$ la force, qui varie le long de l'axe horizontale OX;

P — la force rapportée à l'unité de longueur du fil;

$\delta_0 = P$ quand $F = 1$.

Les équations différentielles de l'équilibre du fil peuvent être mises sous la forme:

$$d\left(F\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(F\frac{dy}{ds}\right) - \frac{F}{R}\delta_0\, ds - \frac{f(x)}{R}\, dx = 0.$$

Posons:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{R}{\delta_0} = k, \quad \varphi(x) = \frac{1}{k} + \frac{f(x)}{T_0}, \quad T_0 = RF_0, \quad F_0 = (F)_{s=0}.$$

Nous obtiendrons l'équation de Ricatti

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p^2}{k} = \varphi(x)$$

dont l'intégrale générale

$$p = -\frac{Cz_1' + z_2'}{Cz_1 + z_2} \qquad (C = \text{const}),$$

où z_1 et z_2 sont les intégrales particulières de l'équation

$$z'' + \frac{\varphi(x)}{k} z = 0.$$

Ayant en vue, que

$$y = \ln \frac{\Gamma}{(Cz_1 + z_2)^k} \qquad (\Gamma = \text{const}),$$

nous trouvons l'équation de la courbe d'égale résistance

$$e^{\frac{y}{k}}(C_1 z_1 + C_2 z_2) = 1.$$

On peut en déduire comme cas particuliers les équations bien connues des chaînettes d'égale résistance.