

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ДИНАМИКЕ ГИБКОГО ВАЛА

К. В. МЕЛНОВ

(Ленинград)

Динамика гибкого вала представляет большое число разнообразных задач, решению которых посвящено весьма значительное количество работ, не прекращающихся появляться в печати, начиная с 1892 г. Однако далеко не все из поставленных задач могут считаться окончательно разрешенными, и потому настоящая работа имеет своей целью, где это окажется возможным, несколько продвинуть исследование некоторых из них,

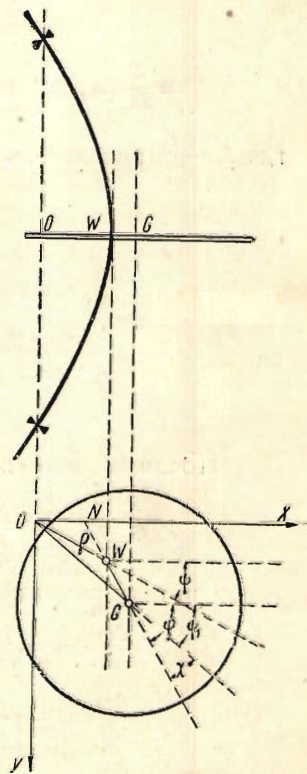
В качестве первой задачи рассматривается вращение вертикального вала с эксцентрично насаженным в его середине диском без учета массы самого вала. Хотя эта задача и является одной из простейших и служила темой многочисленных исследований, однако применение к ней общих методов аналитической механики дает возможность получить некоторые новые результаты.

I. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ВАЛ С ОДНИМ ДИСКОМ

A. Элементарное исследование малых колебаний около стационарного движения

1. Дифференциальные уравнения движения

Пусть O — след на горизонтальной плоскости оси неизогнутого вала (фиг. 1), G — центр тяжести диска, W — точка пересечения оси вала с диском, φ — угол поворота вала, ψ — угол поворота плоскости кривизны вала, e — эксцентриситет диска, m и χ — масса и радиус инерции диска, c — постоянная, характеризующая упругие свойства вала. Введем еще



Фиг. 1.

два угла: ψ_1 — полярный угол центра тяжести G и угол $\chi = \varphi - \psi$, тогда мы будем иметь:

$$L = T + U = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} m \kappa^2 \dot{\varphi}^2 - c \frac{\rho^2}{2}$$

или, так как

$$\begin{aligned} \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}_1^2, \\ \rho^2 &= r^2 + e^2 - 2re \cos \chi, \end{aligned}$$

то

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r^2 + \kappa^2) \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m \kappa^2 \dot{\chi}^2 + m \kappa^2 \dot{\psi}_1 \dot{\chi} - \frac{1}{2} c r^2 + c e r \cos \chi. *$$

Вводим для симметрии обозначения:

$$r = q_1, \quad \chi = q_2, \quad \psi_1 = q_3,$$

тогда функция L переписется:

$$L = \frac{1}{2} [m \dot{q}_1^2 + m (q_1^2 + \kappa^2) \dot{q}_3^2 + m \kappa^2 \dot{q}_2^2 + 2 m \kappa^2 \dot{q}_2 \dot{q}_3] - \frac{1}{2} c q_1^2 + c e q_1 \cos q_2.$$

Составляем функцию Гамильтона $H = -L + \sum \dot{q}_k p_k$, где $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Воспользуемся известным соотношением:

$$\begin{aligned} -T + \sum \dot{q}_k p_k &= \\ &= \frac{1}{2\Delta} (A_{11} p_1^2 + A_{22} p_2^2 + A_{33} p_3^2 + 2A_{12} p_1 p_2 + 2A_{13} p_1 p_3 + 2A_{23} p_2 p_3), \end{aligned}$$

где Δ — определитель квадратичной формы T , а A_{ij} — его миноры:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m\kappa^2 & m\kappa^2 \\ 0 & m\kappa^2 & m(q_1^2 + \kappa^2) \end{vmatrix} = m^3 \kappa^2 q_1^2,$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= m^2 \kappa^2 q_1^2, & A_{12} &= 0, \\ A_{22} &= m^2 (q_1^2 + \kappa^2), & A_{13} &= 0, \\ A_{33} &= m^2 \kappa^2, & A_{23} &= -m^2 \kappa^2. \end{aligned}$$

После подстановки и некоторых очевидных преобразований получим:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m\kappa^2} + \frac{(p_2 - p_3)^2}{2mq_1^2} + \frac{1}{2} c q_1^2 - c e q_1 \cos q_2. \quad (1)$$

Система канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{p_1}{m}, & \frac{dp_1}{dt} &= \frac{(p_2 - p_3)^2}{mq_1^3} - c q_1 + c e \cos q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{p_2}{m\kappa^2} + \frac{p_2 - p_3}{mq_1^2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -c e q_1 \sin q_2, \\ \frac{dq_3}{dt} &= -\frac{p_2 - p_3}{mq_1^2}, & \frac{dp_3}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

* Здесь отброшен постоянный член $-\frac{1}{2} c e^2$, который все равно не входит в выражения для производных функции L .

2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения. Стационарное движение

Из уравнений (2) видно, что координата q_3 циклическая и, следовательно, система допускает интеграл:

$$p_3 = p_3^0 = \text{const.}$$

Используя этот интеграл и отбрасывая пару уравнений, соответствующих переменной q_3 , мы получим новую каноническую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{p_1}{m}, & \frac{dp_1}{dt} &= \frac{(p_2 - p_3^0)^2}{mq_1^3} - cq_1 + ce \cos q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{p_2}{m\kappa^2} + \frac{p_2 - p_3^0}{mq_1^2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -ceq_1 \sin q_2, \end{aligned} \quad (4)$$

пределяемую функцией Гамильтона:

$$H^* = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m\kappa^2} + \frac{(p_2 - p_3^0)^2}{2mq_1^2} + \frac{1}{2}cq_1^2 - ceq_1 \cos q_2. \quad (5)$$

Мы получим стационарное движение, положив в уравнениях (4) правые части равными нулю:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{m} &= 0, & \frac{(p_2 - p_3^0)^2}{mq_1^3} - cq_1 + ce \cos q_2 &= 0, \\ \frac{p_2}{m\kappa^2} + \frac{p_2 - p_3^0}{mq_1^2} &= 0, & -ceq_1 \sin q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем постоянные значения для q_1 , q_2 , p_1 и p_2 , которые обозначим знаком 0 :

$$\begin{aligned} p_1^0 &= 0, & q_2^0 &= 0 \text{ или } \pi, \\ p_3^0 - p_2^0 &= \frac{q_1^{02} p_3^0}{\kappa^2}, & (p_3^0 - p_2^0) &= m q_1^{03} c (q_1^0 \mp e), \\ q_1^0 p_2^{02} &= m \kappa^4 c (q_1^0 \mp e). \end{aligned} \quad (6_1)$$

Здесь, как и везде далее, верхний знак соответствует решению $q_2^0 = 0$, а нижний — решению $q_2^0 = \pi$. Последнему уравнению можно удовлетворить, положив

$$p_2^0 = m \kappa^2 \omega, \quad q_1^0 = \pm \frac{e k^2}{k^2 - \omega^2}, \quad (6_2)$$

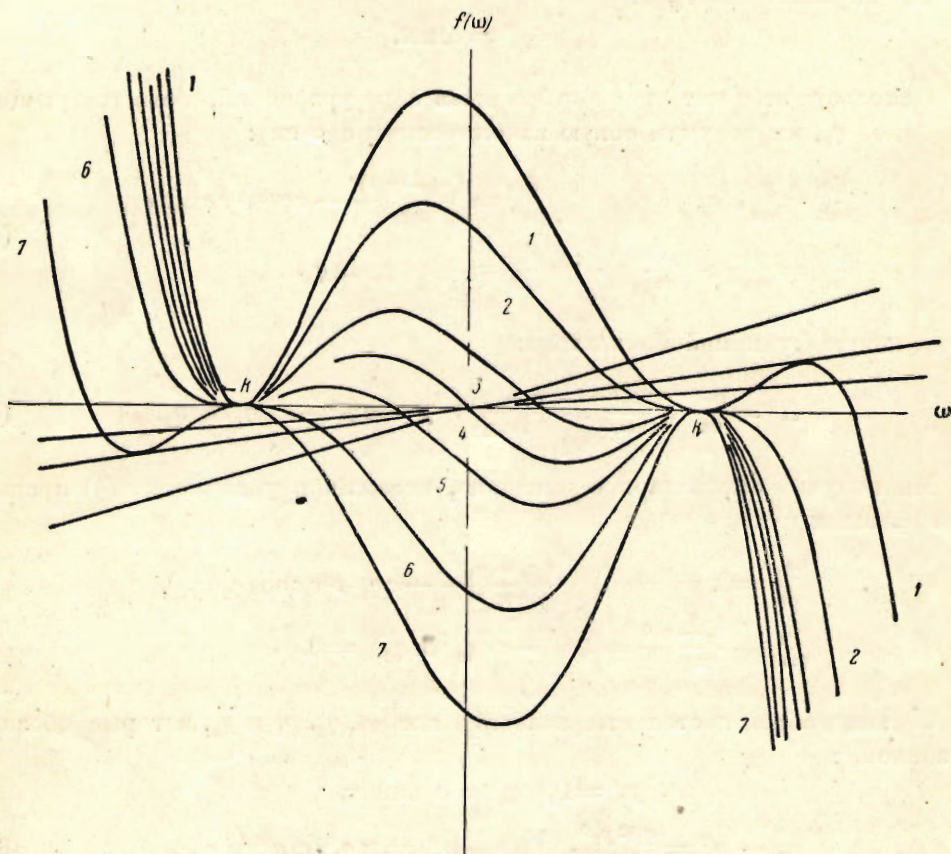
где $k^2 = \frac{c}{m}$, а ω — постоянная, значение которой определяется из второго соотношения, связывающего q_1^0 и p_2^0 , именно:

$$p_3^0 - p_2^0 = \frac{q_1^{02} p_2^0}{\kappa^2},$$

которое для определения ω дает:

$$\varepsilon^2 k^4 \omega = (\beta - \omega)(k^2 - \omega^2)^2, \quad (7)$$

где для сокращения письма положено $\frac{p_3^0}{m x^2} = \beta$, $\frac{e}{x} = \epsilon$. Так как одновременное изменение знаков β и ω на обратные не меняет вида этого уравнения, то отрицательным значениям постоянной β (а следовательно, и постоянной интегрирования p_3^0) соответствуют корни, численно равные, но противоположные



Фиг. 2.

по знаку корням, соответствующим положительным значениям β . Вычерчивая график функции $f(\omega) = (\beta - \omega)(k^2 - \omega^2)^2$ в предположениях

$$\beta > k, \quad \beta = k, \quad k > \beta > 0, \quad \beta = 0, \quad 0 > \beta > -k, \quad \beta = -k, \quad \beta < -k,$$

мы получим представленные на фиг. 2 кривые (1) ... (7).

Из этого графика видно, что, вообще говоря, уравнение (7) имеет один вещественный корень и только для $\beta > k$ и $\beta < -k$ при достаточно малом ϵ уравнение (7) может иметь один, два или три вещественных корня.

Остается выяснить физическое значение величины ω .

Так как

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1},$$

то

$$p_2 = m x^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) = m x^2 (\dot{\chi} + \dot{\psi}_1) = m x^2 \dot{\phi}.$$

Сравнивая с (6₂), находим:

$$\omega = \dot{\phi},$$

т. е. ω представляет угловую скорость вращения вала. Теперь ясно, что k равно критической угловой скорости и что второе из равенств (6₂) выражает известное свойство гибкого вала, несущего нагрузку, что при угловой скорости ниже критической точка W лежит между точками O и G ($q_2^0 = 0$), а при угловой скорости большей критической точка G лежит между O и W ($q_2^0 = \pi$).

Интегрирование будет закончено нахождением q_3 , т. е. угла ψ_1 , из третьего уравнения системы (2). Так как в рассматриваемом нами стационарном движении $\chi = 0$ или π , то $\psi_1 = \psi$, и, следовательно, это уравнение определяет вращение плоскости кривизны изогнутого вала. Подставляя значения p_2 и p_3 , мы получим:

$$\frac{dq_3}{dt} = \frac{x^2}{q_1^2} (\beta - \omega). \quad (8)$$

Но из рассмотрения кривых фиг. 2 видно, что при $\beta > 0$ всегда $0 < \omega < \beta$ и при $\beta < 0$ всегда $0 > \omega > \beta$, следовательно, знак $\frac{dq_3}{dt}$ всегда одинаков со знаком ω , т. е. вращение плоскости кривизны вала происходит в том же направлении, в котором вращается сам вал.

3. Дифференциальные уравнения малых колебаний около стационарного движения

Уравнения (6₁) и (6₂) определяют некоторое стационарное движение системы, характеризуемой функцией Гамильтона H^* . Рассмотрим малые колебания около этого движения. Для этого положим:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^0 + \xi_1, & q_2 &= q_2^0 + \xi_2, \\ p_1 &= p_1^0 + \eta_1, & p_2 &= p_2^0 + \eta_2. \end{aligned}$$

Функция H^* распадается на сумму членов различных порядков относительно $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2$, именно:

$$H^* = H_0^* + H_1^* + H_2^* + H_3^* + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} H_0^* &= H^*(q_1^0, q_2^0; p_1^0, p_2^0) = \text{const}, \\ H_1^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial q_1} \right)_0 \xi_1 + \left(\frac{\partial H^*}{\partial q_2} \right)_0 \xi_2 + \left(\frac{\partial H^*}{\partial p_1} \right)_0 \eta_1 + \left(\frac{\partial H^*}{\partial p_2} \right)_0 \eta_2, \\ H_2^* &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 H^*}{\partial q_1^2} \right)_0 \xi_1^2 + \dots \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

H_0^* , как постоянная, в дальнейшем значения не имеет; H_1^* тождественно обращается в нуль в силу самого определения значений $q_1^0, q_2^0; p_1^0, p_2^0$. Сле-

довательно, надо вычислять функции H_k^* , начиная с $k=2$. Введем обозначения:

$$H_2^* = \frac{1}{2} (a_{11} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2 + 2 a_{12} \xi_1 \xi_2) + b_{11} \xi_1 \eta_1 + b_{12} \xi_1 \eta_2 + b_{21} \xi_2 \eta_1 + b_{22} \xi_2 \eta_2 + \\ + \frac{1}{2} (c_{11} \eta_1^2 + c_{22} \eta_2^2 + 2 c_{12} \eta_1 \eta_2), \quad (9_1)$$

$$H_3^* = \frac{1}{6} \left\{ a_{111} \xi_1^3 + a_{222} \xi_2^3 + a_{333} \eta_1^3 + a_{444} \eta_2^3 + 3a_{112} \xi_1^2 \xi_2 + 3a_{113} \xi_1^2 \eta_1 + \right. \\ + 3a_{114} \xi_1^2 \eta_2 + 3a_{122} \xi_1 \xi_2^2 + 3a_{2,3} \xi_2^2 \eta_1 + 3a_{224} \xi_2^2 \eta_2 + 3a_{133} \xi_1 \eta_1^2 + \\ + 3a_{233} \xi_2 \eta_1^2 + 3a_{334} \eta_1^2 \eta_2 + 3a_{144} \xi_1 \eta_2^2 + 3a_{244} \xi_2 \eta_2^2 + 3a_{344} \eta_1 \eta_2^2 + \\ \left. + 6a_{123} \xi_1 \xi_2 \eta_1 + 6a_{124} \xi_1 \xi_2 \eta_2 + 6a_{134} \xi_1 \eta_1 \eta_2 + 6a_{234} \xi_2 \eta_1 \eta_2 \right\}; \quad (9_2)$$

тогда непосредственные вычисления дадут:

$$a_{11} = 3 \frac{(p_2^0 - p_3^0)^2}{m q_1^{04}} + c, \quad b_{11} = 0, \quad c_{11} = \frac{1}{m} \\ a_{22} = \pm c e q_1^0, \quad b_{12} = -\frac{2(p_2^0 - p_3^0)}{m q_1^{03}}, \quad c_{22} = \frac{1}{m x^2} + \frac{1}{m q_1^{02}} \quad (10_1) \\ a_{12} = 0, \quad b_{21} = 0, \quad c_{12} = 0 \\ b_{22} = 0,$$

$$a_{111} = -12 \frac{(p_2^0 - p_3^0)^2}{m q_1^{05}}, \quad a_{114} = 6 \frac{p_2^0 - p_3^0}{m q_1^4}, \quad a_{122} = \pm c e, \quad a_{144} = -\frac{2}{m q_1^{03}}, \quad (10_2)$$

все остальные коэффициенты функции H_3^* обращаются в нули.

Дифференциальные уравнения малых колебаний при сохранении членов второго порядка относительно переменных будут:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \quad * \quad * \quad c_{11} \eta_1 \quad * \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \quad b_{12} \xi_1 \quad * \quad * \quad + c_{22} \eta_2 + \frac{1}{2} a_{114} \xi_1^2 + a_{144} \xi_1 \eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{dt} = -a_{11} \xi_1 \quad * \quad * \quad - b_{12} \eta_2 - \frac{1}{2} a_{111} \xi_1^2 - a_{114} \xi_1 \eta_2 - \frac{1}{2} a_{122} \xi_2^2 - \frac{1}{2} a_{144} \eta_2^2 \\ \frac{d\eta_2}{dt} = \quad * \quad - a_{22} \xi_2 \quad * \quad * \quad - a_{112} \xi_1 \xi_2 \quad (11)$$

4. Интегрирование уравнений малых колебаний. Первое приближение

Рассматривая уравнения (11) как дифференциальные уравнения возмущенного движения, мы можем искать их решение в виде рядов:

$$\xi_s = \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} + \dots + \xi_s^{(m)} + \dots, \\ \eta_s = \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} + \dots + \eta_s^{(m)} + \dots, \quad (s=1, 2) \quad (12)$$

принимая $\xi_s^{(m)}, \eta_s^{(m)}$ ($s=1, 2$) и их первые производные по времени за величины

порядка m . Подставляя (12) в (11) и приравнявая в левой и правой частях члены одного и того же порядка, мы получим последовательность систем уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1^{(1)}}{dt} &= * & * & c_{11} \eta_1^{(1)} & * \\ \frac{d\xi_2^{(1)}}{dt} &= b_{12} \xi_1^{(1)} & * & * & + c_{22} \eta_2^{(1)} \\ \frac{d\eta_1^{(1)}}{dt} &= - a_{11} \xi_1^{(1)} & * & * & - b_{12} \eta_2^{(1)} \\ \frac{d\eta_2^{(1)}}{dt} &= * & - a_{22} \xi_2^{(1)} & * & * \end{aligned} \quad (13_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1^{(2)}}{dt} &= * & * & c_{11} \eta_1^{(2)} & * \\ \frac{d\xi_2^{(2)}}{dt} &= b_{12} \xi_1^{(2)} & * & * & + c_{22} \eta_2^{(2)} + \frac{1}{2} a_{114} \xi_1^{(1)^2} + a_{144} \xi_1^{(1)} \eta_2^{(1)}, \\ \frac{d\eta_1^{(2)}}{dt} &= - a_{11} \xi_1^{(2)} & * & * & - b_{12} \eta_2^{(2)} - \frac{1}{2} a_{111} \xi_1^{(1)^2} - a_{114} \xi_1^{(1)} \eta_2^{(1)} - \\ & & & & - \frac{1}{2} a_{122} \xi_2^{(1)^2} - \frac{1}{2} a_{144} \eta_2^{(1)^2}, \\ \frac{d\eta_2^{(2)}}{dt} &= * & - a_{22} \xi_2^{(2)} & * & * - a_{122} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (13_2)$$

и т. д.

Система (13₁) по отношению к системе (11) является системой уравнений в вариациях, она представляет систему линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами относительно переменных $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\eta_1^{(1)}$, $\eta_2^{(1)}$.

Определив из этой системы первое приближение и подставив найденные значения в (13₂), мы будем иметь систему уравнений для определения второго приближения и т. д.¹

Возвращаясь к системе (13₁), ищем ее решение в форме:

$$\xi_1^{(1)} = a_1 \sin st, \quad \xi_2^{(1)} = a_2 \cos st, \quad \eta_1^{(1)} = a_3 \cos st, \quad \eta_2^{(1)} = a_4 \sin st; \quad (14)$$

тогда характеристическое уравнение принимает вид:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} -s & 0 & c_{11} & 0 \\ b_{12} & s & 0 & c_{22} \\ -a_{11} & 0 & s & -b_{12} \\ 0 & -a_{22} & 0 & -s \end{vmatrix} = \quad (15)$$

$$= s^4 - (a_{11} c_{11} + a_{22} c_{22}) s^2 - a_{22} c_{11} (a_{11} c_{22} - b_{12}^2) = 0.$$

Так как корни этого уравнения попарно равны по величине и отличаются только знаками

$$s_1, -s_1, \quad s_2, -s_2, \quad * \quad (16)$$

¹ Поскольку в системе (11) отброшены все члены порядка выше второго, не имеет смысла в разложениях (12) идти далее второго члена.

* Случай кратных корней мы пока не рассматриваем.

то для сохранения полного числа произвольных постоянных необходимо или ввести в выражения (14) начальные фазы или параллельно с (14) рассмотреть решение в другой форме. Ради большей симметрии формул отдаем предпочтение второй форме решения, поэтому полагаем:

$$\xi_1^{(1)} = b_1 \cos st, \quad \xi_2^{(1)} = b_2 \sin st, \quad \eta_1^{(1)} = b_3 \sin st, \quad \eta_2^{(1)} = b_4 \cos st. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому решению, будет то же самое, но определитель представится в иной форме:

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} s & 0 & c_{11} & 0 \\ b_{12} & -s & 0 & c_{22} \\ -a_{11} & 0 & -s & -b_{12} \\ 0 & -a_{22} & 0 & s \end{vmatrix} = \quad (18)$$

$$= s^4 - (a_{11} c_{11} + a_{22} c_{22}) s^2 + a_{22} c_{11} (a_{11} c_{22} - b_{12}^2) = 0.$$

Для составления общего интеграла выписываем миноры определителей $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$, соответствующие первой строке каждого из них:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} &= -s^3 + a_{22} c_{22} s, & \Delta_{11}^{(2)} &= s^3 - a_{22} c_{22} s = -\Delta_{11}^{(1)}, \\ \Delta_{12}^{(1)} &= b_{12} s^2, & \Delta_{12}^{(2)} &= b_{12} s^2 = \Delta_{12}^{(1)}, \\ \Delta_{13}^{(1)} &= -a_{11} s^2 + a_{22} (a_{11} c_{22} - b_{12}^2), & \Delta_{13}^{(2)} &= -a_{11} s^2 + a_{22} (a_{11} c_{22} - b_{12}^2) = \Delta_{13}^{(1)}, \\ \Delta_{14}^{(1)} &= -a_{22} b_{12} s, & \Delta_{14}^{(2)} &= a_{22} b_{12} s = -\Delta_{14}^{(1)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись полученной таким образом зависимостью между минорами, соответствующими первому и второму решениям, мы можем все коэффициенты в общем интеграле выразить через миноры определителя $\Delta^{(1)}$. Отбрасывая верхний значок как утрачивающий в дальнейшем значение, мы получим:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= C_1 \Delta_{11}(s_1) \sin s_1 t - C_2 \Delta_{11}(s_1) \cos s_1 t + C_3 \Delta_{11}(s_2) \sin s_2 t - C_4 \Delta_{11}(s_2) \cos s_2 t, \\ \xi_2^{(1)} &= C_1 \Delta_{12}(s_1) \cos s_1 t + C_2 \Delta_{12}(s_1) \sin s_1 t + C_3 \Delta_{12}(s_2) \cos s_2 t + C_4 \Delta_{12}(s_2) \sin s_2 t, \\ \eta_1^{(1)} &= C_1 \Delta_{13}(s_1) \cos s_1 t + C_2 \Delta_{13}(s_1) \sin s_1 t + C_3 \Delta_{13}(s_2) \cos s_2 t + C_4 \Delta_{13}(s_2) \sin s_2 t, \\ \eta_2^{(1)} &= C_1 \Delta_{14}(s_1) \sin s_1 t - C_2 \Delta_{14}(s_1) \cos s_1 t + C_3 \Delta_{14}(s_2) \sin s_2 t - C_4 \Delta_{14}(s_2) \cos s_2 t. \end{aligned} \quad (19)$$

5. Исследование корней характеристического уравнения. Устойчивость по первому приближению¹

Переписывая характеристическое уравнение (15) под видом:

$$s^4 - 2\alpha s^2 + \beta = 0,$$

где

$$2\alpha = a_{11} c_{11} + a_{22} c_{22}, \quad \beta = a_{22} c_{11} (a_{11} c_{22} - b_{12}^2),$$

мы получаем условия вещественности его корней под видом:

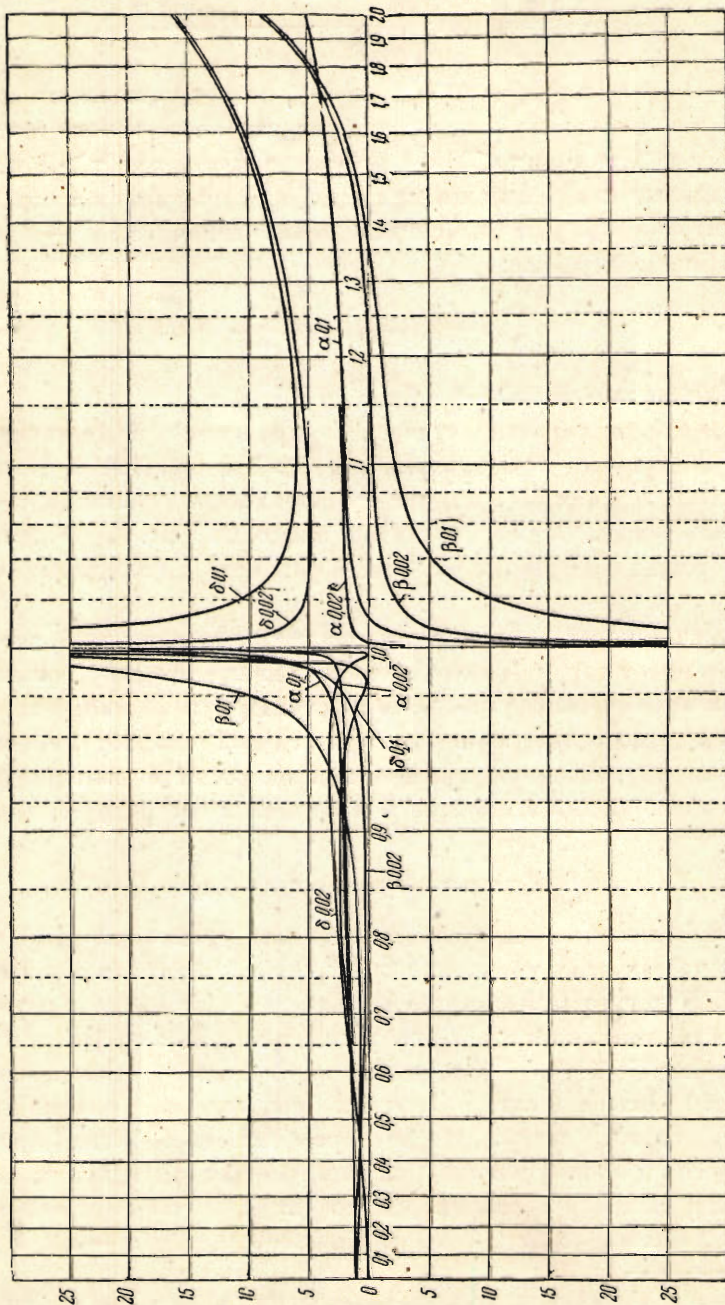
$$a^2 - \beta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.*$$

¹ Выражению „устойчивость по первому приближению“ здесь не придается того значения, что первое приближение решает вопрос об устойчивости.

* Ниже будет показано, что $a^2 - \beta$ не может равняться нулю, следовательно, случай кратных корней исключается.

В силу (10₁) имеем:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} \left[3 \frac{(p_2^0 - p_3^0)^2}{mq_1^{04}} + c \right] \pm \frac{ceq_1^0}{m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{q_1^{02}} \right) \right\},$$



Фиг. 3.

или, подставляя сюда значение q_1^0 из (6₂), принимая во внимание (7) и вводя для краткости обозначение $\frac{\omega}{k} = \tau$:

$$\alpha = k^2 \left[\tau^2 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{1 - \tau^2} \right]. \quad (20_1)$$

Точно так же находим:

$$\beta = k^4 \left[(\tau^2 - 1)^2 + \frac{\varepsilon^2 (3\tau^2 + 1)}{1 - \tau^2} \right], \quad (20_2)$$

$$\alpha^2 - \beta = k^4 \left[4\tau^2 + \frac{\varepsilon^4}{4(1 - \tau^2)^2} - 2 \frac{\varepsilon^2 \tau^2}{1 - \tau^2} \right]. \quad (20_3)$$

При $\varepsilon = 0$ все три величины α , β , $\alpha^2 - \beta$, очевидно, положительны. При ε не равном нулю поведение каждой требует самостоятельного рассмотрения. Что касается α и β , то при $\tau < 1$ α и β больше нуля, при $\tau > 1$ и достаточно близком к единице α и β меньше нуля, но с возрастанием τ они становятся опять положительными. Для выяснения знака величины $\alpha^2 - \beta$ перепишем выражение в скобках в виде:

$$\left(2\tau - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{1 - \tau^2} \right)^2 + \frac{2\tau\varepsilon^2}{1 + \tau}.$$

Откуда мы видим, что $\alpha^2 - \beta$ всегда > 0 .

Итак, все корни характеристического уравнения вещественны для значений τ в промежутке от 0 до 1; затем при $\tau > 1$ и достаточно близком к единице они делаются мнимыми, но при дальнейшем возрастании τ становятся опять вещественными. Все это наглядно видно из фиг. 3, где даны графики выражений, стоящих в прямых скобках в равенствах (20) для значений ε 0.1 и 0.02.¹

Поэтому на основании первого приближения мы заключаем, что движение устойчиво, т. е. имеет характер колебательного движения для угловых скоростей вала, меньших критической угловой скорости. При этой скорости оно теряет устойчивость и приобретает ее вновь при угловой скорости, превосходящей некоторую величину, большую критической скорости и зависящую от величины ε , т. е. от отношения эксцентриситета диска к его радиусу инерции.²

6. Второе приближение

Второе приближение определится системой уравнений (13₂), после того как в правых частях этих уравнений $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$ и $\eta_2^{(1)}$ будут заменены их значениями из (19). Интегрирование может быть выполнено методом вариации произвольных постоянных, однако форма рассматриваемых уравнений позволяет сделать это проще. Действительно, после подстановки в правых частях уравнений системы появятся десять различных произведений попарно множителей $\sin s_1 t$, $\sin s_2 t$, $\cos s_1 t$, $\cos s_2 t$. После преобразования этих произведений к суммам синусов и косинусов мы получим члены девяти типов: постоянные члены, не содержащие ни синуса, ни косинуса, и члены линейные относительно $\sin 2s_1 t$, $\sin 2s_2 t$, $\cos 2s_1 t$, $\cos 2s_2 t$, $\sin (s_1 + s_2)t$, $\sin (s_1 - s_2)t$, $\cos (s_1 + s_2)t$

¹ Для большей наглядности этих графиков по оси абсцисс взята логарифмическая шкала. Буква δ обозначает разность $\alpha^2 - \beta$.

² Результаты раздела 5 находятся в полном согласии с результатом, полученным проф. Th. Pöschl в его работе „Zur Frage der Stabilität rotierender Wellen“. (Schweiz. Bauzeitung, 80, S. 22, 1922), цитируемой им в его обзорной статье в „ZS f. angew. Math. u. Mech.“, 3, S. 300—301, 1923.

и $\cos(s_1 - s_2)t$. Этим членам будут соответствовать частные решения системы того же вида. Но для нас представляют особый интерес только члены, период которых близок к одному из периодов $\frac{2\pi}{s_1}$ и $\frac{2\pi}{s_2}$ колебаний, определяемых первым приближением. Эти члены вызовут вынужденные колебания, которые придется принять во внимание уже в первом приближении. Так как $s_1 > 0$ и $s_2 > 0$ и $s_1 > s_2$, то возможность указанной выше близости периодов можно предполагать только у членов с аргументами $2s_2t$ и $(s_1 - s_2)t$, именно при $s_1 \approx 2s_2$. Поэтому мы сохраняем только члены, содержащие $\sin 2s_2t$, $\cos 2s_2t$, $\sin(s_1 - s_2)t$ и $\cos(s_1 - s_2)t$.

Отбрасывая для простоты верхние значки у переменных ξ и η , мы получим дифференциальные уравнения в форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}_1}{dt} &= * * c_{11} \eta_1 * \\ \frac{d\dot{\xi}_2}{dt} &= b_{12} \xi_1 * * + c_{22} \eta_2 + \alpha_{21} \sin 2s_2t + \alpha_{22} \cos 2s_2t + \alpha_{23} \sin(s_1 - s_2)t + \\ &\quad + \alpha_{24} \cos(s_1 - s_2)t, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -a_{11} \dot{\xi}_1 * * - b_{12} \eta_2 + \alpha_{31} \sin 2s_2t + \alpha_{32} \cos 2s_2t + \alpha_{33} \sin(s_1 - s_2)t + \\ &\quad + \alpha_{34} \cos(s_1 - s_2)t, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= * - a_{22} \dot{\xi}_2 * * + \alpha_{41} \cos 2s_2t + \alpha_{42} \sin 2s_2t + \alpha_{43} \cos(s_1 - s_2)t + \\ &\quad + \alpha_{44} \sin(s_1 - s_2)t. \end{aligned}$$

Будем искать частное решение вида:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_{11} \sin 2s_2t + A_{12} \cos 2s_2t + A_{13} \sin(s_1 - s_2)t + A_{14} \cos(s_1 - s_2)t, \\ \xi_2 &= A_{21} \cos 2s_2t + A_{22} \sin 2s_2t + A_{23} \cos(s_1 - s_2)t + A_{24} \sin(s_1 - s_2)t, \\ \eta_1 &= A_{31} \cos 2s_2t + A_{32} \sin 2s_2t + A_{33} \cos(s_1 - s_2)t + A_{34} \sin(s_1 - s_2)t, \\ \eta_2 &= A_{41} \sin 2s_2t + A_{42} \cos 2s_2t + A_{43} \sin(s_1 - s_2)t + A_{44} \cos(s_1 - s_2)t, \end{aligned} \quad (21)$$

где A_{ij} — коэффициенты, подлежащие определению. Выполняя подстановку и приравнивая в левой и правой частях члены с синусами и косинусами одного и того же аргумента, мы получим четыре системы уравнений для определения шестнадцати коэффициентов A_{ij} . Первая из этих систем будет:

$$\begin{aligned} -2s_2 A_{11} * + c_{11} A_{31} * &= 0, \\ b_{12} A_{11} + 2s_2 A_{21} * + c_{22} A_{41} &= -\alpha_{21}, \\ -a_{11} A_{11} * + 2s_2 A_{31} - b_{12} A_{41} &= -\alpha_{31}, \\ * - a_{22} A_{21} * - 2s_2 A_{41} &= -\alpha_{41}. \end{aligned} \quad (22)$$

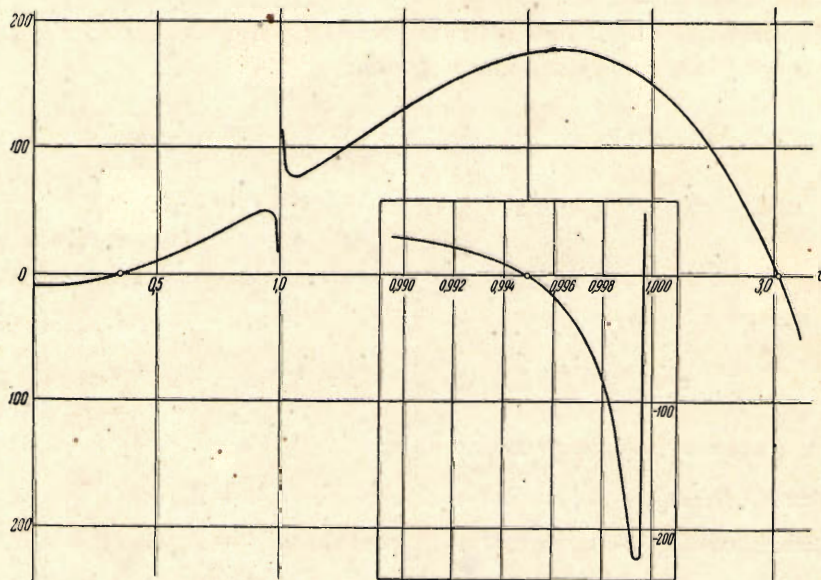
Три остальные системы аналогичны этой, но в третьей и четвертой вместо $2s_2$ будет входить $s_1 - s_2$. Решение этих систем дает, вообще говоря, совершенно определенные значения для коэффициентов A_{ij} , но так как определитель этих систем представляет определитель Δ , в котором s заменено через $2s_2$ или $s_1 - s_2$, то A_{ij} могут принимать сколь угодно большие значения при $s_1 \sim 2s_2$, а при точном равенстве $s_1 = 2s_2$ решение в рассматриваемой форме теряет смысл и должно быть заменено другим.

Итак, вопрос сводится к выяснению возможности существования между корнями характеристического уравнения соотношения $s_1 = 2s_2$. Подставляя в это равенство значения s_1 и s_2 и возводя обе части в квадрат, находим:

$$3\alpha = 5\sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

или

$$16\alpha^2 = 25\beta.$$



Фиг. 4.

Наконец, подставляя значения α и β из (20₁) и (20₂) после элементарных преобразований, получим:

$$-9(\tau^2 + 1)^2 + 100\tau^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 - \tau^2}(59\tau^2 + 9) + 4\left(\frac{\varepsilon^2}{1 - \tau^2}\right)^2 = 0. \quad (23)$$

Если предполагать ε малой величиной, то нетрудно убедиться, что уравнение (23) имеет четыре вещественных корня: три меньших единицы и один больший единицы. При этом два из корней, меньших единицы, лежат очень близко к единице и тем ближе, чем меньше ε . Например, для $\varepsilon = 0.1$ их приближенные значения будут 0.994 и 0.9997 (фиг. 4).

Для положения двух других корней можно также указать довольно тесные границы. Так, для $\varepsilon = 0.1$ и тем более для еще меньших значений ε эти корни лежат соответственно в промежутках:

$$(0.3; 0.4) \text{ и } (3.0; 3.1).$$

Итак, второе приближение показывает, что для рассматриваемой системы, кроме критической угловой скорости k , зависящей от упругой постоянной c вала и массы m диска, должны существовать еще критиче-

ские скорости, зависящие от ϵ : две — меньшие k и очень близкие к k и две другие — одна меньшая, другая большая k , и приближенно равные $0.35k$ и $3k$.¹

7. Выводы

Полученные результаты можно резюмировать в следующей форме:

1. В стационарном движении каждому значению постоянной интегрирования p_3^0 соответствует, вообще говоря, одна определенная угловая скорость, но при $|p_3^0| > |k|$ и при достаточно малых значениях ϵ возможны три различных режима движения. При некотором ϵ два из них сливаются, а при дальнейшем увеличении ϵ остается один режим.

2. Вращение плоскости кривизны вала происходит всегда в том же направлении, в котором вращается сам вал.

3. Первое приближение указывает на устойчивость стационарного движения при $\omega < k$ и при $\omega > k + \eta$, где k — критическая скорость, а η — некоторая положительная величина, зависящая от ϵ . Для угловых скоростей в промежутке между k и $k + \eta$ стационарное движение неустойчиво. Приближенные значения η при ϵ , равном 0.1 и 0.02, соответственно равны 0.35 и 0.2.

4. Второе приближение указывает на существование, кроме критической скорости k , еще четырех критических скоростей. При достаточно малом ϵ две из них практически совпадают с k , две другие приближенно равны $0.35k$ и $3k$.

STUDIES IN FLEXIBLE SHAFT DYNAMICS

K. V. MELIKOV

Leningrad

(Summary)

I. A vertical shaft with a fly-wheel

A. An elementary study of small oscillations about steady motion.

1. To every value of the constant of integration p_3^0 in a steady motion there corresponds generally a determinate value of angular velocity ω ; but for $|p_3^0| > |k|$ and sufficiently small values of ϵ , three regimes of motion are possible. For a certain value of ϵ two of them coincide and for greater values of ϵ only one regime remains.

2. The plane of the bent shaft revolves in the same direction as the shaft itself.

¹ Имеются наблюдения, согласно которым иногда вал бьет при угловых скоростях, значительно превосходящих критическую. Проф. Е. Л. Николаи в своем докладе, прочитанном 17 X 1937 в Ленинградском механическом обществе, (Труды Л. И. И., 3—15, № 6, 1937), дал теорию такого „самовозбуждения“ вала, основанную на допущении влияния внутренних сопротивлений. Не дает ли рассмотрение второго приближения более простого и убедительного объяснения этого явления?

3. The first approximation shows the stability of steady motion for $\omega < k$ and $\omega > k + \eta$, where k is the critical velocity and η is a certain positive quantity depending upon ϵ . For angular velocities in the interval between k and $k + \eta$ the motion is unstable. For ϵ equal to 0.1 and 0.02 the approximate values of η are 0.35 and 0.20 respectively.

4. The second approximation shows, besides the critical velocity k , the existence of four more critical velocities. For a sufficiently small value of ϵ two of them practically coincide with k , the two others are approximately equal to $0.35k$ and $3k$.
