АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 1 1938 V. II, № 1

О РАВНОВЕСИИ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Ю. С. СИКОРСКИЙ

(Одесса)

§ 1. Предположим, что в натянутой нити можно провести такую прямую, на которой лежат центры тяжести сечений, перпендикулярных к этой прямой. Эту прямую будем называть осью нити, сохраняя это название и для кривой, получаемой вследствие деформации прямой. Пренебрегая поперечными размерами нити, можно себе представить, что ось ее расположена на совершенно гладкой поверхности:

$$\psi(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Пусть X, Y и Z — проекции на координатные оси силы P, отнесенной к единице длины нити и приложенной к некоторой точке $M(x, y, z)$ ее оси.

Пусть T обозначает натяжение нити в сечении, проходящем через точку M, а τ — множитель реакции поверхности в этой точке.

В таком случае дифференциальные уравнения равновесия нити, как известно, будут:

$$\begin{gathered} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds + \tau\frac{\partial\psi}{\partial x}\,ds = 0, \\ \left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds + \tau\frac{\partial\psi}{\partial y}\,ds = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds + \tau\frac{d\psi}{dz}\,ds = 0, \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Эти уравнения вместе с (1) служат для определения x, y, z, T и τ в зависимости от дуги s, отсчитанной от начальной точки M_0 (см. Аппель. Руководство теоретической механики, т. I, стр. 215).

Если нить есть нить равного сопротивления, то

$$T = FR,$$

где F — площадь поперечного сечения, проходящего через точку M, а R — нормальное напряжение, постоянное во всех точках нити.

Будем предполагать, что отнесенная к единице длины сила зависит от длины s дуги $M_0 M$, т. е.

$$P = F\delta_0 f(s),$$

где δ_0 есть P при $F=1$ и $f(s)=1$.

Пустя λ, μ и ν суть углы, образованные с координатными осями вектором P. В таком случае дифференциальные уравнения равновесия нити равного сопротивления на гладкой поверхности примут вид:

$$\begin{aligned} d\left(F\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\lambda\, ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x}ds = 0, \\ d\left(F\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\mu\, ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial y}ds = 0, \\ d\left(F\frac{dz}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\nu\, ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}ds = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Здесь $\tau\frac{\partial\psi}{\partial s}$, $\tau\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\tau\frac{\partial\psi}{\partial z}$ — проекции на координатные оси отнесенной к единице длины нити реакции поверхности, причем величина направленной по нормали реакции

$$N = \tau\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}.$$

Умножая уравнения (3) соответственно на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, результаты складывая и принимая во внимание, что $\frac{d\psi}{ds}=0$, получим:

$$R\frac{dF}{ds} + F\delta_0 f(s)\cos\omega = 0,$$

откуда

$$F = F_0 e^{-\frac{1}{k}\int\limits_0^s f(s)\cos\omega\, ds},$$

где $k=\frac{R}{\delta_0}$, $\cos\omega = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$, причем α, β и γ обозначают углы, образованные с осями координат касательной в точке M. Следовательно, ω есть угол, образованный с касательной вектором P. Наконец, F_0 есть площадь поперечного сечения, проходящего через начальную точку M_0.

В случае действия на однородную нить силы тяжести

$$f(s)=1, \quad \lambda=\frac{\pi}{2}, \quad \mu=\frac{\pi}{2}, \quad \nu=\pi.$$

Вследствие этого

$$\cos\omega = -\cos\gamma = -\frac{dz}{ds},$$

и мы будем иметь

$$F = F_0 e^{\frac{\delta_0 z}{R}}.$$

Таким образом выходит, что если нить равного сопротивления лежит на совершенно гладкой поверхности и подвергается действию силы тяжести, то площади поперечных сечений нити, проведенных через точки ее оси, лежащие на одном горизонтальном уровне, равны.

Для случая силы тяжести уравнения (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \\ &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \\ &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dz}{ds}\right)-\frac{F}{k}+\frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0. \end{aligned} \tag{5}$$

§ **2.** Задача о форме равновесия тяжелой однородной нити на шаровой поверхности была предметом исследований многих математиков (Миндинг, Гудерман, Клебш, Бирман, Шлегель, Аппель и др.). Решение ее можно получить при помощи эллиптических функций.

В дальнейшем займемся решением вопроса о форме равновесия цепной линии равного сопротивления, закрепленной двумя точками на поверхности

$$x^2+y^2=\varphi^2(z), \tag{1}$$

получаемой от вращения линии $r=\varphi(z)$ вокруг вертикальной оси OZ. Задача эта аналогична задаче о нахождении на поверхности вращения геодезических линий и, подобно последней, приводится к квадратуре.

Для нашего случая уравнения (5) § 1 принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right)+\frac{2x\tau}{R}=0, \\ &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dy}{ds}\right)+\frac{2y\tau}{R}=0, \\ &\frac{d}{ds}\left(F\frac{dz}{ds}\right)-\frac{F}{k}-\frac{2\tau}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\varphi(z)=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Первые два уравнения дают:

$$y\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right)-x\frac{d}{ds}\left(F\frac{dy}{ds}\right)=0, \tag{3}$$

причем

$$F=F_0e^{z/k}.$$

Вследствие этого (3) можно представить в виде:

$$\frac{d(xy'-yx')}{xy'-yx'}+\frac{dz}{k}=0,$$

где

$$x'=\frac{dx}{ds},\quad y'=\frac{dy}{ds}.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$e^{z/k}(xy'-yx')=C, \tag{4}$$

где

$$C = x_0 y_0' - y_0 x_0',$$

причем x_0 и y_0 — координаты начала M_0 отсчета дуг, а x_0' и y_0' — производные по переменной s, вычисленные в M_0.

Пусть θ есть угол, образованный с осью OX радиусом r, проведенным в точку $M(x, y, z)$.

В таком случае

$$-\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad 0$$

будут направляющими косинусами касательной в точке M к параллели заданной поверхности. И так как $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$ служат направляющими косинусами касательной в точке M к цепной линии равного сопротивления, то будем иметь:

$$\sin\psi = -\sin\theta \frac{dx}{ds} + \cos\theta \frac{dy}{ds} = \frac{1}{r}(xy' - yx'),$$

где ψ — угол, образованный цепною линиею с меридианом поверхности.

Теперь на основании (4) будем иметь:

$$e^{z/k} r \sin\psi = C. \tag{5}$$

Это соотношение представляет аналогию известной формуле Клеро:

$$r \sin\gamma = \text{const},$$

определяющей угол γ, который геодезическая линия на поверхности вращения образует с меридианом.

Формула (5) для заданного неравного нулю C определяет те области поверхности вращения, в которых могут находиться в равновесии цепные линии равного сопротивления. Действительно, по абсолютной величине

$$e^{z/k} \varphi(z)$$

не может быть меньше C. Поэтому, если будем по цепной линии равного сопротивления перемещаться в том направлении, в котором $e^{\frac{z}{k}} |\varphi(z)|$ уменьшается, оставаясь большим $|C|$, то цепная линия будет все больше и больше отклоняться от меридиана поверхности и приближаться к параллели, не имея возможности за нее перейти.

В случае, когда точка M_0 находится на оси вращения, то

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad C = 0 \quad \text{и} \quad \psi = 0,$$

т. е. цепная линия равного сопротивления располагается вдоль меридиана.

§ 3. Пользуясь формулами

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

и полагая $C \neq 0$, на основании (4) § (2) получим:

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = Ce^{-z/k}$$

Но $r = \varphi(z)$; следовательно,

$$d\theta^2 = \frac{C^2 e^{-2z/k} (ds)^2}{\varphi^4(z)}.$$

А так как

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

то

$$ds^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \varphi^2(z)\, dz^2}{\varphi^2(z) - C^2 e^{-2z/k}}, \tag{1}$$

Теперь, пользуясь (1) и (4), § 2, получим:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{C}{\varphi^2(z)} e^{-z/k}\, ds$$

либо

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{C\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\, dz}{\varphi(z)\sqrt{\varphi^2(z)\, e^{2z/k} - C^2}},$$

откуда

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} = F(z), \tag{2}$$

где

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}{\beta\varphi^2(z)\, e^{2z/k} - 1}}\, \frac{dz}{\varphi(z)},$$

причем

$$\beta = \frac{1}{C^2} = \frac{1}{(x_0 y_0' - y_0 x_0')^2}.$$

Уравнение (2) можно переписать в виде:

$$y = x\frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg} F(z)}{x_0 - y_0 \operatorname{tg} F(z)}. \tag{3}$$

Поверхность, определяемая уравнением (3) в сечении с поверхностью (1), § 2, дает искомую цепную линию равного сопротивления.

Предполагая, в частности, что поверхность вращения есть цилиндр

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{4}$$

будем иметь

$$\varphi(z) = a, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Началом отсчета дуг пусть будет точка $M_0(a, O, O)$.

Так как $xx' + yy' = 0$, то $x_0' = 0$, $y_0' = 1$. Следовательно,

$$C = a, \quad F(z) = \frac{k}{a}\arccos e^{-z/k}$$

и уравнение (3) нетрудно представить в виде:

$$e^{z/k} \cos\left(\frac{a}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = 1. \tag{5}$$

В соединении с (4) полученное уравнение определяет искомую линию как ось нити равного сопротивления, подвешенной к двум точкам на поверхности кругового цилиндра.

В частном случае при $k = a$ линия равного сопротивления может быть получена от пересечения цилиндров:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{и} \quad e^{z/k} x = a.$$

Нетрудно выразить координаты x, y и z точки линии равного сопротивления в зависимости от параметра s. Действительно, на основании (1) имеем:

$$ds = \frac{e^{z/k}\, dz}{\sqrt{e^{2z/k} - 1}};$$

откуда

$$\frac{s}{k} = \ln\left(e^{z/k} + \sqrt{e^{2z/k} - 1}\right).$$

Следовательно,

$$e^{z/k} = \operatorname{ch} \frac{s}{k},$$

т. е.

$$z = k \ln \operatorname{ch} \frac{s}{k}.$$

Пользуясь (4) и (5), приходим к заключению, что

$$x = a \cos\left(\frac{k}{a} \arccos \operatorname{sch} \frac{s}{k}\right),$$

$$y = a \sin\left(\frac{k}{a} \arccos \operatorname{sch} \frac{s}{k}\right).$$

В случае $k = a$

$$x = a \operatorname{sch} \frac{s}{k}, \quad y = a \operatorname{th} \frac{s}{k}.$$

Полагая в (7), что $\frac{k}{a} = m$, $\operatorname{sch} \frac{s}{k} = \sigma$ при $-1 < \sigma < 1$, разлагая в ряд, будет иметь:

$$x = a\left[1 - \frac{m^2}{2!}\sigma^2 + \frac{(4 - m^2)m^2}{4!}\sigma^4 - \frac{(16 - m^2)(4 - m^2)m^2}{6!}\sigma^6 + \ldots\right],$$

$$y = a \sin\frac{m\pi}{2}\left[1 - \frac{m^2}{2!}\sigma^2 - \frac{m^2(4 - m^2)}{4!}\sigma^4 - \ldots\right] -$$

$$- m a \sigma \cos\frac{m\pi}{2}\left[1 + \frac{1 - m^2}{3!}\sigma^2 + \frac{(1 - m^2)(9 - m^2)}{5!}\sigma^4 + \ldots\right].$$

Разрежем поверхность цилиндра (4) по образующей, проходящей через начальную точку отсчета дуг $M_0(a, O, O)$; развернув ее на плоскость XZ и принимая образующую за новую ось OZ, мы получим плоскую кривую

$$z = k \ln \operatorname{ch} \frac{s}{k}. \tag{6}$$

Имея в виду, что

$$(dx)^2=(ds)^2-(dz)^2,$$

мы найдем, что

$$dx=\frac{ds}{\operatorname{ch}\frac{s}{k}};$$

откуда

$$x=2k\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\operatorname{th}\frac{s}{2k}\right). \tag{7}$$

Исключая из (6) и (7) параметр s, приходим к уравнению:

$$\operatorname{th}\frac{z}{2k}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2k},$$

которому нетрудно придать форму

$$e^{z/k}\cos\frac{x}{k}=1,$$

найденную Кориолисом на основании совершенно других соображений (см. журнал Лиувиля, т. I).

Множитель реакции может быть определен по формуле

$$\tau=-\frac{R}{2x}\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right)$$

либо

$$\tau=-\frac{RF_0}{2x}e^{\frac{z}{k}}\left(\frac{1}{k}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2x}{ds^2}\right).$$

Но

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{y}{a}\operatorname{sch}\frac{s}{k},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{x}{a}\operatorname{sch}\frac{s}{k},\quad \frac{dz}{ds}=\operatorname{th}\frac{s}{k}$$

$$\frac{1}{k}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{x}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{s}{k}},$$

поэтому

$$\tau=\frac{RF_0\operatorname{sch}\frac{s}{k}}{2a^2}$$

и реакция

$$N=\frac{RF_0}{a\operatorname{ch}\frac{s}{k}}.$$

Заметим, что последнее из уравнений (2) § 2 приводится к равенству:

$$\operatorname{sch}^2\frac{s}{k}+\operatorname{th}^2\frac{s}{k}=1.$$

ÉQUILIBRE DE LA CHAÎNETTE D'ÉGALE RÉSISTANCE SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

G. SIKORSKI
(Odessa)

(Sommaire)

Que x, y, z soient les coordonnées d'un point quelconque M de l'axe du fil;

$X\ Y\ Z$ — les projections sur les axes de la force P rapportée à l'unité de longueur du fil;

T — la tension du fil appliquée en M;

s — la longueur de l'arc M_0M qu'on mesure à partir d'un point déterminé M_0 de la courbe;

$\psi(x, y, z) = 0$ — l'équation d'une surface parfaitement polie;

N — la réaction normale de la surface, rapportée à l'unité de la longueur du fil;

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}, \quad \tau = \frac{N}{\Delta f}.$$

Les équations différentielles de l'équilibre d'un fil sur la surface sont, comme on sait:

$$\begin{gathered} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds + \tau\frac{d\psi}{dx}\,ds = 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds + \tau\frac{d\psi}{dy}\,ds = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds + \tau\frac{d\psi}{dz}\,ds = 0, \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Considérons le cas du fil d'égale résistance. Supposons que

$$P = F\delta_0 f(s),$$

ou F est l'aire de la section transversale du fil, $\delta_0 = P$ quand $F = 1$ et $f(s) = 1$.

Les équations (1) peuvent être mises sous la forme:

$$\begin{gathered} d\left(F\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\lambda\,ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,ds = 0, \\ d\left(F\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\mu\,ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial y}\,ds = 0, \\ d\left(F\frac{dz}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R}Ff(s)\cos\nu\,ds + \frac{\tau}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,ds = 0, \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \end{gathered} \tag{2}$$

où λ, μ, ν sont les angles, que le vecteur P fait avec axes, R = const. est la tension par unite carrée de l'aire F.

A l'aide des équations (2) nous obtenons

$$F_0 = Fe^{-\frac{1}{k}\int\limits_0^s f(s)\cos\omega\, ds},$$

ou

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu;$$

$$F_0 = (F)_{s=0}, \qquad k = \frac{R}{\delta_0};$$

α, β, γ désignent les angles que la tangente au point M fait avec les axes.

Dans le cas de l'action de la pesanteur nous aurons

$$F = F_0 e^{\frac{\delta_0 z}{R}}.$$

Supposons maintenant que la surface est celle de révolution, soit

$$x^2 + y^2 = \varphi^2(z)$$

son équation. Les équations (2) peuvent être exprimées sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{ds}\right) + \frac{2x\tau}{R} &= 0, \\ \frac{d}{ds}\left(F\frac{dy}{ds}\right) + \frac{2y\tau}{R} &= 0, \\ \frac{d}{ds}\left(F\frac{dz}{ds}\right) - \frac{F}{k} - \frac{2\tau}{R}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\varphi(z) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

On tirera de ces équations

$$e^{z/k}(xy' - yx') = C, \tag{4}$$

d'où nous obtiendrons la formule

$$e^{z/k} r \sin\psi = C,$$

où ψ est l'angle que la chaînette fait avec le méridien de la surface; r est le rayon vecteur du point $M(x, y, z)$.

Il est facile de trouver, que

$$ds^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right)^2\right]\varphi^2(z)\, dz^2}{\varphi^2(z) - C^2 e^{-2r/k}}.$$

Par conséquent

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{C}{\varphi^2(z)} e^{-z/k} ds,$$

d'où

$$y = x\frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg} F(z)}{x_0 - y_0 \operatorname{tg} F(z)},$$

où

$$F(s)=\int_{z_0}^{z}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right)^2}{\beta\varphi^2(z)\,e^{2z/k}-1}}\,\frac{dz}{\varphi(z)},$$

x_0, y_0, z_0 — les coordonnées du point initiale $\beta=$const.

Dans le cas du cylindre

$$x^2+y^2=a^2$$

nous trouvons sur sa surface une courbe d'égale résistance, dont la développée sur le plan est la chaînette

$$e^{z/k}\cos\frac{x}{k}=1$$

trouvée par Coriolis.