АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ЗАМЕТКИ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО СПОСОБУ ШТЕРМЕРА

Л. Г. АФЕНДИК

(Днепропетровск)

При решении многих задач прикладной математики приходится прибегать к численному интегрированию дифференциальных уравнений. Одним из наиболее простых по схеме вычислений способов численного интегрирования уравнений второго порядка является, как известно, способ Штермера.

В литературе по прикладной математике, главным образом немецкой, имеется несколько статей о способе Штермера, однако все они, за исключением разве статьи G. Schulz,[1] в вопросе сходимости и оценки погрешности ограничиваются разбором численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка (способ Adams). При этом оценка погрешности дается в неудобной для практических вычислений форме.

Автор этой статьи выражает оценку погрешности при численном интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка несколько иным образом, чем это сделано в статье G. Schulz. Полученная при интегрировании ошибка может быть определена через разности непосредственно из таблиц вычислений.

Положим, что в заданном интервале интегрируется по способу Штермера уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x, y). \tag{1}$$

Интервал изменения переменной x разобьем на равные участки

$$h=x_{i+1}-x_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

Истинные значения функции y, соответствующие значениям x_i, обозначим через $y(x_i)$, а приближенные значения, найденные при численном инте-

[1] G. Schulz, Fehlerabschätzung für das Störmersche Integrationsverfahren, ZS. f. ang. Math. und Mech., B. 14, H. 4, 1934.

грировании, через y_i. Последовательные разности истинных и приближенных значений функции будем обозначать $\Delta y(x_i) = y(x_{i+1}) - y(x_i)$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Предположим теперь, что первые значения функции до y_n включительно уже найдены. Причем сначала будем полагать, что они совпадают с истинными значениями функции. Тогда для определения y_{n+1} достаточно вычислить

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1},$$

так как

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1}. \tag{2}$$

Для получения точного значения второй разности проинтегрируем сначала уравнение (1) один раз:

$$y'(x) = \int_{x_n}^{x} f(x, y)\, dx + y'(x_n). \tag{3}$$

Полученное уравнение (3) проинтегрируем в пределах от x_n до x_{n+1} и от x_{n-1} до x_n. Будем иметь:

$$\Delta y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx \int_{x_n}^{x} f(x, y)\, dx + hy'(x_n), \tag{4}$$

$$\Delta y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx \int_{x_n}^{x} f(x, y)\, dx + hy'(x_n). \tag{4_1}$$

Вычтем последнее уравнение из предыдущего и введем функцию

$$\eta(x) = h^2 f(x, y).$$

Тогда точное значение второй разности таково:

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = \frac{1}{h^2}\left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx \int_{x_n}^{x} \eta(x)\, dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx \int_{x_n}^{x} \eta(x)\, dx\right]. \tag{5}$$

Приближенное значение второй разности дает формула Штермера, которую можно представить в общем виде:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \alpha_0 \eta_n + \alpha_1 \Delta \eta_{n-1} + \alpha_2 \Delta^2 \eta_{n-2} + \ldots + \alpha_k \Delta^k \eta_{n-k}. \tag{6}$$

Переходя к числам, получим:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta^3 \eta_{n-3} + \frac{19}{240}\Delta^4 \eta_{n-4} + \ldots \tag{6_1}$$

Вычисления по формуле Штермера (6) обычно ведутся до той разности k-го порядка, которая при заданной точности вычислений является достаточно малой.

Формулу Штермера (6) можно легко получить из уравнения (5), если функцию $\eta(x)$ заменить приближенной функцией η_x. Функция η_x должна при

$$x = x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_k$$

принимать те же значения, что и функция $\eta(x)$. Мы представим ее в виде полинома k-ой степени по формуле Ньютона.

Обозначим через $r_k(x)$ остаточный член; тогда:

$$\eta(x) = \eta_x + r_k(x). \tag{7}$$

Применяя формулу Штермера для определения y_{n+1}, мы при вычислении разности $\Delta^2 y_{n-1}$ получим ошибку. Величина этой ошибки на основании соотношений (5) и (7) равна:

$$R_{n+1,k} = \Delta^2 y(x_{n-1}) - \Delta y_{n-1} = \frac{1}{h^2}\left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx \int_{x_n}^{x} r_k(x)\,dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx \int_{x_n}^{x} r_k(x)\,dx\right], \tag{8}$$

где индекс k обозначает порядок разности, на которой мы останавливаемся при применении формулы Штермера.

Если полностью выразим остаточный член $r_k(x)$ интерполяционной формулы Ньютона и произведем замену переменной $x = x_n + hu$, то из (8) получим:

$$R_{n+1,\,k} = h^{k+1}\,\eta^{(k+1)}(\xi)\left\{\frac{1}{(k+1)!}\left[\int_0^1 du \int_0^u u(u+1)\ldots(u+k)\,du - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-1}^{0} du \int_0^u u(u+1)\ldots(u+k)\,du\right]\right\}. \tag{9}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет коэффициент α_{k+1} при разности $\Delta^{k+1}\eta_{n-(k+1)}$ формулы Штермера (6). Поэтому

$$R_{n+1,\,k} = h^{k+1}\,\alpha_{k+1}\,\eta^{(k+1)}(\xi), \tag{10}$$

где $x_{n-k} < \xi < x_{n+1}$.

Следовательно, верхняя граница ошибки определится неравенством:

$$|R_{n+1,\,k}| < h^{k+1}\,\alpha_{k+1}\,|\eta^{(k+1)}(x)|_{\max}, \tag{11}$$

причем производная $\eta^{(k+1)}(x)$ рассматривается в интервале $(x_{n-k},\ x_{n+1})$.

Для приближенного определения ошибки $R_{n+1,\,k}$ представим производную $\eta^{(k+1)}\xi$ в формуле (10) в виде разностного ряда. Ограничиваясь одним членом ряда, получим:

$$R_{n+1,\,k} = \alpha_{k+1}\,\Delta^{k+1}\,\eta_{n-k}. \tag{12}$$

Таким образом получим приближенное значение верхней границы ошибки:

$$|\overline{R}_{n+1,\,k}| < \alpha_{k+1}\,|\Delta^{k+1}\eta|_{\max}. \tag{13}$$

Определим теперь ошибку, полученную при вычислении функции $y(x_i)$. Истинное значение этой ошибки обозначим через $\varepsilon(x_i)$, а приближенное через ε_i. Таким образом,

$$\varepsilon(x_i)=y(x_i)-y_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Так как начальное значение функции должно быть известно, то $\varepsilon(x_0)=0$. Кроме того,

$$\varepsilon(x_1)=y(x_1)-y_1=\Delta y(x_0)-\Delta y_0.$$

Ошибку при вычислении второй разности будем попрежнему обозначать:

$$R_{n+1,\,k}=\Delta^2 y(x_{n-1})-\Delta^2 y_{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{14}$$

В том случае, когда правая часть дифференциального уравнения (1) не содержит y, получим такие значения ошибок:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x_0)=0,\\
&\varepsilon(x_1)=R_{1,\,k},\\
&\varepsilon(x_2)=2R_{1,\,k}+R_{2,\,k},\\
&\varepsilon(x_3)=3R_{1,\,k}+2R_{2,k}+R_{3,\,k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon(x_i)=i\,R_{1,\,k}+(i-1)\,R_{2,\,k}+\ldots+R_{i,\,k}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Величины, стоящие в правых частях равенств[1] (15), кроме $R_{1,\,k}$, уже были определены формулами (9, 10).

Величину $R_{1,\,k}=\Delta y(x_0)-\Delta y_0$ можно определить следующим образом. Из уравнения (4) при $n=0$ после введения полинома η_x, заменяющего $h^2 f(x,y)$, получим:

$$\Delta y_0=hy_0'+\frac{1}{2}\eta_0+\frac{1}{6}\Delta\eta_0-\frac{1}{24}\Delta^2\eta_0+\frac{1}{45}\Delta^3\eta_0-\frac{7}{480}\Delta^4\eta_0+\ldots \tag{16}$$

На основании того же уравнения (4) найдем:

$$R_{1,\,k}=\frac{1}{h^2}\int\limits_{x_0}^{x_1}dx\int\limits_{x_0}^{x} r_k(x)\,dx=\frac{h^{k+1}\eta^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\int\limits_0^1 du\int\limits_0^u u(u+1)\ldots(u+k)\,du. \tag{17}$$

Приближенное выражение этой ошибки таково:

$$\overline{R}_{1,\,k}=b_{k+1}\,\Delta^{k+1}\eta_0, \tag{18}$$

где коэффициент b_{k+1} является коэффициентом при соответствующей разности ряда (16).

[1] При вычислении ошибок $R_{2,\,k}$ и $R_{3,\,k}$ следует пользоваться коэффициентами формул:

$$\Delta^2 y_0=\eta_1+\frac{1}{12}\Delta^2\eta_0-\frac{1}{240}\Delta^4\eta_0+\ldots,$$

$$\Delta^2 y_1=\eta_2+\frac{1}{12}\Delta^2\eta_0+\frac{1}{12}\Delta^3\eta_0-\frac{1}{240}\Delta^4\eta_0+\ldots$$

Вместо значений R_{ik} в соотношениях (15) можно поставить $\overline{R}_{i,k}$, тогда получим приближенные значения ошибок.

Если правая часть дифференциального уравнения (1) содержит y, то формулы (15) являются приближенными.

В качестве примера рассмотрим малые колебания математического маятника, длина которого l и отношение $\frac{g}{l} = n^2$. Дифференциальное уравнение колебаний его:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -n^2\varphi. \tag{19}$$

Начальные условия возьмем такие: $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0' = n\alpha$ при $t_0 = 0$.

При этих условиях функция $\varphi(t) = \alpha \sin nt$ является решением уравнения (19). В следующей таблице приведено численное интегрирование этого уравнения по способу Штермера, причем вычисления велись до вторых разностей включительно. Значения φ_1, φ_2 и соответствующие разности были найдены методом последовательных приближений (эта часть таблицы отделена чертой). Интервал $t_{i+1} - t_i = h = 0.3$ сек. Для упрощения положено $n = 1$. В третьем столбце таблицы приведены истинные значения угла.

i	t	$\varphi(t) = \alpha \sin t$	φ_i	$\Delta\varphi_i$	$\Delta^2\varphi_i$	$\eta_i = 0.09\,\ddot{\varphi}_i$	$\Delta\eta_i$	$\Delta^2\eta_i$	$\Delta^3\eta_i$
0	0	0	0	$11819\cdot10^{-6}$	$-1056\cdot10^{-6}$	0	$-1064\cdot10^{-6}$	$+96\cdot10^{-6}$	$85\cdot10^{-6}$
1	0.3	$11821\cdot10^{-6}$	$11819\cdot10^{-6}$	$10763\cdot10^{-6}$	$-2024\cdot10^{-6}$	$-1064\cdot10^{-6}$	$-968\cdot10^{-6}$	$181\cdot10^{-6}$	$72\cdot10^{-6}$
2	0.6	$22586\cdot10^{-6}$	$22582\cdot10^{-6}$	$8739\cdot10^{-6}$	$-2804\cdot10^{-6}$	$-2032\cdot10^{-6}$	$-783\cdot10^{-6}$	$253\cdot10^{-6}$	$47\cdot10^{-6}$
3	0.9	$31333\cdot10^{-6}$	$31321\cdot10^{-6}$	$5935\cdot10^{-6}$	$-3332\cdot10^{-6}$	$-2819\cdot10^{-6}$	$-534\cdot10^{-6}$	$300\cdot10^{-6}$	
4	1.2	$37282\cdot10^{-6}$	$37256\cdot10^{-6}$	$2603\cdot10^{-6}$		$-3353\cdot10^{-6}$	$-234\cdot10^{-6}$		
5	1.5	$39900\cdot10^{-6}$	$39859\cdot10^{-6}$			$-3587\cdot10^{-6}$			

Произведем приближенную оценку погрешности при получении φ_5, пользуясь формулами (12), (15) и (18):

$$\overline{R}_{1,2} = \frac{1}{45}\Delta^3\eta_0 = \frac{85}{45}10^{-6}, \quad \overline{R}_{2,2} = 0, \quad \overline{R}_{3,2} = \frac{1}{12}\Delta^3\eta_0 = \frac{85}{12}\cdot10^{-6},$$

$$\overline{R}_{4,2} = \frac{1}{12}\Delta^3\eta_1 = \frac{72}{12}10^{-6}, \quad \overline{R}_{5,2} = \frac{1}{12}\Delta^3\eta_2 = \frac{47}{12}10^{-6},$$

$$\varepsilon_5 = 5\overline{R}_{1,2} + 4\overline{R}_{2,2} + 3\overline{R}_{3,2} + 2\overline{R}_{4,2} + \overline{R}_{5,2} = 47\cdot10^{-6}.$$

Истинное значение ошибки равно

$$\varepsilon(t_5) = 39900\cdot10^{-6} - 39859\cdot10^{-6} = 41\cdot10^{-6}.$$

ERROR EVALUATION IN NUMERICAL INTEGRATION AFTER STÖRMER

L. G. AFENDIK

(Dniepropetrovsk)

(Summary)

A method is submitted in the present work, for obtaining evaluation of error in numerical integration of a differential equation of the second order by the Störmer method.

Error is determined directly by means of the difference from the table of calculations.