

К ВОПРОСУ О ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ РЕШЕТКИ С ПЕРОМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

И. М. БЕЛЕНЬКИЙ и И. Е. ЗЕЛЕНСКИЙ

(Харьков)

Точное решение задачи о циркуляционном обтекании решетки с произвольным не только телесным, но даже и бесконечно тонким заданным профилем — неизвестно. Однако для решетки с пером в виде прямолинейного отрезка эта задача была решена. Так, например, Kutta и Grammel дали ее решения для случая решетки с осью, перпендикулярной и параллельной перу; решения же в случае решетки с наклонной осью дали Чаплыгин, König, Kawada и др. На ряду с этим были известны приближенные решения для решетки с бесконечно тонким пером, данные рядом авторов: Weinel, Weinig, Schilhansl, Майзель, Вальтер и др.

В настоящей работе дается приближенный, довольно общий метод определения циркуляции, наложенной на перо решетки; профиль пера предполагается тонким и слабо изогнутым. Окончательные формулы весьма просты и не представляют затруднений при расчете.

§ 1. Общая часть

Рассмотрим обтекание бесконечной решетки циркуляционным, безвихревым, неотрывным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Здесь мы выведем общие формулы для силы воздействия со стороны жидкости на перо решетки, причем относительно формы пера никаких ограничений не делается. Таким образом, выведенные формулы могут быть применены также и к решетке с пером в виде дужки.

Пусть точки A_i и B_i будут критическими точками потока; первые — точки набегания, вторые — точки схода (фиг. 1). Обозначим абсолютную величину скорости на бесконечности перед решеткой через V_0 , а за ней через V_1 . Соответственно с этим углы, образованные вектором скорости на бесконечности с положительным направлением оси ox , перед решеткой через α_0 , а за ней через α_1 . Угол поворота скорости на бесконечности обозначим через ω , т. е.

$$\omega = \alpha_1 - \alpha_0. \quad (1, 1)$$

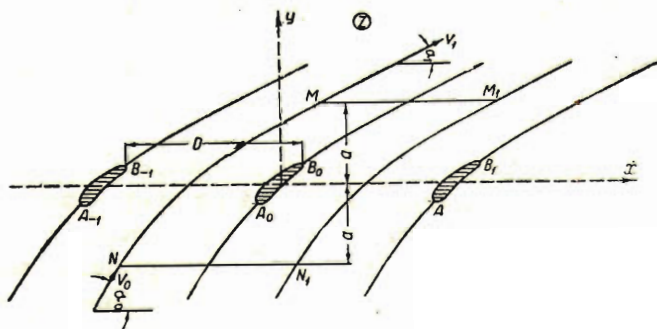
Шаг решетки обозначим через D , а величину циркуляции, наложенную на каждое перо, через Γ .

Комплексная скорость $W(z)$ везде в области, занятой потоком жидкости, есть функция аналитическая и имеет нули в точках A_i и B_i или только в точках A_i , если B_i суть острые кромки перьев. Кроме того, $W(z)$ должна быть функцией периодической с периодом, равным D , т. е.

$$W(z + D) = W(z). \quad (1, 2)$$

На бесконечности ее значения суть:

$$W(x - i\infty) = V_0 e^{-i\alpha_0}, \quad W(x + i\infty) = V_1 e^{-i\alpha_1}. \quad (1, 3)$$



Фиг. 1.

Вычислим величину интеграла

$$\oint_k W(z) dz,$$

где за контур интегрирования k взят контур, составленный из двух отрезков линий тока NM и N_1M_1 , удаленных друг от друга на расстояние D , и двух

отрезков NN_1 и MM_1 , параллельных действительной оси и удаленных от нее на расстояние, равное a . Имеем:

$$\oint_k W(z) dz = \int_{NN_1} W(z) dz + \int_{N_1M_1} W(z) dz + \int_{M_1M} W(z) dz + \int_{MN} W(z) dz.$$

Это равенство на основании (1, 2) можно записать так:

$$\oint_k W(z) dz = \int_{NN_1} W(z) dz + \int_{M_1M} W(z) dz.$$

Пользуясь произвольностью величины a , сделаем ее равной бесконечности; тогда, пользуясь (1, 3), получим:

$$\oint_k W(z) dz = DV_0 e^{-i\alpha_0} - DV_1 e^{-i\alpha_1}.$$

Известно, что мнимая часть этого интеграла дает поток, протекающий через контур k , в нашем случае равный нулю в виду отсутствия источников и стоков, а действительная часть его дает величину циркуляции по контуру k , равную Γ вследствие отсутствия вихрей в потоке жидкости. А потому]

$$V_1 \sin \alpha_1 - V_0 \sin \alpha_0 = 0, \quad (1, 4)$$

$$\Gamma = D(V_0 \cos \alpha_0 - V_1 \cos \alpha_1). \quad (1, 5)$$

Если P_x и P_y суть компоненты силы, действующей на перо решетки со стороны жидкости, то по теореме Чаплыгина о подъемной силе можно написать:

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \oint_k W^2(z) dz.$$

Вычисляя этот интеграл аналогично предыдущему, получим:

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} D(V_0^2 e^{-2i\alpha_0} - V_1^2 e^{-2i\alpha_1}).$$

Заменяя здесь V_1 его выражением через V_0 с помощью (1, 4) и исключая D с помощью (1, 5), получим, отделяя вещественную часть от мнимой:

$$\begin{aligned} P_x &= \rho V_0 \Gamma \sin \alpha_0, \\ P_y &= -\frac{1}{2} \rho V_0 \Gamma \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)}{\sin \alpha_1}. \end{aligned} \quad (1, 6)$$

Направление же этой силы определяется так:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{P_y}{P_x} = -\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)}{2 \sin \alpha_0 \sin \alpha_1}. \quad (1, 7)$$

Введем в рассмотрение вектор средней скорости по формуле:

$$V_m e^{i\alpha_m} = \frac{1}{2} (V_0 e^{i\alpha_0} + V_1 e^{i\alpha_1}).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что выполняется следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \alpha_m = -1. \quad (1, 8)$$

Величина же V_m определяется формулой:

$$V_m = \frac{V_0}{2 \sin \alpha_1} \sqrt{4 \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_1 + \sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}.$$

Полная сила воздействия со стороны жидкости на перо решетки есть

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \rho V_0 \Gamma \frac{\sqrt{4 \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_1 + \sin^2(\alpha_0 + \alpha_1)}}{2 \sin \alpha_1}.$$

Отсюда уже легко видеть, что

$$P = \rho V_m \Gamma. \quad (1, 9)$$

Из формулы (1, 8) и (1, 9) видно, что сила, действующая на перо решетки, как по величине, так и по направлению совпадает с силой, определяемой теоремой Жуковского в случае изолированного крыла, если за скорость на бесконечности принять среднюю скорость $V_m e^{i\alpha_m}$, а величину циркуляции оставить такой же, какой она была для пера решетки.

Заметим здесь, что в случае изолированного пера величина циркуляции определяется гипотезой Жуковского, по которой задняя острая кромка пера будет точкой схода потока. Если на перо в решетке наложить циркуляцию

которая образуется для изолированного пера решетки, то задняя кромка пера не будет, вообще говоря, точкой схода потока.

Из всего сказанного следует, что задача об определении динамического воздействия на перо решетки, т. е. величин P_x и P_y , будет решена, если будет определена величина Γ циркуляции, наложенной на перо решетки. Определению этой величины Γ и будет посвящено все дальнейшее изложение.

Известно, что обтекаемый телесный профиль, удовлетворяющий весьма широким геометрическим условиям, может быть при изучении формы потока жидкости, обтекающего его, а следовательно, и при определении силы, действующей на него со стороны жидкости, заменен некоторой системой вихрей, расположенных внутри него и на контуре. Однако определение закона распределения этих вихрей, а также их интенсивностей для профиля произвольной формы весьма затруднительно. Если же профиль достаточно тонок, т. е. отношение его максимальной толщины к хорде невелико, и если он, кроме того, еще и слабо выгнут, т. е. отношение стрелки его скелета к хорде также невелико, то без большой погрешности можно считать, что вихри расположены на прямолинейном отрезке — его хорде; это значительно упрощает задачу. То же рассуждение может быть проведено и для бесконечно тонкого профиля.

Для решения задачи здесь избран аналогичный путь. Каждое перо решетки заменяется системой вихрей, расположенных по его хорде. Закон же распределения их интенсивностей определяется из того условия, что суммарная скорость (скорости набегающего потока на решетку и индуцированной скорости от системы вихрей) направлена по скелету профиля в каждой его точке, если он телесный, или просто по самому профилю, если он бесконечно тонкий. Зная же закон распределения интенсивностей вихрей, можно легко простым интегрированием определить и значение циркуляции, наложенной на перо решетки.

Такой метод, как известно, был применен в теории тонкого профиля Munk и Glauert. Поэтому настоящую работу можно рассматривать как распространение теории тонкого профиля Munk-Glauert на решетку.

§ 2. Вычисление некоторых интегралов

Рассмотрим здесь некоторые интегралы, которые нам потребуются в дальнейшем изложении.

Вычислим интеграл:

$$J_k = \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta, \quad (2, 1)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{(1 - m^2)^2}{4m^2}, \quad (2, 2)$$

а m — правильная положительная дробь. Заменяя в интеграле (2, 1) θ на $-\theta$, найдем:

$$J_k = \int_{-\pi}^0 \frac{\cos k\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Сложением обоих интегралов находим:

$$2J_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos k\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Заменяя здесь θ на $(\pi - \theta)$, получим:

$$2J_k = (-1)^k \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Введем в рассмотрение еще один интеграл:

$$2J'_k = (-1)^k \int_0^{2\pi} \frac{\sin k\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Тогда можно написать:

$$2J_k + 2iJ'_k = (-1)^k \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Делая замену $e^{i\theta}$ на t и пользуясь (2, 2), имеем:

$$J_k + iJ'_k = 2i(-1)^{k+1} \oint \frac{t^{k+1} dt}{(t-im)(t+im) \left(t - \frac{i}{m}\right) \left(t + \frac{i}{m}\right)},$$

где интегрирование совершается по контуру единичного круга.

На основании теоремы Cauchy о вычетах получим:

$$J_k + iJ'_k = 2\pi i^k \frac{m^{k+2}}{1-m^4} [1 + (-1)^k].$$

В случае четного $k = 2n$ имеем:

$$J_{2n} = 4\pi (-1)^n \frac{m^{2n+2}}{1-m^4}. \quad (2, 3)$$

Для нечетного же $k = 2n + 1$ находим:

$$J_{2n+1} = 0. \quad (2, 4)$$

Интеграл же

$$J_k^* = \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{\mu^2 + \cos^2 \theta} d\theta, \quad (2, 5)$$

где

$$\mu^2 = -\frac{(1+m^2)^2}{4m^2}, \quad (2, 6)$$

а m — правильная положительная дробь, переходит в J_k при замене m на im .
Поэтому

$$J_{2n}^* = -4\pi \frac{m^{2n+2}}{1-m^4}, \quad J_{2n+1}^* = 0. \quad (2, 7)$$

Вычислим еще интеграл:

$$J_k = \int_0^{\pi} \cos k\theta' \frac{\lambda^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\lambda^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}, \quad (2, 8)$$

где λ^2 определяется формулой (2, 2). Заменяя в этом интеграле θ' на $-\theta'$ и складывая их, получим:

$$2J_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta' \frac{\lambda^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\lambda^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}.$$

Вводя еще в рассмотрение один интеграл:

$$2J_k' = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta' \frac{\lambda^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\lambda^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta},$$

можно написать:

$$2J_k + 2iJ_k' = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\theta'} \frac{\lambda^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\lambda^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}.$$

Делая замену $e^{i\theta'}$ на t' и $e^{i\theta}$ на t и пользуясь (2, 2), находим:

$$J_k + iJ_k' = \frac{1}{it} \oint \frac{t'^{k+1} [t'^2(1+t^2) + 4\lambda^2 tt' + (1+t^2)] dt'}{(t' - im)(t' + im) \left(t' - \frac{i}{m}\right) \left(t' + \frac{i}{m}\right) (t' - t) \left(t' - \frac{1}{t}\right)}.$$

На основании той же теоремы Cauchy имеем:

$$J_k + iJ_k' = \pi \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} + \pi \frac{i^{k+1} m^{k+1}}{1+m^2} [1 + (-1)^{k+1}].$$

Отсюда находим для $k = 2n$ и $k = 2n + 1$:

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta}, \\ J_{2n+1} &= \pi \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} - 2\pi (-1)^n \frac{m^{2n+2}}{1+m^2}. \end{aligned} \quad (2, 9)$$

Интеграл же

$$J_k^* = \int_0^{\pi} \cos k\theta' \frac{\mu^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\mu^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \quad (2, 10)$$

получается, как легко видеть, из интеграла J_k заменой m на im , причем μ^2 имеет значение, определяемое (2, 6). Поэтому

$$\begin{aligned} J_{2n}^* &= \pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta}, \\ J_{2n+1}^* &= \pi \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} + 2\pi \frac{m^{2n+2}}{1-m^2}. \end{aligned} \quad (2, 11)$$

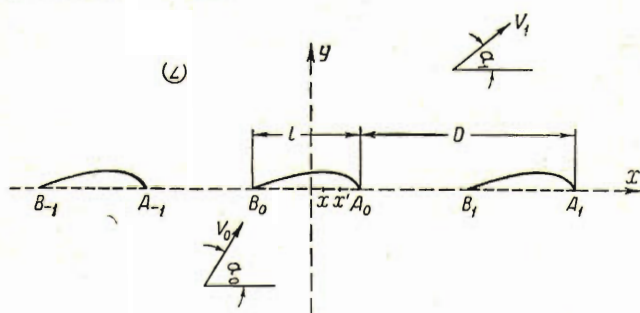
§ 3. Случай решетки с осью, параллельной хорде пера

Случай решетки с осью, параллельной хорде пера и состоящей из перьев в виде прямолинейных отрезков длины, изображенных на фиг. 2 жирным пунктиром, был рассмотрен Grammel. Выражение, полученное им для комплексной скорости потока, имеет вид:

$$\frac{df}{dz} = V_m \cos \alpha_m - \frac{V_m \sin \alpha_m}{\cos \frac{\pi l}{2D}} \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\sin \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} + z \right)}}$$

где D — шаг решетки, $V_m e^{i\alpha_m}$ — полусумма скоростей $V_0 e^{i\alpha_0}$ и $V_1 e^{i\alpha_1}$ на бесконечности перед и за решеткой соответственно.

Легко убедиться в том, что указанное выражение имеет действительное значение для точек, лежащих на пластинке; при этом знак $+$ перед корнем соответствует верхней стороне пластинки (задней), а знак $-$ соответствует нижней стороне ее (передней). Поэтому плотность



Фиг. 2.

распределения вихрей, заменяющих пластинку, или, что то же, плотность распределения циркуляции $\gamma_1(x)$, будет равна разности скоростей в точке x над и под пластинкой. Следовательно,

$$\gamma_1(x) = - \frac{2V_m \sin \alpha_m}{\cos \frac{\pi l}{2D}} \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\sin \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} + x \right)}}$$

Если вместо x ввести новую переменную θ :

$$x = \frac{D}{\pi} \arctg \frac{2m \cos \theta}{1 - m^2}, \tag{3, 1}$$

где параметр m связан с длиной пластинки таким соотношением:

$$m = \operatorname{tg} \frac{\pi l}{4D} \tag{3, 2}$$

и представляет собой правильную положительную дробь, ибо $D > l$ (фиг. 2), то выражение для $\gamma_1(x)$ переищется в следующей форме:

$$\gamma_1(x) = - 2V_m \sin \alpha_m \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \tag{3, 3}$$

Такой вид имеет плотность распределения циркуляции в переменной θ для случая пера в виде прямолинейного отрезка. Если же перо представляет собой телесный контур, скелет которого изображен на фиг. 2 сплошной жирной

линией, либо же бесконечно тонко, но не прямолинейно, то закон распределения циркуляции будет отличаться от закона распределения (3, 3) и может быть представлен в такой форме:

$$\gamma(x) = A'_0 \gamma_1(x) + \gamma_2(x),$$

где A'_0 — некоторая постоянная и $\gamma_2(x)$ — некоторая функция x/a , корректирующие закон распределения циркуляции за счет искривления профиля.

Полагая $\gamma_2(x)$ в виде ряда Fourier, напишем:

$$\gamma_2(x) = 2V_m \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin k\theta.$$

Ряд Fourier для $\gamma_2(x)$ не будет содержать членов с косинусами, так как на концах A_i и B_i пластинки, которым соответствуют $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, он должен обращаться в нуль.

Обозначая еще для сокращения величину $-A'_0 \sin \alpha_m \frac{1+m^2}{1-m^2}$ через A_0 , мы сможем закон распределения циркуляции $\gamma(x)$ представить так:

$$\gamma(x) = 2V_m \left(A_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin k\theta \right). \quad (3, 4)$$

Очевидно, что величину циркуляции Γ , наложенной на перо решетки, мы получим, если проинтегрируем $\gamma(x)$ по x вдоль по перу, т. е.

$$\Gamma = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \gamma(x) dx,$$

или, если перейти к переменной θ :

$$\Gamma = - \int_0^{\pi} \gamma(x) \frac{dx}{d\theta} d\theta.$$

Так как из (3, 1) имеем, что

$$\frac{dx}{d\theta} = - \frac{D}{\pi} \frac{2m(1-m^2) \sin \theta}{(1-m^2)^2 + 4m^2 \cos^2 \theta}, \quad (3, 5)$$

то, заменяя в последнем выражении для Γ $\gamma(x)$ и $\frac{dx}{d\theta}$ их значениями по (3, 4) и (3, 5), получим после несложных преобразований:

$$\Gamma = \frac{D}{\pi} \frac{1-m^2}{m} V_m \int_0^{\pi} \left\{ A_0 (1 - \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k [\cos(k-1)\theta - \cos(k+1)\theta] \right\} \frac{d\theta}{\lambda^2 + \cos^2 \theta},$$

где λ^2 имеет значение, определяемое формулой (2, 2). Это выражение для Γ с помощью обозначений (2, 1) может быть представлено так:

$$\Gamma = \frac{D}{\pi} \frac{(1-m^2)}{m} V_m \left\{ A_0 (J_0 - J_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k (J_{k-1} - J_{k+1}) \right\}.$$

Если теперь воспользоваться формулами (2, 3) и (2, 4), определяющими значения интегралов J_k , то выражение для Γ может быть представлено в окончательной форме:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ \frac{A_0}{1+m^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n+1} m^{2n} (-1)^n \right\}. \quad (3, 6)$$

Так как все величины, входящие в эту формулу, за исключением A_k , известны, то совершенно очевидно, что задача определения величины Γ сводится, таким образом, к определению этих коэффициентов A_k . Их определением мы сейчас и займемся.

Система вихрей, заменяющих перья решетки, индуцирует скорости в каждой точке потока жидкости, которые, складываясь со скоростью $V_m e^{i\alpha m}$ невозмущенного решеткой потока, создают поток, обтекающий решетку.

Пользуясь теперь тем условием, что перо решетки тонко и слабо выгнуто, мы посчитаем приближенно, что эти вихри, как это указывалось уже в § 1, расположены вдоль прямолинейных отрезков $A_i B_i$ — хорд перьев решетки. Вычислим величину индуцируемой скорости от этой системы вихрей в точке x (фиг. 2). Для этого подсчитаем сперва комплексную скорость, индуцируемую в точке x , от цепочки вихрей, расположенных в точках $x' \pm kD$, где k — целое положительное число. Она, как известно, равна

$$-\frac{1}{2iD} \gamma(x') \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{D} (x' - x) dx'.$$

Для того чтобы получить комплексную скорость, индуцируемую всей системой вихрей, очевидно, необходимо проинтегрировать последнее выражение по x' вдоль по всей хорде пера от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$; тогда получим:

$$W(x) = -\frac{1}{2iD} \int_{-l/2}^{+l/2} \gamma(x') \operatorname{ctg} \frac{\pi}{D} (x' - x) dx'.$$

Переходя опять к переменной θ , воспользуемся формулами (3, 4), (3, 1) (3, 5) и (2, 2); получим:

$$W(x) = -\frac{V_m}{\pi i} \int_0^\pi \left\{ A_0 (1 - \cos \theta') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k [\cos (k-1) \theta' - \cos (k+1) \theta'] \right\} \frac{\lambda^2 + \cos \theta \cos \theta'}{\lambda^2 + \cos^2 \theta} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta},$$

которое может быть без затруднений переписано в такой форме:

$$W(x) = -\frac{V_m}{\pi i} \left\{ A_0 (J_0 - J_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k (J_{k-1} - J_{k+1}) \right\},$$

если воспользоваться формулами (2, 8). Заменяя теперь здесь J_k их значениями по (2, 9), получим выражение для $W(x)$ в такой окончательной форме:

$$W(x) = -i V_m \left\{ A_0 \frac{1-m^2}{1+m^2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\theta - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} m^{2n} (-1)^n \right\}. \quad (3, 7)$$

Так как по условию эта индуцированная комплексная скорость $W(x)$, складываясь с комплексной скоростью $V_m e^{-i\alpha_m}$ набегающего потока, должна дать комплексную скорость потока, обтекающего решетку, то поэтому последняя в каждой точке скелета пера или самого пера, если оно бесконечно тонкое, должна быть направлена по касательной к нему. Следовательно,

$$-\operatorname{tg} \arg \{ V_m e^{-i\alpha_m} + W(x) \} = \frac{dy}{dx},$$

если $y = y(x)$ есть уравнение скелета профиля пера или самого профиля пера. Последнее условие можно переписать так, замечая, что $W(x)$ чисто мнимая величина:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{i W(x)}{V_m \cos \alpha_m}. \quad (3, 8)$$

Вводя сюда вместо $W(x)$ его выражение (3, 7), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{1}{\cos \alpha_m} \left\{ A_0 \frac{1-m^2}{1+m^2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\theta - \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n A_{2n} m^{2n} \right\}.$$

Это равенство, представляя собой в сущности условие потока на границе, и даст возможность определить искомые и неизвестные покуда коэффициенты A_k . Рассматривая выражение, стоящее в правой части последнего равенства, как разложение в ряд Фурье величины dy/dx , определяем коэффициенты этого разложения обычным путем. Имеем:

$$A_p = \frac{2 \cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos p\theta d\theta \quad (3, 9)$$

для $p = 1, 2, 3, \dots$, а также

$$A_0 \frac{1-m^2}{1+m^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} m^{2n} (-1)^n + \sin \alpha_m = \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta.$$

Заменяя здесь A_{2n} их значениями по формуле (3, 9), получим:

$$A_0 \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n m^{2n} \cos 2n\theta \right] d\theta - \sin \alpha_m. \quad (3, 10)$$

Итак, коэффициенты A_k разложения функции распределения циркуляции в ряд определены. Вставляя их значения, определяемые формулами (3, 9) и (3, 10), в выражение (3, 6) для циркуляции Γ , получим:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1-m^2} + \frac{\cos \alpha_m}{\pi(1-m^2)} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n m^{2n} \cos 2n\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{n=\infty} (1-m^2) (-1)^n m^{2n} \cos (2n+1)\theta \right] d\theta \right\}.$$

Вводя обозначения:

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n m^{2n} \cos (2n+1)\theta,$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n m^{2n} \cos 2n\theta,$$

выражение для Γ можно переписать:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1-m^2} + \frac{\cos \alpha_m}{\pi(1-m^2)} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} [1 + 2S_2(\theta) + (1-m^2)S_1(\theta)] d\theta \right\}.$$

Остается еще просуммировать ряды $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$. Замечая, что $S_1(\theta)$ есть действительная часть разложения в ряд Taylor функции $\frac{u}{1+u^2}$, а $S_2(\theta)$ то же для функции $-\frac{u^2}{1+u^2}$, где $u = me^{i\theta}$, получим, что

$$S_1(\theta) = \frac{(1+m^2) \cos \theta}{1+2m^2 \cos 2\theta + m^4}, \\ S_2(\theta) = -\frac{m^2(m^2 + \cos 2\theta)}{1+2m^2 \cos 2\theta + m^4}. \tag{3, 11}$$

А потому выражение для Γ получает вид:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1-m^2} + \frac{(1+m^2) \cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \frac{(1+\cos \theta) d\theta}{1+2m^2 \cos 2\theta + m^4} \right\}.$$

Если форма профиля пера решетки задается графически, что весьма часто бывает на практике, то вычисление dy/dx затруднительно и может быть сопряжено с большими погрешностями. Поэтому удобнее выражение для Γ представить в такой форме, куда бы входил только y , а не dy/dx , тем более, что, как мы увидим далее, и сама форма интегрального члена в выражении

для Γ становится при этом значительно проще. Чтобы сделать это преобразование, перепишем выражение для Γ :

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1-m^2} - \frac{(1+m^2) \cos \alpha_m}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{dx} \frac{1+\cos \theta}{1+2m^2 \cos 2\theta + m^4} \frac{d\theta}{dx} dx \right\},$$

перейдя к переменной x . Воспользовавшись теперь формулой (3, 5), напомним:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1-m^2} + \frac{(1+m^2) \cos \alpha_m}{2mD(1-m^2)} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dy}{dx} dx \right\}.$$

Интегрируя теперь по частям и замечая, что y на концах профиля пера обращается в нуль [причем:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 0,$$

когда $\frac{dy}{dx} \neq \infty$ ($\theta = 0$), в чем легко убедиться, применяя правило L'Hospital], находим:

$$\Gamma = -\frac{4m V_m D}{1-m^2} \left\{ \sin \alpha_m + \frac{(1+m^2) \cos \alpha_m}{4mD} \int_0^\pi y \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\}. \quad (3, 12)$$

Так как y задано как функция x , то удобнее в формуле (3, 12) для Γ перейти под знаком интеграла к переменной x . Совершая эту замену переменных с помощью тех же формул (3, 1) и (3, 5), получаем после замены m его значением по (3, 2), что

$$\Gamma = -2DV_m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \left\{ \sin \alpha_m + \frac{\pi \sqrt{2} \cos \alpha_m}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\cos \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{D} - \cos \frac{\pi l}{D}}} \right\} \quad (3, 13)$$

§ 4. Случай решетки с осью, перпендикулярной к хорде пера

Решетка, изображенная на фиг. 3, была рассмотрена Kutta и Grammel; комплексная скорость потока, обтекающего эту решетку, есть

$$\frac{df}{dz} = V_m \cos \alpha_m - \frac{V_m \sin \alpha_m}{\operatorname{ch} \frac{\pi l}{2D}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} + z \right)}},$$

где сохранены старые обозначения. Легко убедиться в том, что указанное выражение имеет действительное значение для точек, лежащих на пластинке; при этом знак $+$ перед корнем соответствует верхней (задней) стороне пластинки, а знак $-$ соответствует нижней ее стороне (передней). Поэтому плотность распределения циркуляции $\gamma_1(x)$ будет равна разности скоростей в точке x над и под пластинкой.

Следовательно,

$$\gamma_1(x) = -\frac{2V_m \sin \alpha_m}{\operatorname{ch} \frac{\pi l}{2D}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{D} \left(\frac{l}{2} + x \right)}}.$$

Вводим вместо x новую переменную θ , связанную с ним так:

$$x = \frac{D}{2\pi} \operatorname{lg} \frac{1 - 2m \cos \theta + m^2}{1 + 2m \cos \theta + m^2}, \quad (4, 1)$$

где

$$m = \operatorname{th} \frac{\pi l}{4D} \quad (4, 2)$$

есть правильная положительная дробь. Выражение для $\gamma_1(x)$ через переменную θ будет таким:

$$\gamma_1(x) = -2V_m \sin \alpha_m \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (4, 3)$$

Сохраняя те же рассуждения, которые были проведены в § 3, мы можем закон распределения циркуляции для искривленного бесконечно тонкого или же телесного профиля представить в такой форме:

$$\gamma(x) = 2V_m \left\{ A_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin k\theta \right\}. \quad (4, 4)$$

Так же, как и прежде, Γ величина циркуляции, наложенной на перо решетки, может быть представлена так:

$$\Gamma = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \gamma(x) dx = \int_0^\pi \gamma(x) \frac{dx}{d\theta} d\theta.$$

Но из (4, 1) следует, что

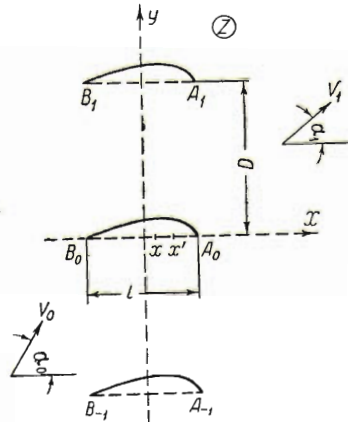
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2mD(1+m^2)\sin\theta}{\pi[(1+m^2)^2 - 4m^2\cos^2\theta]}. \quad (4, 5)$$

Поэтому, заменяя в последнем выражении $\gamma(x)$ и $\frac{dx}{d\theta}$ их значениями по (4, 4) и (4, 5), получим для Γ такое выражение после небольших преобразований:

$$\Gamma = -\frac{D}{\pi} \frac{1+m^2}{m} V_m \left\{ A_0 \int_0^\pi \frac{1+\cos\theta}{\mu^2+\cos^2\theta} d\theta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \int_0^\pi \frac{\cos(k-1)\theta - \cos(k+1)\theta}{\mu^2+\cos^2\theta} d\theta \right\},$$

где μ^2 имеет значение, определяемое формулой (2, 6). Последнее выражение для Γ может быть с помощью обозначений (2, 5) представлено так:

$$\Gamma = -\frac{D}{\pi} \frac{1+m^2}{m} V_m \left\{ A_0 (J_0^* + J_1^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k (J_{k-1}^* - J_{k+1}^*) \right\}.$$



Фиг. 3.

Если теперь воспользоваться формулами (2, 7), определяющими значения интегралов J_k^* , то выражение для Γ может быть представлено в такой окончательной форме:

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ \frac{A_0}{1-m^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{2n+1} m^{2n} \right\}. \quad (4, 6)$$

Очевидно, что, как и в § 3, величина Γ будет определена, если будут известны значения коэффициентов A_k . Метод определения этих коэффициентов оставим тот же, как и в § 3. Для этого напишем выражение для индуцированной комплексной скорости $W(x)$, которое, как в этом легко убедиться, будет иметь такой вид:

$$W(x) = -\frac{1}{2iD} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \gamma(x') \operatorname{cth} \frac{\pi}{D}(x' - x) dx'.$$

Вводя сюда опять вместо переменной x' переменную θ' и пользуясь при этом формулами (4, 4), (4, 1), (4, 5), получим, что

$$W(x) = \frac{V_m}{\pi i} \int_0^\pi \left\{ A_0 (1 + \cos \theta') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k [\cos(k-1)\theta' - \cos(k+1)\theta'] \right\} \cdot \frac{\mu^2 + \cos \theta \cdot \cos \theta'}{\mu^2 + \cos^2 \theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}.$$

Это выражение может быть переписано и так, если воспользоваться формулами (2, 10):

$$W(x) = \frac{V_m}{\pi i} \left\{ A_0 (J_0^* + J_1^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k (J_{k-1}^* - J_{k+1}^*) \right\}.$$

Заменяя здесь величины J_k^* их значениями по формулам (2, 11), получим для $W(x)$ такое окончательное значение:

$$W(x) = -iV_m \left\{ A_0 \frac{1+m^2}{1-m^2} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} m^{2n} \right\}. \quad (4, 7)$$

Совершенно очевидно, что условие потока на границе пера здесь напишется в такой же форме, как и в § 3, а именно:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{iW(x)}{V_m \cos \alpha_m}.$$

Заменяя здесь $W(x)$ его значением (4, 7), получим, что

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{1}{\cos \alpha_m} \left\{ A_0 \frac{1+m^2}{1-m^2} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} m^{2n} \right\}.$$

Переходим к определению коэффициентов A_k . Имеем, по старым соображениям, что

$$A_p = -\frac{2 \cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos p\theta d\theta \quad (4, 8)$$

для $p \neq 0$ и далее:

$$A_0 \frac{1+m^2}{1-m^2} = -\sin \alpha_m + \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} m^{2n}.$$

Заменяя в последней формуле коэффициенты A_{2n} в правой части их значениями по формуле (4, 8), получим:

$$A_0 \frac{1+m^2}{1-m^2} = -\sin \alpha_m + \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} m^{2n} \cos 2n\theta \right] d\theta. \quad (4, 9)$$

Пользуясь теперь формулами (4, 8) и (4, 9), определяющими значения коэффициентов A_k , можно выражение (4, 6) для циркуляции представить так:

$$\Gamma = \frac{4m V_m D}{1+m^2} \left\{ -\sin \alpha_m + \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} [1 + 2\sigma_2(\theta) - (1+m^2)\sigma_1(\theta)] d\theta \right\},$$

где

$$\sigma_1(\theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} m^{2n} \cos (2n+1)\theta,$$

$$\sigma_2(\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} m^{2n} \cos 2n\theta.$$

Легко видеть, что $\sigma_1(\theta)$ получается из $S_1(\theta)$, а $\sigma_2(\theta)$ из $S_2(\theta)$ заменой m на im . Поэтому

$$\sigma_1(\theta) = \frac{(1-m^2) \cos \theta}{1-2m^2 \cos 2\theta + m^4},$$

$$\sigma_2(\theta) = \frac{m^2 (\cos 2\theta - m^2)}{1-2m^2 \cos 2\theta + m^4}$$

и

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1+m^2} + \frac{(1-m^2) \cos \alpha_m}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \frac{1 - \cos \theta}{1-2m^2 \cos 2\theta + m^4} d\theta \right\}.$$

Переходя здесь по тем же соображениям от переменной θ к переменной x и пользуясь для этого формулами (4, 1) и (4, 5), получаем, что

$$\Gamma = 4m V_m D \left\{ -\frac{\sin \alpha_m}{1+m^2} + \frac{(1-m^2) \cos \alpha_m}{2mD(1+m^2)} \int_{-\frac{i}{2}}^{+\frac{i}{2}} \frac{dy}{dx} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} dx \right\}.$$

Интегрируя по частям, находим при тех же условиях, что и в § 3, что

$$\Gamma = -\frac{4m V_m D}{1+m^2} \left\{ \sin \alpha_m + \frac{(1-m^2) \cos \alpha_m}{4mD} \int_0^\pi y \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\}. \quad (4, 10)$$

Если перейти к переменной x и заменить m его значением по формуле (4, 2), то получим:

$$\Gamma = -2V_m D \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} \left\{ \sin \alpha_m + \frac{\pi \sqrt{2} \cos \alpha_m}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{th} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi l}{D} - \operatorname{ch} \frac{2\pi x}{D}}} \right\}. \quad (4, 11)$$

§ 5. Частные случаи и некоторые соотношения

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые частные случаи, а именно: случай решетки из прямолинейных отрезков и случай изолированного пера, рассмотренный в теории тонкого профиля Munk.

а) Случай прямолинейного пера

Очевидно, мы его получим, полагая в наших формулах для циркуляции (3, 13) и (4, 11) y равным тождественно нулю. Получаем для случая решетки с осью, параллельной перу:

$$\Gamma_0 = -2V_m D \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \sin \alpha_m \quad (5, 1)$$

и для случая решетки с осью, перпендикулярной к перу:

$$\Gamma_0 = -2V_m D \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} \sin \alpha_m. \quad (5, 2)$$

Как легко видеть, эти значения для циркуляций совпадают с таковыми же в работах Kutta и Grammel.

б) Случай изолированного пера

Этот случай мы, очевидно, получим, если положим в формулах (3, 13) и (4, 11) $D = \infty$. Совершая этот предельный переход сперва в формуле (3, 13), находим, что значение циркуляции Γ_1 , наложенной на перо решетки в условии его изоляции, будет:

$$\Gamma_1 = -\pi l V_m \left\{ \sin \alpha_m + \frac{\cos \alpha_m}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2}} \right\}. \quad (5, 3)$$

Если мы теперь будем искать Γ_1 , исходя из формулы (4, 11), то должно, очевидно, получиться то же значение для циркуляции (5, 3), в чем и можно убедиться непосредственно, совершая предельный переход при $D = \infty$ в формуле (4, 11). Формула (5, 3) совпадает с таковой же формулой для циркуляции в теории тонкого профиля Munk-Glauert. Можно рассмотреть еще более частный случай изолированного прямолинейного профиля и подсчитать для него величину циркуляции Γ_{01} . Очевидно, мы его получим или если сделаем предельный переход при $D = \infty$ в формулах (5, 1) и (5, 2) или если сделаем предельный переход в формуле (5, 3), полагая в ней $y(x) = 0$. Во всех трех случаях получаем одинаковый результат, а именно:

$$\Gamma_{01} = -\pi l V_m \sin \alpha_m, \tag{5, 4}$$

совпадающий с хорошо известным результатом для циркуляции при обтекании изолированного прямолинейного отрезка:

На этом мы и закончим рассмотрение частных случаев и перейдем к выводу некоторых важных соотношений.

Вычислим в первую очередь величину κ , равную отношению подъемных сил пера решетки и пера решетки в условиях его изоляции и скорости на бесконечности, равной средней скорости $V_m e^{i\alpha_m}$. Если воспользуемся формулой (1, 9), то получим:

$$\kappa = \frac{\Gamma \text{ решетки}}{\Gamma \text{ изолир. пера}}.$$

Теперь остается только воспользоваться формулами (3, 13) и (4, 11) с (5, 3), чтобы получить для решетки с осью, параллельной хорде пера, значение:

$$\kappa = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \frac{\operatorname{tg} \alpha_m + \frac{\pi \sqrt{2}}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\cos \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{D} - \cos \frac{\pi l}{D}}}}{\operatorname{tg} \alpha_m + \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2}}, \tag{5, 5}$$

а для решетки с осью, перпендикулярной к хорде пера, такое значение:

$$\kappa^* = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} \frac{\operatorname{tg} \alpha_m + \frac{\pi \sqrt{2}}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{th} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi l}{D} - \operatorname{ch} \frac{2\pi x}{D}}}}{\operatorname{tg} \alpha_m + \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2}}. \tag{5, 6}$$

Аналогичные величины для отношения циркуляций мы получим и для случая решетки из прямолинейных отрезков. Для этого необходимо или в (5, 5) и (5, 6) положить $y(x) = 0$ или же взять отношения Γ_0 по формулам (5, 1) и (5, 2) к Γ_{01} по (5, 4); в обоих случаях получим, что

$$\kappa_0 = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \quad (5, 7)$$

и

$$\kappa_0^* = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D}. \quad (5, 8)$$

Эти результаты получены еще Kutta и Grammel. Сравнение формул (5, 5) с (5, 7) и (5, 6) с (5, 8) показывает, что в то время как для решетки из прямолинейных перьев значение κ не зависит от направления потока (α_m), для решетки из криволинейных или телесных перьев κ зависит от α_m . Кроме того, из (5, 5) и (5, 6) легко усмотреть, что значение κ зависит также и от формы пера (y), что, впрочем, следовало ожидать и а priori.

Кроме того, из тех же формул следует, что для подобных решеток значение κ одинаково, что справедливо, конечно, и для решеток с прямолинейными перьями.

Далее, если в формулах (3, 13) и (4, 11) положить $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$, что соответствует нормальному удару потока на перо решетки, то для значений циркуляции Γ получаются значения, совпадающие со значениями Γ_0 в случае прямолинейного пера. Следовательно, при нормальном ударе потока на перо циркуляция, наложенная на него Γ , не зависит от формы пера, а лишь от отношения $\frac{l}{D}$ — хорды к шагу решетки.

Если назвать аэродинамической осью решетки такую прямую, что при направлении средней скорости, совпадающей с направлением этой прямой, силовое воздействие на перо решетки со стороны жидкости будет отсутствовать, то, очевидно, что угловой коэффициент этой прямой $\operatorname{tg} A$ мы получим, заменяя в (3, 13) и (4, 11) α_m на A и A^* соответственно и полагая в обоих случаях $\Gamma = 0$. Имеем, что

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\pi \sqrt{2}}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\cos \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{D} - \cos \frac{\pi l}{D}}} \quad (5, 9)$$

и

$$\operatorname{tg} A^* = -\frac{\pi \sqrt{2}}{D^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{D} \left(\operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} - \operatorname{th} \frac{\pi x}{D} \right) \sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi l}{D} - \operatorname{ch} \frac{2\pi x}{D}}} \quad (5, 10)$$

Из этих формул видно, что направление аэродинамической оси решетки зависит как от формы пера (y), так и от отношения l/D , оставаясь неизменным для подобных решеток.

Совершенно аналогично можно определить и направление аэродинамической оси изолированного пера, если в формуле (5, 3) Γ_1 положить равным нулю, а α_m заменить через A_1 ; получим, что

$$\operatorname{tg} A_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{y(x) dx}{\left(\frac{l}{2} - x\right) \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}}. \quad (5, 11)$$

Пользуясь формулами (5, 9) и (5, 10), легко оба выражения для циркуляции (3, 13) и (4, 11) представить в иной форме, а именно такой:

$$\Gamma = 2V_m D \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \frac{\sin(A - \alpha_m)}{\cos A} \quad (5, 12)$$

и

$$\Gamma = 2V_m D \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} \frac{\sin(A^* - \alpha_m)}{\cos A^*}. \quad (5, 13)$$

Выражения же для χ и χ^* переписутся так и при той же замене

$$\chi = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2D} \frac{\sin(A - \alpha_m) \cos A_1}{\sin(A_1 - \alpha_m) \cos A}$$

и

$$\chi^* = \frac{2D}{\pi l} \operatorname{th} \frac{\pi l}{2D} \frac{\sin(A^* - \alpha_m) \cos A_1}{\sin(A_1 - \alpha_m) \cos A^*}.$$

Остается еще отметить, что подсчет величин $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{tg} A^*$ в формулах (5, 9) и (5, 10) проводится графически, так как обычно скелет пера решетки, а значит и $y(x)$ задается графически. Тот же графический прием вычисления удобнее применить и в том случае, когда $y(x)$ задается аналитически, так как точное вычисление этих довольно сложных интегралов едва ли имеет смысл.

Формулы (5, 12), (5, 13), (1, 4), совместно с формулой

$$V_m e^{i\alpha_m} = \frac{1}{2} (V_0 e^{i\alpha_0} + V_1 e^{i\alpha_1}),$$

дают возможность получить простые выражения для α_m соответственно для обеих решеток:

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\sin \alpha_0 \cos(a - A)}{\cos A \cos(a - \alpha_0)}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\sin \alpha_0 (1 + \operatorname{tg} A^* \operatorname{th} a)}{\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{th} a},$$

а для величин средних скоростей:

$$V_m^2 = V_0^2 \left[\sin^2 \alpha_0 + \frac{\cos^2 A \cos^2(a - \alpha_0)}{\cos^2(a - A)} \right]$$

и

$$V_m^2 = V_0^2 \left[\sin^2 \alpha_0 + \left(\frac{\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{tg} A^* \operatorname{th} a} \right)^2 \right],$$

где

$$a = \frac{\pi l}{2D}.$$

Зная α_m и V_m , нетрудно подсчитать значение циркуляции по формулам (5, 12) и (5, 13), а также κ и κ^* .

Если, наконец, заметить, что

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{2 V_m \cos \alpha_m}{V_0 \sin \alpha_0} - \operatorname{ctg} \alpha_0,$$

то подсчет силы, действующей на перо решетки, по формулам (1, 6) уже не представляет затруднений.

Харьковский Авиационный
институт.

ON THE THEORY OF A FLAT LATTICE WING

I. M. BELENKY and I. E. ZELENSKY

(Kharkov)

(Summary)

In the present work is investigated two-dimensional flow of a perfect incompressible fluid in which is placed a fixed flat latticed wing. The lattice feather is assumed as thin and slightly flexed.

The solution of this problem is given for two cases, when the lattice axis is parallel to the feather chord and when the lattice wing is perpendicular to the feather chord.

The magnitude of the circulation is determined by the shape of the feather and can be calculated by formula (3, 13) in the case of the lattice investigated in Par. 3 and by formula (4, 11) for the lattice studied in Par. 4.

The present work may be regarded as an extension of the thin profile theory of Munk-Glauert in regard to the case of a lattice wing.