АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ПРОБЛЕМА УПРУГОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ И ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ

А. Н. ГЕРАСИМОВ

(Москва)

Теория упругости дает закон малых деформаций в виде системы уравнений:[1]

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0, \qquad \text{(L)}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0.$$

Здесь:

u, v, w — компоненты смещения,
X, Y, Z — компоненты внешних сил, рассчитанных на единицу массы,
λ, μ — постоянные Ламé,

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

и Δ обозначает оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Уравнения (L) содержат, таким образом, частные производные второго порядка относительно компонент смещения. Физическая основа их заключается в законе Гука, по которому во всяком упругом теле при деформации последнего возникают напряжения, пропорциональные величине деформации и направленные в сторону ее уменьшения. Такого рода упругие силы принадлежат к классу консервативных сил, зависящих от взаимного расположения частиц деформируемого тела.

---

[1] Ляв, Матем. теория упругости, стр. 144, ОНТИ, 1935; М. М. Филоненко-Бородич, Основы теории упругости, ГСИ, стр. 43, 1933.

С другой стороны, гидродинамика описывает движение вязких жидкостей при помощи уравнений Навье-Стокса:[1]

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\Delta v_x\right\}+\rho\left\{X-\frac{dv_x}{dt}\right\}=0,\\
&-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\Delta v_y\right\}+\rho\left\{Y-\frac{dv_y}{dt}\right\}=0,\qquad (N-S)\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\Delta v_z\right\}+\rho\left\{Z-\frac{dv_z}{dt}\right\}=0,
\end{aligned}
$$

где p есть давление, v_x, v_y, v_z — компоненты скорости, $\Theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$ и η — коэффициент вязкости.

Относительно компонент смещения уравнения (N — S) уже третьего порядка. В их основу положен закон внутреннего трения, установленный Ньютоном. По этому закону сила внутреннего трения, или сила вязкости, возникающая между двумя скользящими друг по другу жидкими слоями, пропорциональна градиенту скорости и поверхности раздела и направлена в сторону уменьшения этого градиента.

Таким образом, если упругие силы зависят от распределения смещений по объему деформированного упругого тела, то силы вязкости, возникающие при деформации вязких тел, зависят от распределения скоростей.

Но в природе широко распространен класс веществ, по всем признакам обладающих одновременно как вязкими, так и упругими свойствами. Достаточно назвать смолы, хлебное тесто и пр. К этой категории веществ относятся, повидимому, все коллоиды. Такого рода вещества я называю упруго-вязкими.

Казалось бы очень важным построить систему уравнений, описывающую закон движения частиц упруго-вязкого тела. Такая система уравнений должна содержать в себе как уравнения Ламе́, так и уравнения Навье-Стокса, являясь их обобщением.

В предлагаемой работе сделан первый шаг на пути такого обобщения, ограничиваясь случаем одномерных тел. Именно, объектом настоящего исследования является тело, один из линейных размеров которого преимущественно развит по сравнению с линейными размерами в прочих направлениях. Такого рода тело условимся называть нитью, не вкладывая, впрочем, в это слово физического содержания. Исключительно большой размер нити естественно называть длиной нити, а тот отрезок кривой, около которого сосредоточено все вещество нити, — ее осью. Всякое сечение нити плоскостью, перпендикулярной к касательной к оси, будет называться в дальнейшем просто сечением. Размеры любого сечения нити очень малы по сравнению с ее длиной.

Будем считать, что нить состоит из вещества однородного, но не обязательно изотропного, т. е. обладая одинаковыми физическими свойствами во всех своих точках, нить может обладать различными свойствами в различных напра-

[1] Вебстер А. Г., Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, ГТТИ, стр. 592, 1933.

влениях. Площади сечений нити будем считать равными, не предполагая, однако, равенства самих сечений. Переход от одной формы сечения к другой предполагаем непрерывным, так что на любом участке длины нити можно взять два настолько близких сечения, что выделяемый ими объем может быть принят за прямой цилиндр с очень малой высотой.

Наконец, мы предполагаем, что для изучаемого тела опытно установлены: плотность ρ вещества, коэффициент вязкости η и коэффициенты Ламé.

Работа состоит из трех частей. Первая часть посвящена малым поперечным колебаниям нити, закрепленной на концах. В § 1 дается вывод уравнения движения. В § 2 показано, что уравнения (N — S) гидродинамики приводят к тому же закону движения нити при условии надлежащего истолкования гидродинамического давления. В § 3 приводится доказательство единственности решения полученного уравнения с частными производными третьего порядка. В § 4 проведено решение этого уравнения по способу Д. Бернулли. Решение получается в виде ряда, и в § 5 доказывается возможность почленного дифференцирования этого ряда нужное количество раз. Далее, в § 6 устанавливается, что полученный в § 4 ряд действительно удовлетворяет всем условиям задачи. В § 7 выясняется физический смысл найденного решения. В § 8 разбирается вопрос об использовании этого решения для опытного определения коэффициентов упругости и вязкости вещества нити путем наблюдения периода колебания и декремента затухания. Далее исследуется неоднородное уравнение: в § 9 приводится решение для тяжелой нити, в § 10 рассматривается общий случай вынужденного движения нити. В § 11 исследуется вопрос о сходимости рядов и устанавливается соблюдение всех условий задачи.

Вторая часть этой работы представляет довольно сжатый набросок решения задачи о крутильных колебаниях нити, один из концов которой закреплен, а другой несет некоторый дополнительный момент инерции, причем разбирается лишь случай колебаний в пустоте и с небольшой амплитудой. В § 12 показано, что задача о крутильных колебаниях приводит к тому же уравнению движения, что и задача о поперечных колебаниях (§ 1). В § 13 исследуются условия на свободном конце нити, в § 14 дается решение уравнения, в § 15 устанавливается, что это решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Третья часть посвящена упругому гистерезису. В § 16 исследуются некоторые особые точки; в § 17 приведен упрощенный вывод уравнения Больцмана; § 18 посвящен способу определения ядра уравнения для того случая, когда рассматриваемая частица нити не лежит в особой точке; в § 19 дается общий способ определения ядра.

§ 1. Пусть нить с длиной l и с площадью сечения s натянута так, что ее ось располагается на сегменте $[0, l]$ прямой OX, причем концы нити закреплены. Тогда все сечения последней расположатся перпендикулярно к OX.

Пусть в момент времени $t=0$ оси нити придана форма, определяемая уравнением:

$$u\Big|_{t=0} = \Phi(x), \tag{1}$$

так что $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$.

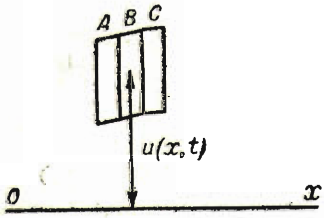
Эту начальную форму нити мы предполагаем плоской и обладающей настолько малой кривизной, что сечения нити можно считать попрежнему перпендикулярными к OX.

Кроме того, допустим, что в тот же момент времени $t=0$ всем элементам нити сообщены начальные скорости, перпендикулярные к OX и направленные в плоскости кривой (1). Таким образом дано начальное распределение скоростей:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \tag{2}$$

Составим уравнение движения нити. Рассмотрим силы, действующие на бесконечно тонкий слой B нити (фиг. 1), выделяемый из ее тела двумя бесконечно близкими сечениями с абсциссами:

$$x-\frac{dx}{2} \quad \text{и} \quad x+\frac{dx}{2}.$$



Фиг. 1.

Тогда сила инерции элемента B есть

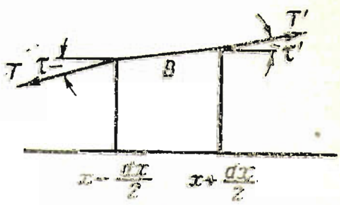
$$-\rho s dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Если считать, что направление смещений u вертикально и обращено кверху, то вес рассматриваемого элемента оказывается равным

$$-\rho g s dx. \tag{4}$$

Пусть, далее, нить натянута так, что на единицу площади ее сечения действует продольная сила T. Тогда на всю площадь s сечения действует сила натяжения, равная Ts. Ее вертикальная составляющая в точке с абсциссой $x-\frac{dx}{2}$ есть (фиг. 2):

$$-Ts\sin\tau=-Ts\operatorname{tg}\tau=-Ts\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}},$$



Фиг. 2.

где τ обозначает угол наклона касательной к OX.

В точке с абсциссой $x+\frac{dx}{2}$ натяжение дает вертикальную составляющую

$$+Ts\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}.$$

Таким образом, вследствие натяжения нити, ее элемент B испытывает силу, направленную вниз и равную

$$-Ts\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\right]=-Ts dx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5'}$$

а сила, направленная в сторону смещения, получается равной

$$+Ts dx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Силу (5′), пропорциональную кривизне средней линии $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и направленную в сторону уменьшения этой кривизны, можно было бы назвать, следуя Планку, силой инерции формы. Однако в таком случае постоянный коэффициент $-T$ должен быть истолкован несколько иначе. Я хочу сказать следующее: если бы натяжение T было равно нулю, то и в таком режиме движения нить испытывала бы местные деформации сдвига. Мы рассмотрим этот вопрос подробнее. Вследствие того, что в сечении с абсциссой $x-\frac{dx}{2}$ появляется деформация сдвига, измеряемая величиной угла τ, или, что то же, значением производной

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}},$$

по закону Гука в данном сечении нити возникает сила упругости, равная

$$-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\cdot s,$$

где μ — модуль сдвига.

Аналогично в сечении с абсциссой $x+\frac{dx}{2}$ появляется сила упругости

$$+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}\cdot s.$$

Поэтому силой инерции формы нужно считать не (5′), а величину

$$-Ms\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где положено

$$M=T+\mu. \tag{6}$$

При отсутствии натяжения T коэффициент M делается тождественным модулю сдвига μ.

Итак, результирующая сила упругости и натяжения, направленная в сторону смещения u и действующая на элемент B нити, имеет величину:

$$+Ms\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad M=T+\mu. \tag{7}$$

Наконец, благодаря различию в скоростях в каждый момент времени слои $A, B, C, \ldots$, выделяемые из тела нити рядом бесконечно близких сечений, вынуждены скользить друг по другу. Вследствие вязкости вещества они взаимодействуют между собой. В основу этого взаимодействия я кладу закон Ньютона, по которому сила действия одного слоя на другой, соседний с ним, должна быть пропорциональна площади s сечения нити и градиенту скорости $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$; кроме того, она должна быть направлена в сторону уменьшения этого градиента.

Поэтому слой A (фиг. 1) действует на слой B с силой

$$-\eta s\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}};$$

по той же причине действие B на C есть

$$-\eta s\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}},$$

следовательно, действие C на B равно:

$$+\eta s\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}.$$

Наконец, совместное действие слоев A и C на лежащий между ними слой B получается равным

$$+\eta s\left[\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}-\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\right]=\eta s\,dx\left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2}\right). \tag{8}$$

По принципу Даламбера, сумма сил (3), (4), (7) и (8) должна тождественно равняться нулю, и мы приходим к закону малых поперечных колебаний упруго-вязкой нити:

$$\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\left[g+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \tag{A}$$

при условии (1) и (2) для начального момента $t=0$ и граничных условиях:

$$u\,|_{x=0}=u\,|_{x=l}=0. \tag{9}$$

При $\eta=0$ уравнение (A) превращается в хорошо изученное со времени Даламбера уравнение колебаний упругой тяжелой струны, натянутой вдоль оси $u=0$ и закрепленной на концах.

§ 2. Так как в рассуждениях § 1 имеются пункты, которые можно было бы оспаривать, я даю здесь другой вывод уравнения (A), исходя из гидромеханических соображений.

Рассмотренное в § 1 движение частиц $A, B, C, \ldots$ нити происходит так, как если бы нить находилась в поле гидродинамического давления, линии градиента которого параллельны направлению смещений.

Направим ось OY в плоскости движения в сторону положительного отсчета смещений, так что $y\equiv u$. Предположим сначала, что нить имеет прямоугольное сечение с площадью s и длиной ребра, параллельного OY, равной Δy. Следовательно, длина другой стороны сечения нити равна $\frac{s}{\Delta y}$, и так как длина слоя B попрежнему считается равной dx, то площадь s' грани B, перпендикулярной к OY, есть

$$s'=\frac{s}{\Delta y}\,dx. \tag{10}$$

Существенно отметить, что Δy не есть прирост смещения u. В § 1 мы видели (7), что сила, происходящая вследствие натяжения и упругости нити и действующая на слой B в сторону положительных ординат OY, равна:

$$+Ms\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

следовательно, на единицу площади $s' \perp OY$ действует сила

$$+M\frac{s}{s'}\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которую можно отождествить с убылью фиктивного гидродинамического давления в направлении OY на отрезке Δy. Этот недостаток равен

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

Сопоставление двух последних выражений на основании (10) дает:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Мы предполагали сечение нити прямоугольным. Однако, каково бы оно ни было, его всегда можно разбить на достаточно узкие прямоугольники посредством прямых, параллельных OY. Повторение приведенных рассуждений даст тот же результат (11), который носит поэтому общий характер.

Далее, мы имеем систему уравнений Навье-Стокса, которую напишем в виде:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\Delta v_x\right\}+\rho\left\{g_x-\frac{dv_x}{dt}\right\}=0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\Delta v_y\right\}+\rho\left\{g_y-\frac{dv_y}{dt}\right\}=0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\Delta v_z\right\}+\rho\left\{g_z-\frac{dv_z}{dt}\right\}=0;$$

здесь

$$\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

v_x, v_y, v_z обозначают проекции скорости жидкой частицы на оси координат, $g_x=0$, $g_y=-g$, $g_z=0$ — проекции ускорения g силы тяжести, если ось OY направлена, как в нашем случае, вертикально вверх; символ $\frac{d}{dt}$ обозначает полную производную по времени, так что, например:

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z.$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad -\frac{\partial p}{\partial y}=M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Ф Мир

Далее,

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}, \quad v_z = 0,$$

так что

$$\theta = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(1) = 0.$$

Затем находим:

$$\Delta v_x = 0, \quad \Delta v_y = \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\, \Delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad \Delta v_z = 0;$$

наконец,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Подставляя все это в уравнения Навье-Стокса, увидим, что остается только второе уравнение, принимающее вид:

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \left\{ g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}, \tag{A}$$

вполне совпадающий с полученным в § 1.

§ 3. Вместо выведенного в предыдущих параграфах уравнения (A) мы рассмотрим теперь более общее уравнение:

$$Ru \equiv \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t), \tag{B}$$

описывающее вынужденные колебания упруго-вязкой нити в среде, сопротивляющейся с силой, пропорциональной первой степени скорости. Здесь η, M, ρ, H — положительные коэффициенты.

В случае отсутствия вынуждающей силы

$$f(x, t) = 0$$

имеем однородное уравнение:

$$Ru \equiv \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{C}$$

которое может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{12}$$

если положить

$$\eta \frac{\partial u}{\partial t} + Mu = v, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + Hu = w. \tag{13}$$

Рассмотрим тот случай, когда

$$\eta H - \rho M \neq 0. \tag{14}$$

Очевидно, что посредством (13) v и w однозначно определяются во всех тех точках плоскости независимых переменных x и t, в которых известны значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$.

С другой стороны, пусть P и Q — две какие-угодно функции переменных x, t; пусть P и Q имеют для всех значений x и t непрерывные производные: P — до второго, по x, Q — до первого, по t, порядка включительно.

Рассмотрим область S:

$$0 \leqslant t \leqslant +\infty, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{15}$$

и контур C, ее ограничивающий. Будем считать, что положительная ось t направлена влево, если смотреть вдоль положительной оси x.

Применение формулы Гаусса к области S, а также к области S_+, являющейся дополнением к S относительно всей плоскости x, t, дает следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \left\{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right\} dx\,dt &= \int\limits_C \frac{\partial P}{\partial x}\,dt + Q\,dx, \\ \iint\limits_{S_+} \left\{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right\} dx\,dt &= \int\limits_C \frac{\partial P}{\partial x}\,dt + Q\,dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Положим

$$P = \frac{1}{2} v^2, \quad Q = \int\limits_0^t v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt. \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = v\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = v\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Чтобы иметь право применить формулу (16) как к S, так и к S_+, достаточно предположить, что $\frac{\partial v}{\partial x}$ непрерывна для всех значений x и t и что v и $\frac{\partial w}{\partial t}$ непрерывны при $t=0$, $t=+\infty$, $x=0$ и $x=l$. Подстановка (17) в (16) дает тогда:

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = \int\limits_0^{+\infty}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=l} dt - \int\limits_0^{+\infty}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} dt + \int\limits_0^l dx\int\limits_0^0 v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt - \\ - \int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty} v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S_+} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = -\int\limits_0^{+\infty}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=l} dt + \int\limits_0^{+\infty}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} dt - \int\limits_0^l dx\int\limits_0^0 v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt + \\ + \int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty} v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt. \end{aligned}$$

Теперь можно показать, что если v и w исчезают на контуре C, то они исчезают тождественно для всех значений x и t.

Действительно, рассмотрим правую часть первой из написанных формул. Так как $v|_{x=l}=v|_{x=0}=0$, то первые два интеграла исчезают. Очевидно исчезновение и третьего интеграла. Остальное дает:

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = -\int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty} v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt.$$

Но

$$v\frac{\partial w}{\partial t}=\left[\eta\frac{\partial u}{\partial t}+Mu\right]\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+H\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\eta\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{HM}{2}u^2+\rho Mu\frac{\partial u}{\partial t}\right]+$$
$$+(\eta H-\rho M)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt=\left[\frac{\eta\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{HM}{2}u^2+M\rho u\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}^{t=+\infty}+(\eta H-\rho M)\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt.$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль при $t=0$ и $t=+\infty$, так как, вследствие исчезновения u и w на контуре C, имеем

$$u|_{t=0}=u|_{t=+\infty}=0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=0.$$

Поэтому

$$-\int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty} v\frac{\partial w}{\partial t}\,dt=-(\eta H-\rho M)\int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt.$$

Формулы (16) принимают вид:

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt=-(\eta H-\rho M)\int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt,$$

$$\iint\limits_{S_+}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt=+(\eta H-\rho M)\int\limits_0^l dx\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt.$$

Почленное сложение их дает:

$$\iint\limits_{S+S_+}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt=0,$$

где $S+S_+$ обозначает всю плоскость переменных x, t. Так как все члены интеграла слева не отрицательны, то отсюда следует:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0.$$

Значит, v может зависеть только от t. Однако при $x=0$ мы имеем $v=0$, следовательно,

$$v\equiv 0.$$

Поэтому $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \equiv 0$. Но $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$, а это значит, что w может быть функцией только x; при $t = 0$ мы имеем $w = 0$. Отсюда следует, что

$$w \equiv 0,$$

что и утверждалось.

На основании замечания, сделанного по поводу уравнений (13) при условии (14), доказанное положение может быть сформулировано так:

Если u есть решение уравнения (C), непрерывное и обладающее непрерывными производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ для всех значений x и t и обращающееся в нуль при $x = 0$ и при $x = l$ для всех $t \geqslant 0$, а также при $t = 0$ и при $t = +\infty$ для всех x из интервала $0 \leqslant x \leqslant l$, то

$$u \equiv 0.$$

Пусть теперь заданы какие-нибудь значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на контуре C. Это значит, что на этом контуре заданы значения v и w. В таком случае существует единственное решение u уравнения (C), непрерывное вместе со своими производными до второго порядка включительно во всей плоскости переменных x и t и принимающее на C вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданные последовательности значений.

В самом деле, если бы таких решений было два, например, u_1 и u_2, то в силу дистрибутивных свойств оператора R разность $u = u_1 - u_2$ также была бы решением для (C). Она удовлетворяла бы поставленным условиям непрерывности и обращалась бы вместе со своей производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ в нуль для точек контура C, не будучи тождественно равна нулю, а это находится в противоречии с доказанным положением.

Обращаясь теперь к неоднородному уравнению, покажем, что *уравнение* (B) *при условии* (14) *имеет единственное решение непрерывное со своими производными первого и второго порядка и удовлетворяющее условиям:*

$$\left. u \right|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l;$$
$$\left. u \right|_{t=+\infty} = \Psi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=+\infty} = \psi(x)$$

$$\left. u \right|_{x=0} = \mathrm{X}(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = \chi(t), \qquad t \geqslant 0,$$
$$\left. u \right|_{x=l} = \Omega(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l} = \omega(t)$$

причем, конечно,

$$\Phi(0) = \mathrm{X}(0), \quad \varphi(0) = \chi(0); \quad \Phi(l) = \Omega(0), \quad \varphi(l) = \omega(0);$$
$$\Psi(0) = \mathrm{X}(+\infty), \quad \psi(0) = \chi(+\infty); \quad \Psi(l) = \Omega(+\infty), \quad \psi(l) = \omega(+\infty).$$

Действительно, если бы существовало два различных решения u_1 и u_2 уравнения (B), то однородное уравнение (C) имело бы неисчезающее тождественно решение $u = u_1 - u_2$, которое удовлетворяло бы условиям непрерывности и обращалось бы вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ в нуль на границе области

$$0 \leqslant t, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

чего, как мы видели, не может быть.

До сих пор речь шла о том случае, когда $\eta H - \rho M \neq 0$.

Пусть теперь $\eta H - \rho M = 0$. Тогда, положив

$$\rho : \eta = H : M = \lambda, \quad \lambda > 0,$$

мы имели бы:

$$w = \lambda v,$$

и уравнение (C) приняло бы вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{18}$$

Относительно уравнения (18) доказано,[1] что если его интеграл v, непрерывный вместе со своими первыми производными, исчезает для любого x из интервала $0 \leqslant x \leqslant l$ при $t = 0$ и для любого $t \geqslant 0$ как при $x = 0$, так и при $x = l$, то $v \equiv 0$ внутри области S: $0 \leqslant t$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Поэтому тогда

$$\eta \frac{\partial u}{\partial t} + Mu \equiv 0,$$

откуда следует, что

$$u = \alpha e^{-\frac{M}{\eta} t},$$

где α может зависеть только от x. Так как при $t = 0$ должно быть $u = 0$, то $\alpha = 0$. В таком случае $u \equiv 0$. Остальные рассуждения по поводу ненулевых граничных условий и по поводу неоднородного уравнения могут быть буквально повторены и в этом случае, поэтому выводы этого параграфа нужно считать общими.

Связь излагаемой в этой работе теории с уравнением (18) теплопроводности не может быть случайной; во время вязкого трения слоев нити друг о друга вырабатывается тепло и процесс передачи последнего вдоль нити не может быть не связанным с процессом движения слоев нити.

Назовем интеграл уравнения (B) правильным в некоторой области изменения переменных x, t, если этот интеграл вместе со своими производными до второго порядка включительно непрерывен в данной области.

В таком случае можно считать доказанным, что существует[2] единственный правильный во всей плоскости переменных x, t интеграл u уравнения (B),

[1] Э. Гурса, Курс матем. анализа, т. III, ч. I, ГТТИ, стр. 260—262, 1933.

[2] Факт существования решения будет установлен в следующих параграфах. Изложенное позволяет лишь утверждать, что может быть не больше одного решения, удовлетворяющего условиям текста.

принимающий на контуре C вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданные последовательности значений. Более того, на основании формулы

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = -(\eta H - \rho M) \int\limits_0^l dx \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt = -(\eta H - \rho M) \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt$$

при $\eta H - \rho M > 0$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \leqslant t, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Как и выше, отсюда мы заключаем, что правильное в S решение u однородного уравнения (C) исчезает тождественно внутри S, если оно равно нулю на границе S вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ и если $\eta H - \rho M > 0$. Значит, при $\eta H - \rho M > 0$ неоднородное уравнение (B) имеет единственное правильное в S решение, принимающее на границе S вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданные значения.

Непосредственное доказательство единственности правильного в S интеграла уравнения (B), принимающего вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданные значения на C, для случая $\eta H - \rho M < 0$ было бы довольно затруднительным. Однако из формулы

$$\iint\limits_{S_+} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = +(\eta H - \rho M) \int\limits_0^l dx \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt =$$

$$= +(\eta H - \rho M) \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt, \quad \eta H - \rho M < 0$$

вследствие положительности обоих интегралов и подъинтегральных выражений выводим опять

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где под u разумеется интеграл однородного уравнения (C). Отсюда, как и раньше, получаем, что общее уравнение (B) и в случае $\eta H - \rho M < 0$ имеет единственное, правильное в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ решение $u(x, t)$, которое принимает на границе этой области вместе с $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданную последовательность значений. Что касается случая $\eta H - \rho M = 0$, то, как мы видели, он не заставляет сомневаться в единственности решения; нужно заметить, что в этом случае задание u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = +\infty$ является излишним.

Примечание. Из соображений, приведенных выше, следует, что интеграл уравнения

$$Ru \equiv \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t) \qquad \text{(C)}$$

однозначно определен во всей плоскости переменных x, t, если известны значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на контуре C:

$$u|_{t=0}=\Phi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x),$$

$$u|_{t=+\infty}=\Psi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=\psi(x),$$

$$u|_{x=0}=\mathrm{X}(t), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\chi(t),$$

$$u|_{x=l}=\Omega(t), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l}=\omega(t)\,.$$

Заметим, во-первых, что из

$$u|_{x=0}=\mathrm{X}(t), \quad u|_{x=l}=\Omega(t)$$

непосредственным дифференцированием по t получается.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\mathrm{X}'(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l}=\Omega'(t).$$

Следовательно, должно быть

$$\chi(t)=\mathrm{X}'(t), \quad \omega(t)=\Omega'(t),$$

и $\chi(t)$ и $\omega(t)$ не могут быть заданы произвольно, если даны $\mathrm{X}(t)$ и $\Omega(t)$. Если даны две последние функции, то уже тем самым даны и значения их производных по t при $x=0$ и при $x=l$.

Во-вторых, условия при $t=+\infty$:

$$u|_{t=+\infty}=\Psi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=\psi(x)$$

производят несколько странное впечатление. Действительно, может ли быть речь об упругом последействии, если значения смещений u заранее известны при $t=+\infty$? Как связать этот пункт рассуждений с физической постановкой задачи об упругом гистерезисе? Я утверждаю, что условие

$$u|_{t=+\infty}=\Psi(x)$$

является лишним в приведенном выше доказательстве единственности решения. Достаточно считать данным распределение скоростей при $t=+\infty$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=\psi(x).$$

Чтобы доказать это, достаточно предположить, что для однородного уравнения

$$Ru=0$$

при $t=+\infty$ лишь $\frac{\partial u}{\partial t}$ исчезает для всех значений x из интервала $(0, l)$. Тогда равенство

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\, dt = -\int\limits_0^l dx \int\limits_0^{+\infty} v \frac{\partial w}{\partial t}\, dt = -(\eta H - \rho M) \int\limits_0^l \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt -$$

$$- \int\limits_0^l \left[\frac{\eta\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{HM}{2} u^2 + \rho M u \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} dx$$

принимает вид:

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\, dt = -(\eta H - \rho M) \int\limits_0^l \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt - \frac{HM}{2} \int\limits_0^l (u^2)_{t=+\infty} dx.$$

При $\eta H - \rho M > 0$ оба члена справа отрицательны, в то время как слева имеем положительное количество. Равенство возможно при исчезновении всех членов. Далее, можно повторить приведенные в тексте соображения о единственности решения неоднородного уравнения.

Итак, можно считать доказанным, что уравнение

$$Ru = f(x, t)$$

имеет единственное решение u, которое на сторонах прямоугольника C удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = \mathrm{X}(t), \quad u|_{x=l} = \Omega(t), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty} = \psi(x). \end{gathered} \tag{X}$$

Последнее условие предполагает, что известно лишь распределение скоростей вдоль нити при $t=+\infty$.

С физической точки зрения дело обстоит именно так. Действительно, скорости движения слоев нити при $t=+\infty$ должны непременно исчезнуть, так что

$$\psi(x) \equiv 0$$

для всех x из интервала $(0, l)$. Это следует хотя бы из уравнения для свободной энергии E в изолированной системе, полученного Н. А. Наседкиным:

$$E = E_0 e^{-\alpha^2 t},$$

из которого видно, что свободная энергия E такой системы стремится к нулю при $t \to +\infty$, переходя в теплоту. А со свободной энергией стремятся к нулю и скорости движения слоев $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Поэтому во всех дальнейших рассуждениях мы можем считать данным условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=0,$$

обеспечивающее вместе с четырьмя прочими условиями (X) единственность решения задачи.

§ 4. Вернемся к однородному уравнению (C):

$$\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-H\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{C}$$

где u обозначает поперечное смещение частиц упруго-вязкой нити, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$ и движущейся в сопротивляющейся среде. Так как вынуждающая внешняя сила отсутствует, то движение, описываемое уравнением (C), мы будем называть свободным колебанием, не предполагая периодичности последнего. Мы будем искать решение $u(x,t)$ уравнения (C), удовлетворяющее условиям:

$$\begin{gathered} u\,|_{t=0}=\Phi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x),\\ u\,|_{x=0}=0,\quad u\,|_{x=l}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=0. \end{gathered} \tag{19}$$

Как мы видели, может существовать не больше одного такого решения, правильного при $t\geqslant 0$ и при $0\leqslant x\leqslant l$.

Пользуясь тем, что переменные x и t в (C) разделяются, я применяю способ Д. Бернулли.

Пусть

$$u(x,t)=XT, \tag{20}$$

где X, T зависят соответственно только от x и от t. Уравнение (C) принимает вид:

$$X'':X=(\rho T''+HT'):(\eta T'+MT).$$

Благодаря независимости переменных x и t каждая из частей написанного равенства может быть только постоянной. Обозначая последнюю $-\varkappa$, получаем два обыкновенных уравнения:

$$X''+\varkappa X=0, \tag{21}$$

$$\rho T''+(\varkappa\eta+H)\,T'+\varkappa MT=0. \tag{22}$$

Интеграл первого из них, исчезающий при $x=0$, есть

$$X=a\sin\sqrt{\varkappa}\,x.$$

Так как, по условию задачи, X должно обращаться в нуль при $x=l$, то

$$\sqrt{\varkappa}=\frac{m\pi}{l},\quad m\text{ — целое.} \tag{23}$$

Не нарушая общности рассуждений, m можно считать положительным, так как выбор знака определяется лишь выбором направления отсчета смещений. Тривиальное значение $m=0$ считаем исключенным.

Характеристическое уравнение для (22) есть

$$\rho q^2+(\varkappa\eta+H)q+\varkappa M=0,$$

так что

$$q',\ q''=\frac{-(\varkappa\eta+H)\pm\sqrt{(\varkappa\eta+H)^2-4\varkappa\rho M}}{2\rho},\tag{24}$$

$$\varkappa=\frac{m^2\pi^2}{l^2},\quad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Следовательно,

$$T=C'e^{q't}+C''e^{q''t}$$

с произвольными постоянными C' и C'' есть общий интеграл (22). Отсюда следует, что общий интеграл уравнения (C), обращающийся в нуль при $x=0$ и при $x=l$, имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t}+C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},\tag{25}$$

где

$$q'_m,\ q''_m=-\frac{\dfrac{m^2\pi^2\eta}{b^2}+H}{2\rho}\pm\left[\frac{\left(\dfrac{m^2\pi^2\eta}{b^2}+H\right)^2}{4\rho^2}-\frac{m^2\pi^2M}{\rho l^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

а постоянные C'_m, C''_m остаются пока произвольными. Мы их выберем, требуя соблюдения условий:

$$u\,\Big|_{t=0}=\Phi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x).$$

Дифференцируя (25) почленно по t (законность этого действия будет установлена в следующем параграфе), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(q'_m C'_m e^{q'_m t}+q''_m C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},\tag{26}$$

так что, положив в (25) и (26) $t=0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}u\,\Big|_{t=0}&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m+C''_m\right)\sin\frac{m\pi x}{l},\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(q'_m C'_m+q''_m C''_m\right)\sin\frac{m\pi x}{l}.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Предположим, с другой стороны, что

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi x}{l},\\ \varphi(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{l},\end{aligned} \tag{28}$$

так что при $x=0$ и при $x=l$

$$\Phi(0)=\varphi(0)=\Phi(l)=\varphi(l).$$

Тогда постоянные A_m и B_m определяются формулами:

$$\begin{aligned}A_m &= \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{m\pi x}{l},\\ B_m &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi x}{l}.\end{aligned} \qquad (m=1,2,\ldots) \tag{29}$$

Для того чтобы соблюдались условия

$$u\big|_{t=0}=\Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi(x), \tag{30}$$

достаточно положить

$$\begin{aligned}C'_m + C''_m &= A_m,\\ q'_m C'_m + q''_m C''_m &= B_m.\end{aligned} \qquad (m=1,2,\ldots) \tag{31}$$

При всех m, для которых $q'_m \neq q''_m$ (формула 24), из (31) однозначно определяются коэффициенты C'_m и C''_m по данным A_m и B_m. Но если существует такое целое $m=m_0 \geqslant 1$, для которого $q'_{m_0}=q''_{m_0}$, то найти C'_{m_0} и C''_{m_0} из (31) нельзя, да в этом и нет надобности, так как тогда достаточно знать сумму $C'_{m_0}+C''_{m_0}$. Последняя может быть определена посредством любого из двух уравнений (31) при условии:

$$B_{m_0}=q_{m_0}A_{m_0} \quad \left(q_{m_0}=q'_{m_0}=q''_{m_0}\right).$$

Итак, поперечные колебания упруго-вязкой нити, закрепленной на концах и движущейся в сопротивляющейся среде, в однородном случае свободных колебаний определяются уравнением:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t}+C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{32}$$

где

$$C'_m + C''_m = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$q'_m C'_m + q''_m C''_m = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

и где q'_m, q''_m, будучи корнями уравнений

$$\rho q^2 + (\varkappa_m \eta + H) q + \varkappa_m M = 0, \quad \varkappa_m = \frac{m^2\pi^2}{l^2}, \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

имеют значения:

$$q'_m, q''_m = -\frac{\frac{m^2\pi^2\eta}{l^2} + H}{2\rho} \pm \left[\frac{\left(\frac{m^2\pi^2\eta}{l^2} + H\right)^2}{4\rho^2} - \frac{m^2\pi^2 M}{\rho l^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом общее колебание складывается из частных вида:

$$\left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

каждое из которых, несмотря на возможную апериодичность, мы будем называть обертоном соответствующего порядка. Обертон первого порядка ($m = 1$) будет считаться основным тоном.

Из выражения для q'_m, q''_m видно, что при возрастании m $\frac{1}{|q'_m|}$, $\frac{1}{|q''_m|}$ представляют собой величины того же порядка малости, как и $\frac{1}{m^2}$.

§ 5. Теперь перейдем к вопросу о сходимости полученных рядов. Пусть введенные в предыдущем параграфе функции $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны вместе с их производными $\Phi'(x)$, $\varphi'(x)$ во всех точках интервала $0 \leqslant x \leqslant l$ и пусть их вторые производные $\Phi''(x)$, $\varphi''(x)$ на том же интервале удовлетворяют условиям Дирихле, т. е. остаются конечными, имеют конечное число максимумов и минимумов и конечное число точек разрыва первого рода.

В таком случае ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m + C''_m\right)\frac{m\pi}{l}\cos\frac{m\pi x}{l},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(q'_m C'_m + q''_m C''_m\right)\frac{m\pi}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}$$

представляют собой производные $\Phi'(x)$ и $\varphi'(x)$ во всех точках интервала $0 \leqslant x \leqslant l$. Так как последние сами непрерывны и имеют производные $\Phi''(x)$

и $\varphi''(x)$, удовлетворяющие условиям Дирихле в том же интервале, то коэффициенты их разложений

$$(C'_m + C''_m)\frac{m\pi}{l}, \quad (C'_m q'_m + C''_m q''_m)\frac{m\pi}{l}$$

имеют порядок малости[1] не ниже, чем $\frac{1}{m^2}\cdot$ Поэтому ряды, получающиеся из двух вышенаписанных путем почленного дифференцирования, равномерно сходятся и представляют собой соответственно разложения для $\Phi''(x)$ и $\varphi''(x)$.

Итак, ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t}\right)\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t}\right)\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

при $t=0$ соответственно равномерно сходятся к функциям

$$\Phi(x) = u|_{t=0}, \quad \Phi''(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{t=0}, \quad \varphi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, \quad \varphi''(x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Характер корней q'_m, q''_m позволяет утверждать, что при любом $t>0$ и при каком угодно A

$$\left|Ae^{q'_m t}\right| < |A|; \quad \left|Ae^{q''_m t}\right| < |A|.$$

Следовательно, выписанные выше четыре ряда, сходясь равномерно при $t=0$, тем более сходятся равномерно при любом $t>0$. Кроме того, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'^2_m e^{q'_m t} + C''_m q''^2_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

имеет при всяком $t \geqslant 0$ коэффициенты при $\sin\frac{m\pi x}{l}$ того же порядка малости, что и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t}\right)\cdot\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

---

[1] Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, стр. 172, 194, 2-е изд., 1933.

А так как последний, как мы видели, сходится равномерно при всяком $t \geqslant 0$, то и первый равномерно сходится для всех $t \geqslant 0$. Но этот ряд получается из

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

путем почленного дифференцирования по t; следовательно, такое дифференцирование законно и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m q'^2_m e^{q'_m t} + C''_m q''^2_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

при всяком $t \geqslant 0$ равномерно сходится к $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Мы доказали, таким образом, что при сделанных предположениях относительно функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ найденное в § 4 выражение для смещения $u(x, t)$, которое мы получили в виде бесконечного ряда, допускает почленное дифференцирование по x и по t столько раз, сколько нужно для составления всех производных, входящих в уравнение (C).

Приведенные здесь рассуждения тем более имеют силу в том случае, когда $\Phi''(x)$ непрерывна.

§ 6. В § 4 было найдено, что уравнение

$$\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{C}$$

при условиях

$$u|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+\infty} = 0$$

имеет решение:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{32}$$

где постоянные C'_m, C''_m, q'_m, q''_m имеют значения, указанные раньше.

Дифференцируя (32) по t и по x столько раз, сколько нужно для составления левой части (C), подставляя найденные значения производных в последнюю и собирая члены с одинаковыми значениями $\sin\frac{m\pi x}{l}$, получим выражение:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\left[\rho q'^2_m + (\varkappa_m \eta + H)\, q'_m + \varkappa_m M\right] C'_m e^{q'_m t} + \\ + \left[\rho q''^2_m + (\varkappa_m \eta + H)\, q''_m + \varkappa_m M\right] C''_m e^{q''_m t}\Big\}\sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{33}$$

где $\varkappa_m = \frac{m^2\pi^2}{l^2}$. Так как q'_m, q''_m — корни уравнения

$$\rho q^2_m + (\varkappa_m \eta + H)\, q_m + \varkappa_m M = 0,$$

то каждый член суммы (33) равен нулю. Следовательно, (32) действительно удовлетворяет уравнению (C).

Вследствие того, что

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_{x=0}=\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_{x=l}=0$$

для всех целых m как выражение (32), так и выражение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m\,q'_m\,e^{q'_m t}+C''_m\,q''_m\,e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{34}$$

обращаются в нуль при $x=0$ и при $x=l$, каково бы ни было t.

Далее, полагая в (32) и (34) $t=0$, находим:

$$u|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}(C'_m+C''_m)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{m=}^{\infty}(C'_m\,q'_m+C''_m\,q''_m)\sin\frac{m\pi x}{l};$$

вследствие выбора коэффициентов C'_m, C''_m:

$$C'_m+C''_m=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx,\qquad C'_m\,q'_m+C''_m\,q''_m=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

эти две величины оказываются соответственно равными $\Phi(x)$, $\varphi(x)$.

Наконец, положив в (34) $t=+\infty$, благодаря свойствам q'_m, q''_m найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+\infty}=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Следовательно, найденное решение (32) задачи удовлетворяет как уравнению (C), так и всем сопровождающим его условиям. Соображения § 3 позволяют утверждать, что другого решения того же уравнения с теми же условиями не существует.

§ 7. Каков же физический смысл полученного решения? Положим

$$\sigma_m=\frac{\dfrac{m^2\pi^2\eta}{l^2}+H}{2\rho},\qquad \nu_m=+\left[\frac{\left(\dfrac{m^2\pi^2\eta}{l^2}+H\right)^2}{4\rho^2}-\frac{m^2\pi^2M}{\rho l^2}\right]^{\frac{1}{2}},\qquad (m=1,\,2,\,\ldots) \tag{35}$$

так что

$$q_m=-\sigma_m+\nu_m,\qquad q''_m=-\sigma_m-\nu_m. \tag{36}$$

Тогда решение (32) можно представить в таком виде:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sigma_m t} [C'_m e^{\nu_m t} + C''_m e^{-\nu_m t}] \sin \frac{m\pi x}{l}, \tag{37}$$

так что смещение $u_m(x, t)$, получающееся от обертона m-го порядка, есть

$$u_m(x, t) = e^{-\sigma_m t} [C_m e^{\nu_m t} + C''_m e^{-\nu_m t}] \sin \frac{m\pi x}{l}. \tag{38}$$

Предположим сначала, что для выбранного m

$$\frac{\left(\frac{m^2 \pi^2 \eta}{l^2} + H\right)^2}{4\rho^2} - \frac{m^2 \pi^2 M}{\rho l^2} < 0,$$

как это может случиться, если M очень велико по сравнению с η и H.

Тогда, положив

$$\nu_m = + i\nu'_m, \quad [\nu'_m > 0, \quad i^2 = -1],$$

мы делаем подстановку:

$$C'_m + C''_m = A_m \sin B_m, \quad C'_m - C''_m = -iA_m \cos B_m; \tag{39}$$

после этого оказывается, что для данного m

$$u_m(x, t) = A_m e^{-\sigma_m t} \sin (\nu'_m t + B_m) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае обертон m-го порядка является таковым в узком смысле слова, будучи периодическим движением с периодом

$$\tau_m = \frac{2\pi}{\nu'_m} = \frac{2\pi}{\left|\left[\frac{m^2 \pi^2 \eta}{\rho l^2} - \sigma_m^2\right]^{\frac{1}{2}}\right|}, \tag{40}$$

где

$$\sigma_m = \left(\frac{m^2 \pi^2 \eta}{l^2} + H\right) : 2\rho. \tag{41}$$

Этот период τ_m тем меньше, чем выше порядок m обертона.

С другой стороны, амплитуда колебания частицы нити, с абсциссой x, имеет величину

$$a_m = A_m e^{-\sigma_m t} \sin \frac{m\pi x}{l},$$

которая, вследствие положительности σ_m, неограниченно убывает с возрастанием t и притом тем сильнее, чем выше порядок обертона m. Логарифмический декремент затухания дается формулой (41).

В том случае, когда для данного m корни q'_m, q''_m действительны и различны, соответствующий обертон апериодичен и может быть так назван лишь в расширенном толковании этого слова. Уравнения (35) и (36) показывают, что в этом случае

$$q'_m < 0, \quad q''_m < 0, \quad |q''_m| > |q'_m|.$$

Поэтому смещение $u_m(x, t)$, вызываемое таким обертоном, для всех частиц нити с течением времени стремится к нулю и тем более энергично, чем больше m. Аналогичное явление происходит и в том случае, когда $q'_m = q''_m$.

Может показаться на первый взгляд, что полученные результаты совершенно те же, к каким приводит теория колебаний упругих струн с учетом сопротивления, пропорционального первой степени скорости. В обоих случаях как периодические обертоны, так и обертоны, не имеющие периода, затухают с течением времени. Но в то время, как все обертоны чисто упругой струны затухают равномерно, имея общий декремент, зависящий только от коэффициента сопротивления H, декременты затухания обертонов упруго-вязкой нити, завися от H и от коэффициента вязкости η, существенно зависят от порядка обертона. Чем выше порядок обертона, тем быстрее этот обертон затухает, так что для достаточно большого промежутка времени, протекшего после начала движения, нить можно считать колеблющейся только в основном тоне (который может оказаться и апериодическим). Таким образом, благодаря исключительной роли внутреннего трения, в процессе колебания упруго-вязких нитей происходит явление, которое можно было бы назвать э л е в т е р о з о м и которое состоит в постепенном освобождении основного тона от сопутствующих обертонов. Это явление интересно в том отношении, что оно позволяет писать решение уравнения (С) не в виде (32) или (37), а в более простом:

$$u(x, t) = (C'_1 e^{q_1' t} + C'_1 e^{q_1'' t}) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{42}$$

если только t достаточно велико для того, чтобы можно было пренебречь влиянием всех обертонов. И во всяком случае можно найти такое конечное целое $N > 0$, что сумма

$$\sum_{m=1}^{N} \left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

достаточно точно представляет величину смещения частиц нити, каковы бы ни были x и t, $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$.

§ 8. Результаты предыдущего параграфа позволяют поставить очень простой опыт, посредством которого можно установить значение коэффициента вязкости η и модуля сдвига μ для вещества нити. В самом деле, благодаря элевтерозу можно без значительной ошибки принять, что по прошествии достаточно большого промежутка времени t_0 после начала движения при $t \geqslant t_0$ нить движется в основном тоне

$$u(x, t) = u_1(x, t) = (C_1' e^{q_1' t} + C''_1 e^{q_1'' t}) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{42}$$

где

$$q'_1 = -\sigma_1 + \nu_1, \quad q''_1 = -\sigma_1 - \nu_1$$

и

$$\sigma_1 = \frac{\frac{\pi^2 \eta}{l^2} + H}{2\rho}, \quad \nu_1 = \left[\sigma_1^2 - \frac{\pi^2 M}{\rho l^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, надлежащим выбором натяжения T нити можно достигнуть того, что основной тон (42) окажется периодическим. Для этого нужно только сделать T таким большим, чтобы $M = T + \mu$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{\pi^2 M}{\rho l^2} > \frac{\left(\frac{\pi^2 \eta}{l^2} + H\right)^2}{4\rho^2},$$

что, по крайней мере при небольших коэффициентах трения, всегда может быть достигнуто. Тогда уравнение (42) приобретает вид:

$$u(x, t) = A_1 e^{-\sigma_1 t} \sin(\nu_1 t + B_1) \cdot \sin\frac{\pi x}{l}; \tag{43}$$

где положено

$$A_1 \sin B_1 = C_1' + C_1'',$$
$$-iA_1 \cos B_1 = C_1' - C_1'', \quad i^2 = -1.$$

Фотографируя колебание (43) какой-нибудь частицы нити (для выбранного значения x), мы можем измерить на получившемся фильме как величину логарифмического декремента затухания σ_1, так и циклическую частоту ν_1. Тогда из уравнений:

$$2\rho\sigma_1 = \frac{\pi^2 \eta}{l^2} + H, \quad \nu_1^2 = \frac{\pi^2 (T + \mu)}{\rho l^2} - \sigma_1^2, \tag{44}$$

зная плотность ρ вещества нити, ее длину l, ее натяжение T и коэффициент внешнего трения H, можем вычислить[1] коэффициент вязкости η и модуль сдвига μ.

§ 9. До сих пор, занимаясь однородным уравнением (C) § 4, мы предполагали нить свободной от влияния внешних сил и, в частности, невесомой. Теперь мы рассмотрим движение частиц нити, подверженной силе тяжести. Последнюю будем считать направленной против положительного отсчета смещений, как в § 1 и 2. Продолжая считать, что движение происходит в среде, сопротивляющейся пропорционально первой степени скорости, и называя, как и раньше, коэффициент внешнего трения буквой H, напишем уравнение движения нити так:

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \tag{D}$$

при условиях:

$$\left. u \right|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$\left. u \right|_{x=0} = 0, \quad \left. u \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t+\infty} = 0. \tag{45}$$

[1] Это выражение для логарифмического декремента σ_1 является обобщением приведенного в статье R. Becker'a, см. Zts. f. Physik, 33_3, S. 191, Formel (10a), 1925. — У. А. Ляв а (loc. cit., стр. 128) читаем: „Если бы существовали сопротивления только этого типа (т. е. пропорциональные быстроте изменения деформации. — **А. Г.**), то, как указал Кельвин, относительное уменьшение амплитуды в единицу времени было бы обратно пропорционально квадрату периода колебания; но ряд опытов с крутильными колебаниями проволок показал, что этот закон не подтверждается“. [См. W. Thomson, Elasticity, Encycl. Brit.] Как видно из данных в тексте формул для σ_1 и ν_1, соотношение между относительным уменьшением амплитуды в единицу времени и периодом колебания отличается от кельвинского.

С точки зрения физической, смысл последнего из условий (45) ясен; ведь вязкость нити, так сказать, стремится уничтожить наличие градиентов скорости, т. е. благодаря отсутствию движения на концах свести к нулю все скорости и в середине.

Заметим, что уравнение (D) имеет частный интеграл:

$$-\frac{\rho g}{2M}x(l-x), \tag{46}$$

удовлетворяющий первой группе условий (45) на концах нити. Поэтому общее решение, удовлетворяющее этой группе условий, есть

$$u(x,\, t)=-\frac{\rho g}{2M}x(l-x)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C'_m e^{q'_m t}+C''_m e^{q''_m t}\right)\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}; \tag{47}$$

в самом деле, почленное дифференцирование (47) по t дает:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(q'_m C'_m e^{q'_m t}+q''_m C''_m e^{q''_m t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{48}$$

если ряд справа в (48) сходится равномерно для $t\geqslant 0$. Из (48) видно, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ обращается в нуль при всяком x, когда $t=+\infty$.

Коэффициенты C'_m, C''_m пока не определены. Выбирая их так, чтобы

$$\begin{gathered}C'_m+C''_m=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\Phi(x)+\frac{\rho g}{2M}x(l-x)\right]\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx,\\ q'_m C'_m+q''_m C''_m=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx,\end{gathered} \tag{49}$$

мы удовлетворяем первой группе условий (45), так как тогда, с одной стороны, имеем:

$$\begin{gathered}\Phi(x)+\frac{\rho g}{2M}x(l-x)=\sum_{m=1}^{\infty}(C'_m+C''_m)\sin\frac{m\pi x}{l},\\ \varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(q'_m C'_m+q''_m C''_m)\sin\frac{m\pi x}{l},\end{gathered} \tag{50}$$

а с другой — из (47) и (48) при $t=0$ находим:

$$u|_{t=0}=-\frac{\rho g}{2M}x(l-x)+\sum_{m=1}^{\infty}(C'_m+C''_m)\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}(q'_m C'_m+q''_m C''_m)\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

Далее, если $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны вместе с их первыми производными и имеют вторые производные, удовлетворяющие условиям Дирихле для всех значений x из интервала $0 \leqslant x \leqslant l$, то, как мы уже это видели в § 5, можно путем почленного дифференцирования (47) нужное количество раз составить равномерно сходящиеся ряды для всех производных, входящих в уравнение (D).

Наконец, из (47) при $t = +\infty$ получается:

$$u|_{t=+\infty} = -\frac{\rho g}{2M} x(l-x).$$

Следовательно, упруго-вязкая тяжелая нить, приходя в состояние покоя спустя бесконечно большой промежуток времени после начала движения, принимает форму параболы, а не цепной линии, как это можно было бы думать.

§ 10. Здесь мы рассмотрим еще более общий случай вынужденных колебаний упруго-вязкой нити. Относящееся к этому вопросу дифференциальное уравнение таково:

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t), \tag{E}$$

где $f(x, t)$ — фактор вынуждающей силы. Этот фактор предположим заданным в виде ряда:

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \tag{51}$$

Мы будем искать решение уравнения (E) также в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t} + a_m(t) \right) \sin \frac{m\pi x}{l}, \tag{52}$$

так что, предполагая возможным почленное дифференцирование этого ряда нужное число раз, имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(q'_m C'_m e^{q'_m t} + q''_m C''_m e^{q''_m t} + \dot{a}_m(t) \right) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(q'^2_m C'_m e^{q'_m t} + q''^2_m C''_m e^{q''_m t} + \ddot{a}_m(t) \right) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t} + a_m(t) \right) \left(-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(q'_m C'_m e^{q'_m t} + q''_m C''_m e^{q''_m t} + \dot{a}_m(t) \right) \left(-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l},
\end{aligned} \tag{53}$$

где q'_m, q''_m — попрежнему корни уравнения

$$\begin{gathered}
\rho q_m^2 + \left(\varkappa_m \eta + H \right) q_m + \varkappa_m M = 0, \\
\varkappa_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2}, \quad m = 1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{54}$$

Подставляя (51) и (53) в (E), приводим последнее к виду:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\left[\rho q_m'^2+(\varkappa_m\eta+H)q_m'+\varkappa_m M\right]C_m' e^{q_m' t}+$$

$$+\left[\rho q_m''^2+(\varkappa_m\eta+H)q_m'+x_m M\right]C_m'' e^{q_m'' t}+$$

$$+\left[\rho\ddot{a}_m(t)+(\varkappa_m\eta+H)\dot{a}_m(t)+\varkappa_m M a_m(t)\right]\Big\}\sin\frac{m\pi x}{l}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t)\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

На основании (54) первые два члена под знаком суммы исчезают. Остальные члены утождествим, полагая для всех $m=1, 2, \ldots$

$$\rho\ddot{a}_m(t)+(\varkappa_m\eta+H)\dot{a}_m(t)+\varkappa_m M a_m(t)=w_m(t). \tag{55}$$

Корни характеристического уравнения для (55) определятся из (54). Они равны q_m' и q_m''.

Заменив $\frac{d}{dt}$ на D, приведем (55) к виду [1]

$$\frac{1}{\rho}a_m'(t)+\frac{1}{\rho}\alpha_m''(t)=a_m(t)=(\rho D^2+(\varkappa_m\eta+H)D+\varkappa_m ME)^{-1}w_m(t),$$

где E — оператор тождественного преобразования и

$$a_m'(t)=\frac{1}{q_m''-q_m'}(D-q_m'E)^{-1}w_m(t),\quad a_m''=\frac{1}{q_m'-q_m''}(D-q_m''E)^{-1}w_m(t), \tag{56}$$

т. е. $a_m'(t)$, $a_m''(t)$, являются решениями неоднородных линейных уравнений первого порядка:

$$\frac{da_m'}{dt}-q_m'a_m'=\frac{w_m(t)}{q_m''-q_m'};\quad \frac{da_m''}{dt}-q_m''a_m''=\frac{w_m(t)}{q_m'-q_m''}.$$

Легко видеть, что интегралы этих уравнений, обращающиеся в нуль при $t=0$, соответственно равны:

$$a_m'(t)=\frac{-1}{q_m''-q_m'}e^{q_m' t}\int_0^t e^{-q_m'\theta}w_m(\theta)\,d\theta,$$

$$a_m''(t)=\frac{-1}{q_m'-q_m''}e^{q_m'' t}\int_0^t e^{-q_m''\theta}w_m(\theta)\,d\theta,$$

так что

$$a_m(t)=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{-1}{q_m''-q_m'}\int_0^t e^{q_m'(t-\theta)}w_m(\theta)\,d\theta+\frac{-1}{q_m'-q_m''}\int_0^t e^{q_m''(t-\theta)}w_m(\theta)\,d\theta\right\}. \tag{57}$$

[1] Здесь штрихи не обозначают производных.

Здесь существенным было предположение, что $q'_m \neq q''_m$. Однако и в случае $q''_{m_0} = q'_{m_0} = q_{m_0}$ применение символического способа интеграции (55) оказывается возможным; нужно только употребить подстановку:

$$(D - q_{m_0} E)\, a_{m_0}(t) = z_{m_0}, \quad (D - q_{m_0} E)\, z_{m_0} = \frac{w_{m_0}}{\rho},$$

чтобы получить для a_{m_0} выражение:

$$a_{m_0}(t) = \frac{1}{\rho} e^{q_{m_0} t} \int_0^t e^{q_{m_0}\theta}\, d\theta \int_0^\theta e^{-q_{m_0}(\theta - \vartheta)}\, w_m(\vartheta)\, d\vartheta,$$

обращающееся в 0 при $t = 0$.

На основании этих соображений напишем решение уравнения (E) в такой форме:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[C'_m - \frac{1}{\rho(q''_m - q'_m)} \int_0^t e^{-q'_m \theta} w_m(\theta)\, d\theta \right] e^{q'_m t} + \right.$$

$$\left. + \left[C''_m - \frac{1}{\rho(q'_m - q''_m)} \int_0^t e^{-q''_m \theta} w_m(\theta)\, d\theta \right] e^{q''_m t} \right\} \sin \frac{m\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sin \frac{m_0 \pi x}{l} e^{q_{m_0} t} \int_0^t e^{q_{m_0}\theta}\, d\theta \int_0^\theta e^{-q_{m_0}(\theta - \vartheta)}\, w_{m_0}(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{58}$$

Здесь сумма в правой части распространяется лишь на те m, для которых $q''_m \neq q'_m$. Последний член, выделенный из суммы, относится к такому $m = m_0$, для которого $q''_{m_0} = q'_{m_0} = q_{m_0}$. Если для всех m корни q'_m и q''_m характеристических уравнений (54) попарно различны, то этот последний член в выражении для $u(x, t)$ отсутствует.

§ 11. Найденное решение (58) уравнения (E) вынужденных колебаний обращается вместе со своей производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ в нуль для всех t при $x = 0$ и при $x = l$, так как

$$\sin \frac{m\pi 0}{l} = \sin \frac{m\pi l}{l} = 0$$

для всех целых m. Кроме того, легко убедиться в том, что

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

если положить

$$C'_m + C''_m = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx, \quad q'_m C'_m + q''_m C''_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx,$$

как мы это делали в § 4. Действительно, при $t = 0$ интегралы исчезают как в (58), так и в выражении, получающемся из (58) дифференцированием по t. Остальное дает разложение в ряды Фурье для u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$.

Таким образом остается открытым лишь вопрос о сходимости ряда (58) и тех, которые получаются из него почленным дифференцированием столько раз, сколько нужно для составления левой части (E). Мы уже видели в § 5, что ряды

$$\begin{gathered}
\sum_m^\infty \left\{ C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t} \right\} \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\sum_m^\infty \left\{ C'_m q'^2_m e^{q'_m t} + C''_m q''^2_m e^{q''_m t} \right\} \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\sum_m^\infty \left\{ C'_m e^{q'_m t} + C''_m e^{q''_m t} \right\} \left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
\sum_m^\infty \left\{ C'_m q'_m e^{q'_m t} + C''_m q''_m e^{q''_m t} \right\} \left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}
\end{gathered} \tag{59}$$

сходятся равномерно для всех $t \geqslant 0$ соответственно к функциям

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

где u обозначает смещение в случае отсутствия вынуждающей силы, если только $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны с их первыми производными и если их вторые производные удовлетворяют условиям Дирихле на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$. Следовательно, в данном случае подлежат рассмотрению ряды:

$$\begin{gathered}
\sum_{m=1}^\infty \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\rho\,(q''_m - q'_m)} \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta, \\
\sum_{m=1}^\infty \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\rho\,(q'_m - q''_m)} \int_0^t e^{q''_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta,
\end{gathered} \tag{60}$$

а также те, которые получаются из них дифференцированием для составления всех производных, входящих в (E).

Пусть для всех $t \geqslant 0$ величина силы

$$f(x, t) = \sum_m^\infty w_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}, \tag{61}$$

рассматриваемая как функция x, непрерывна в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ и имеет там непрерывную первую производную. Ее вторая производная пусть удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле. Тогда для всех $t \geqslant 0$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}, \tag{62}$$

причем коэффициенты $w_m(t)\frac{m\pi}{l}$ этого ряда имеют порядок малости не ниже $\frac{1}{m^2}$.

Тогда, во-первых, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{63}$$

сходится равномерно к функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ для всех $t \geqslant 0$, а, во-вторых, порядок малости $w_m(t)$ должен быть по крайней мере равен m^{-3}.

По этой же причине и ряды:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{\rho(q''_m - q'_m)} \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{\rho(q''_m - q'_m)} \left[w_m(t) + q'_m \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta \right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{\rho(q''_m - q'_m)} \left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta, \tag{64}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{\rho(q''_m - q'_m)} \left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) \left[w_m(t) + q'_m \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta \right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{\rho(q''_m - q'_m)} \left[\dot{w}_m(t) + q'_m w_m(t) + q'^2_m \int_0^t e^{q'_m(t-\theta)}\, w_m(\theta)\, d\theta \right],$$

а также ряды, получаемые из этих заменой q''_m на q'_m и обратно, равномерно сходятся при всех $t \geqslant 0$. Относительно первых четырех рядов это утверждение очевидно, так как порядок малости их коэффициентов при $\sin\frac{m\pi x}{l}$ не ниже порядка малости коэффициентов равномерно сходящегося ряда (63). Равномерная сходимость последнего ряда из (64) при всех $t \geqslant 0$ обеспечивается ограниченностью всех производных $\dot{w}_m(t)$, тем, что порядок малости $\dot{w}_m(t)$ не ниже m^{-3}, и, наконец, тем, что ряд (63) сходится равномерно.

Но (64) и аналогичные им ряды — это как раз те части разложений функций

$$u(x, t),\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

которые входят в уравнение (E) и которые получились бы путем почленного дифференцирования выражения (58) для $u(x, t)$ соответствующее количество раз. Принимая во внимание и равномерную сходимость рядов (59), приходим к заключению, что при предположениях, сделанных относительно функций Φ, φ и f, решение (58) уравнения (E) может быть почленно дифференцировано столько раз, сколько требуется для составления левой части (E). Что (58) есть действительно решение (E), можно было бы теперь непосредственно проверить.

Мы видели в начале этого параграфа, что это решение удовлетворяет условиям:

$$u\Big|_{t=0} = \Phi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u\Big|_{x=0} = 0,\quad u\Big|_{x=l} = 0.$$

Что касается четвертой стороны контура C, рассмотренного в § 3, то выражение (58) дифференцированием по t при $t = +\infty$ дает:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A'_m q'_m + A''_m q''_m \right\} \sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{65}$$

где

$$A' = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{\rho(q''_m - q'_m)} \int^{t} e^{q'_m(t-\theta)} w_m(\theta)\, d\theta \right],$$

$$A''_m = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{\rho(q'_m - q''_m)} \int_0^{t} e^{q''_m(t-\theta)} w_m(\theta)\, d\theta \right].$$

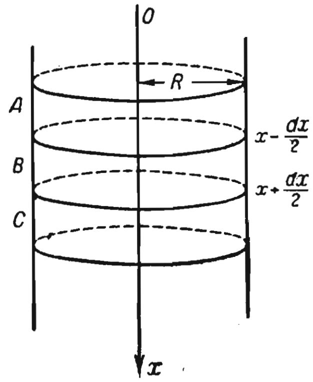
Если $w_m(\theta)$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ исчезают, как только θ становится больше некоторого конечного T, то $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+\infty} = 0$.

На основании теорем § 3 уравнение (58) § 10 дает единственное решение задачи.

На этом заканчиваем первую часть своей работы, посвященную поперечным колебаниям нити, с тем, чтобы во второй части рассмотреть вопрос о крутильных колебаниях, когда ось нити во все время движения сохраняет свою прямолинейную форму.

§ 12. Пусть нить в форме прямого круглого цилиндра с радиусом сечения R лежит своей осью вдоль оси OX, направленной вертикально вниз (фиг. 3). Пусть рядом бесконечно близких сечений нить, предполагаемая однородной, разбита на ряд бесконечно тонких слоев $\ldots$, A, B, C, $\ldots$ Пусть слой B, отграниченный от соседних слоев A и C сечениями с абсциссами $x - \frac{dx}{2}$, $x + \frac{dx}{2}$, в момент времени t оказывается повернутым вокруг OX на угол φ, отсчитываемый от некоторого выбранного для всех слоев начального положения. Угол φ есть функция абсциссы x и рассматриваемого момента времени t.

Выделим из слоя B элемент объема, ограниченный двумя цилиндрическими поверхностями с общей осью OX и радиусами сечений r, $r+dr$, горизонтальными плоскостями $x-\frac{dx}{2}$, $x+\frac{dx}{2}$ и двумя пересекающимися по OX плоскостями с азимутами ψ, $\psi+d\psi$. Этот элемент объема соприкасается по горизонтальным плоскостям $x-\frac{dx}{2}$, $x+\frac{dx}{2}$ с аналогичными элементами из слоев A и C. Вследствие неодинаковости мгновенных линейных скоростей у этих элементов, на их поверхности раздела должны возникать из-за вязкости вещества нити силы внутреннего трения, которые направлены в сторону уменьшения относительных скоростей. По закону Ньютона абсолютная величина силы трения пропорциональна площади $r\,d\psi\,dr$ соприкосновения двух элементов и градиенту линейной скорости $\frac{\partial(r\dot\varphi)}{\partial x}$.



Фиг. 3.

Следовательно, сила действия элемента из слоя A на элемент из слоя B, соседний с первым, есть

$$-\eta\, r\, dr\, d\psi\, r\left(\frac{\partial\dot\varphi}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}.$$

Аналогично, действие элемента из слоя C на рассматриваемый элемент из B равно

$$+\eta\, r\, dr\, d\psi\, r\left(\frac{\partial\dot\varphi}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}.$$

Их совместное действие оказывается равным

$$\eta\, r^2\, dr\, d\psi\, \frac{\partial^2\dot\varphi}{\partial x^2}\, dx,$$

и его момент относительно OX есть

$$\eta\, r^3\, dr\, d\psi\, \frac{\partial^2\dot\varphi}{\partial x^2}\, dx.$$

Поэтому полный момент сил внутреннего трения, действующих на весь слой B, равен

$$\eta\, \frac{\partial^2\dot\varphi}{\partial x^2}\, dx\int\limits_0^R r^3\, dr\int\limits_0^{2\pi} d\psi = +\frac{\pi R^4}{2}\, dx\, \eta\, \frac{\partial^2\dot\varphi}{\partial x^2}. \tag{66}$$

Далее, момент силы инерции для слоя B, очевидно, есть

$$-\frac{MR^2}{2}\ddot\varphi = -\frac{\pi R^4}{2}\, dx\, \rho\, \ddot\varphi; \tag{67}$$

здесь M обозначает массу слоя B.

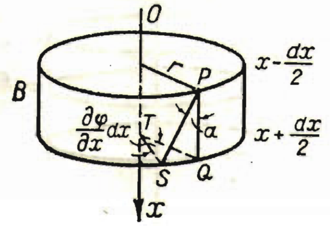
Наконец, рассмотрим, как действуют на слой B силы упругости.

Фиг. 4 представляет коаксиальную цилиндрическую часть слоя B той же высоты dx, но меньшего радиуса r. Благодаря кручению в верхнем сечении $x-\frac{dx}{2}$ этой части по закону Гука на элемент части, имеющий вид призмы с основанием $r\,dr\,d\psi$ и с высотой dx, действует сила упругости, равная

$$\mu\, r\, dr\, d\psi \operatorname{tg} \alpha = \mu\, r^2\, dr\, d\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}},$$

где α — угол наклона ребра призмы и μ — модуль сдвига.

Здесь мы воспользовались очевидным соотношением:



Фиг. 4.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SQ}{PQ} = \frac{r \cdot \angle QTS}{dx} = \frac{r}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}} \cdot dx.$$

Аналогично, в нижнем сечении рассматриваемой призмы действует в ту же сторону сила упругости

$$\mu\, r\, dr\, d\psi \operatorname{tg} \alpha' = \mu\, r^2\, dr\, d\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}}.$$

Следовательно, призма оказывается подверженной деформирующему усилию, равному разности приведенных выше сил:

$$\mu\, r^2\, dr\, d\psi \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\right] = \mu\, r^2\, dr\, d\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx.$$

Момент этого усилия относительно OX есть

$$\mu\, r^3\, dr\, d\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx;$$

полный момент упругих сил, действующих на весь слой B, оказывается равным

$$\mu \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\psi\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx = +\frac{\pi R^4}{2}\, dx\, \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{68}$$

По принципу Даламбера сумма моментов (66), (67) и (68) должна равняться нулю, откуда получаем дифференциальное уравнение крутильных колебаний упруго-вязкой нити:

$$\eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\, \partial t} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{F}$$

Оно имеет тот же вид, что и уравнение (A) § 1 для поперечных колебаний, если в последнем положить $T=0$, $g=0$. И физический смысл его тот же самый, только роль смещения u здесь играет угол закручивания φ.

§ 13. Уравнение (F) должно быть сопровождено граничными условиями, определяемыми из постановки задачи. Здесь рассматривается случай, когда верхний конец нити закреплен, а нижний несет некоторый дополнительный момент инерции, оставаясь свободным. Нить предполагается расположенной попрежнему вертикально и движение ее происходит в вакууме, так что внешнее трение отсутствует. На верхнем конце при всех $t \geqslant 0$ должно быть

$$\varphi|_{x=0} = 0. \tag{69}$$

Посмотрим, какие условия должны удовлетворяться на нижнем, свободном, конце с абсциссой $x = l$. Пусть дополнительный момент инерции обусловлен диском, прикрепленным к концу l нити своим центром. Пусть R_0 — радиус диска, d — его толщина, ρ_0 — плотность его вещества. Тогда мгновенный момент сил инерции диска есть

$$-\frac{\pi d R_0^4 \rho_0}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l}. \tag{70}$$

Этот момент должен уравновешиваться с моментами сил упругости и вязкости нити в месте прикрепления диска.

Рассмотрим сначала действие упругих сил. В элементе сечения нити, который имеет площадь $r\,dr\,d\psi$, из-за действия диска развивается сила упругости, равная

$$\mu_0 r^2\,dr\,d\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l},$$

как это мы видели в § 12. Следовательно, наоборот, этот элемент конечного сечения нити действует на диск с силой

$$-\mu_0 r^2\,dr\,d\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l}.$$

Ее момент относительно OX равен

$$-\mu_0 r^3\,dr\,d\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l},$$

и, следовательно, полный момент упругой реакции конца нити на диск есть:

$$-\frac{\mu_0 \pi R^4}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l}, \tag{71}$$

где R, как и раньше, радиус сечения нити; μ_0 есть модуль сдвига для конца нити.

Во-вторых, благодаря вязкости, тот же элемент $r\,dr\,d\psi$ нижнего сечения нити действует на диск по закону внутреннего трения с силой

$$-\eta_0 r^2\,dr\,d\psi\left(\frac{\partial\dot\varphi}{\partial x}\right)_{x=l},$$

где η_0, как и μ_0, относится к веществу, прикрепляющему диск к нити. Момент этой силы относительно OX есть

$$-\eta_0 r^3 \, dr \, d\psi \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x}\right)_{x=l},$$

и полный момент сил вязкости, действующих на диск, нужно считать равным

$$-\frac{\eta_0 \pi R^4}{2}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x}\right)_{x=l}. \tag{72}$$

Из (70), (71) и (72) по принципу Даламбера получаем условие на свободном конце:

$$\rho_0 d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} + \mu_0 \delta^4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=l} + \eta_0 \delta^4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t}\right)_{x=l} = 0, \tag{73}$$

где δ есть отношение радиуса нити к радиусу диска.

Наконец, должно быть дано начальное распределение углов закручивания φ и угловых скоростей $\dot{\varphi}$:

$$\varphi|_{t=0} = \Phi(x), \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \varphi(x). \tag{74}$$

§ 14. Уравнение

$$\eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \, \partial t} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{F}$$

для крутильных колебаний интегрируем по способу Д. Бернулли, положив

$$\varphi = XT,$$

где X есть функция только x, а T зависит только от t. Тогда уравнение (F) представляется в виде

$$X'' : X = \rho T'' : (\eta T' + \mu T),$$

и так как обе части суть функции переменных x, t, не зависящих друг от друга, то каждая из них есть постоянная величина. Обозначив последнюю $-\varkappa$, получим два обыкновенных уравнения второго порядка:

$$X'' + \varkappa X = 0. \tag{75}$$

$$\rho T'' + \varkappa \eta T' + \varkappa \mu T = 0, \tag{76}$$

причем интеграл (75), исчезающий при $x = 0$, есть

$$X = \sin \sqrt{\varkappa}\, x,$$

а (76) имеет общим интегралом выражение:

$$T = C' e^{q' t} + C'' e^{q'' t},$$

где C', C'' — произвольные постоянные и q', q'' — корни уравнения

$$\rho q^2 + \varkappa \eta q + \varkappa \mu = 0.$$

Вследствие этого мы получили частное решение уравнения (F) в виде:

$$\varphi = (C' e^{q' t} + C'' e^{q'' t}) \sin \sqrt{\varkappa}\, x, \tag{77}$$

причем это решение исчезает вместе со своей производной по t для всех $t \geqslant 0$ при $x = 0$.

Параметр $\varkappa$ должен принимать такое значение, чтобы удовлетворялось условие (73) на свободном конце нити. Для простоты допускаем, что $\mu_0 = \mu$ и $\eta_0 = \eta$, т. е. что способ прикрепления к диску не изменил упруго-вязких свойств в конце нити. На основании (77) условие (73) представляется в виде:

$$C' e^{q' t} \left\{ \rho_0 d q'^2 \sin \sqrt{\varkappa}\, l + \sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \eta q' \cos \sqrt{\varkappa}\, l + \sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \mu \cos \sqrt{\varkappa}\, l \right\} +$$
$$+ C'' e^{q'' t} \left\{ \rho_0 d q''^2 \sin \sqrt{\varkappa}\, l + \sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \eta q'' \cos \sqrt{\varkappa}\, l + \sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \mu \cos \sqrt{\varkappa}\, l \right\} = 0.$$

Чтобы это было справедливо при всех t, нужно чтобы q' и q'' удовлетворяли уравнению:

$$(\rho_0 d \sin \sqrt{\varkappa}\, l)\, q^2 + (\sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \eta \cos \sqrt{\varkappa}\, l)\, q + (\sqrt{\varkappa}\, \delta^4 \mu \cos \sqrt{\varkappa}\, l) = 0.$$

С другой стороны, q' и q'', по их определению, являются корнями для

$$\rho q^2 + \varkappa \eta q + \varkappa \mu = 0.$$

Следовательно, коэффициенты обоих последних уравнений должны быть пропорциональны, а это приводит к условию:

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\delta^4 \rho}{\rho_0 d} \operatorname{ctg} \sqrt{\varkappa}\, l. \tag{78}$$

Итак, для того чтобы удовлетворялось условие (73) на свободном конце нити, $\varkappa$ должно принимать лишь те значения

$$\sqrt{\varkappa_1},\ \sqrt{\varkappa_2},\ \ldots,\ \sqrt{\varkappa_m},\ \ldots,$$

которые служат корнями уравнения (78). Эти значения являются собственными значениями (Eigenwerte) рассматриваемой задачи. Не нарушая общности рассуждений, можно считать их положительными и занумерованными в порядке их возрастания (легко убедиться, что они различны, что их бесконечно много и что разность $\sqrt{\varkappa_m} - \sqrt{\varkappa_{m-1}}$ стремится к некоторому пределу, когда m стремится к бесконечности).

Вычисляя для каждого $\varkappa_m$, $m = 1, 2, \ldots$ соответствующие ему значения q_m', b_m'', видим, что

$$\varphi_m = \left(C_m' e^{q_m' t} + C_m'' e^{q_m'' t} \right) \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x$$

при любых постоянных C_m', C_m'' для всех $m = 1, 2, \ldots$ являются решениями уравнения (F), удовлетворяющими условиям (69) и (73) на концах нити. Вследствие линейности уравнений (F) и (73), сумма

$$\varphi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m' e^{q_m' t} + C_m'' e^{q_m'' t} \right) \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x \tag{79}$$

при любых C_m', C_m'' также является решением (F) при соблюдении обоих условий (69) и (73).

§ **15.** Выберем теперь C'_m, C''_m, $m=1, 2, \ldots$ так, чтобы соблюдались и начальные условия (74). Пусть данные функции $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны с их первыми производными для всех x из интервала $0 \leqslant x \leqslant l$ и пусть их вторые производные для тех же x удовлетворяют условиям Дирихле.

Положим

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x, \quad \varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x. \tag{80}$$

Дальше будет показано, что ряд (79) может быть почленно дифференцирован по x и по t столько раз, сколько требуется для составления уравнения (F). Дифференцируя (79) по t, находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q'_m C'_m e^{q'_m t} + q''_m C''_m e^{q''_m t} \right) \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x. \tag{81}$$

Подстановка $t=0$ дает:

$$\varphi|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} (C'_m + C''_m) \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} (q'_m C'_m + q''_m C''_m) \sin \sqrt{\varkappa_m}\, x.$$

Следовательно, чтобы соблюдались начальные условия (74), достаточно выбрать C'_m и C''_m согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} C'_m + C''_m &= A_m, \\ q'_m C'_m + q''_m C''_m &= B_m, \end{aligned} \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{82}$$

Остается лишь выяснить вопрос о сходимости рядов. В предыдущем параграфе было указано, что последовательность собственных значений

$$\sqrt{\varkappa_1}, \ \sqrt{\varkappa_2}, \ \ldots, \ \sqrt{\varkappa_m}, \ \ldots$$

при возрастании m стремится стать некоторой арифметической прогрессией. Это значит, что существует настолько большое целое $M > 0$, что ряды (80), в которых суммирование мы производим теперь от $m=M$ до $m=\infty$, состоят из членов, каждый из которых как угодно мало отличается от соответственных членов некоторых тригонометрических рядов. Так как сходимость ряда зависит именно от его остатка, то в данном случае могут быть применены основные теоремы рядов Фурье. Но тогда по данному поводу нам придется повторить те рассуждения, которые были приведены по аналогичному поводу в § 5. Следовательно, высказанное утверждение о равномерной сходимости всех рассматриваемых в этой задаче рядов можно считать доказанным.

Уравнение (79) дает решение для (F), которое при $t=0$, при $x=0$ и при $x=l$ определяется вместе со своей производной условиями (74), (69) и (73).

Последнее, будучи дифференциальным уравнением второго порядка, при помощи (74) выделяет из класса всевозможных интегралов (F) те, которые, удовлетворяя (73), должны одновременно удовлетворять условию (74) при $x=l$:

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0\\x=l}}=\Phi(l),\quad \dot\varphi\Big|_{\substack{t=0\\x=l}}=\varphi(l).$$

Кроме того, из (81) видно, что

$$\dot\varphi|_{t=\infty}=0.$$

На основании теорем § 3 можно утверждать, что решение (79) — единственное.

§ 16. Подойдем к изучаемому вопросу с иной точки зрения. В § 10 уравнение вынужденных поперечных колебаний упруго-вязкой нити написано в следующей форме:

$$\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-H\frac{\partial u}{\partial t}=-f(x,t), \tag{E}$$

где $f(x, t)$ — фактор вынуждающей силы.

Предварительно заметим следующее свойство функции

$$y(x)=f(x,0)-\rho\ddot u(x,0), \tag{83}$$

представляющей величину, пропорциональную потерянной силе у частицы нити с абсциссой x в начальный момент времени $t=0$. Здесь, как всегда, точки над буквой обозначают порядок производной по времени. Пусть x_0 есть корень $y(x)$. Если положить в (E) $H=0$, ограничиваясь для простоты случаем колебаний в вакууме, то при $x=x_0$ при помощи (83) из (E) найдем:

$$\left[\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\t=0}}=0,$$

или, так как

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\x=x_0}}=\varphi(x_0),\quad u\Big|_{\substack{t=0\\x=x_0}}=\Phi(x_0),$$

то

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\eta\varphi(x)+M\Phi(x)\right\}\right]_{x=x_0}=0. \tag{84}$$

Это значит, что те абсциссы x, для которых функция (83) обращается в нуль, являются точками перегиба кривой

$$Y=\eta\varphi(x)+M\Phi(x). \tag{85}$$

Вместе с тем соотношение

$$\left[\eta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\t=0}}=0$$

позволяет видеть, что в точках нити с такими абсциссами силы упругости уравновешиваются силами внутреннего трения в момент времени $t=0$.

В частности, если $\Phi(x_0) = 0$, то при $t = 0$ для точки $x = x_0$ сила упругости отсутствует. Тогда должна отсутствовать и сила вязкости. Следовательно, соседние с x_0 слои в момент $t = 0$ тогда должны иметь скорости, равные между собой относительно скорости в x_0 по величине и противоположно направленные. Кроме того, из-за отсутствия силы упругости, по закону Гука, должно быть:

$$u(x_0, 0) = 0.$$

Существенно отметить, что кривая (85) произвольна в той же мере, что и функции $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$.

В точке, подобной рассмотренной x_0, в начале движения силы упругости и вязкости взаимно уравновешиваются, и движение в этот момент таково, как если бы частица x_0, не будучи связана внутренними силами нити, была подвержена действию лишь вынуждающей силы $f(x_0, 0)$. Начальные условия движения этой частицы соблюдались бы при любых предположениях относительно сил упругости и вязкости в этот момент и требовалось бы только наличие равновесия между ними. Такие точки x_0 являются в некотором смысле особыми, мы будем исключать их из рассмотрения при изучении явления в общем. Дальше, в § 18, мы увидим математический смысл этого исключения, заметив сейчас, что благодаря произволу в выборе функции $Y(x)$, можно считать, что выбранная кривая (85) не имеет точек перегиба. Однако это предположение несущественно, что и будет показано в § 19.

§ 17. Если бы на частицы нити, кроме внешних сил, действовали только силы упругости, то закон малых (поперечных или крутильных) колебаний нити выражался бы уравнением

$$f(x, t) - \rho \ddot{u}(x, t) = Mu(x, t),$$

где $u(x, t)$, смотря по обстоятельствам, есть или линейное перемещение или угол закручивания. Следовательно, в этом случае было бы:

$$u(x, t) = \frac{1}{M}[f(x, t) - \rho \ddot{u}(x, t)]. \tag{86}$$

Это уравнение чисто упругих перемещений является выражением закона Гука на основании принципа Даламбера.

Если же в рассмотрение вводятся такие силы, как, например, внутреннее трение, то уравнение (86), благодаря аддитивным свойствам малых деформаций, должно быть дополнено. Дополнительный к (86) член можно было бы составить следующим образом. Пусть частица нити с абсциссой x в момент времени θ получает мгновенный импульс, равный единице. Пусть вследствие действия этого импульса та же частица получает в более поздний момент $t \geqslant \theta$ дополнительное к (86) смещение, которое мы обозначим $K(x; t, \theta)$. Благодаря аддитивности перемещений можем тогда утверждать, что если на частицу x в момент θ подействовал импульс $F(x, \theta)\,d\theta$, то в момент $t > \theta$ она получит дополнительное к (86) смещение, равное

$$K(x; t, \theta)\; F(x, \theta)\,d\theta.$$

Вследствие той же аддитивности дополнительное к (86) смещение нужно считать равным:

$$\int_0^t K(x;\, t,\, \theta)\, F(x,\, \theta)\, d\theta,$$

если на частицу нити x действовала в течение всего предшествующего времени переменная сила $F(x,\, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant t$.

Так как влияние дополнительных к упругим внутренних сил (например, сил вязкости) считается учтенным посредством функции $K(x; t, \theta)$, то по принципу Даламбера $F(x,\, \theta)$ следует полагать равным

$$f(x,\, \theta) - \rho \ddot{u}(x,\, \theta).$$

Подставляя все это в (86), мы приходим к уравнению:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{M}\left[f(x,\, t) - \rho \ddot{u}(x,\, t)\right] + \int_0^t K(x;\, t,\, \theta)\left[f(x,\, \theta) - \rho \ddot{u}(x,\, \theta)\right] d\theta, \qquad (G)$$

данному В. Вольтерра, а также Больцманом.[1]

Здесь ядро $K(x; t, \theta)$ предполагается обычно известным из опыта. Тогда (G) дает $u(x,\, t)$.

§ 18. Поставим иную задачу. Именно, пользуясь тем, что закон поперечных или крутильных колебаний известен на основании изложенного в предыдущих параграфах, попытаемся определить вид ядра $K(x; t, \theta)$ для упруговязкой нити.

Умножив (G) на M, введем обозначения:

$$Mu(x,\, t) = U(x,\, t), \quad f(x,\, t) - \rho \ddot{u}(x,\, t) = V(x,\, t).$$

Для краткости, вместо $U(x,\, t) - V(x,\, t)$ будем писать $W(x,\, t)$. Тогда

$$W(x,\, t) = \int_0^t MK(x;\, t,\, \theta)\, V(x,\, \theta)\, d\theta.$$

Функция $K(x; t, \theta)$, по смыслу рассуждений, посредством которых она была введена, должна зависеть не от t и θ по отдельности, а от их разности $t - \theta$. Поэтому будем пытаться найти функцию $K(x,\, t-\theta) = MK(x;\, t,\, \theta)$, удовлетворяющую уравнению:

$$W(x,\, t) = \int_0^t K(x,\, t-\theta)\, V(x,\, \theta)\, d\theta. \qquad (87)$$

Под интегралом правой части выполним преобразование

$$t - \theta = \vartheta, \quad d\theta = -d\vartheta.$$

---

[1] L. Boltzmann, Ann. d. Phys., 7, 624, 1876; V. Volterra, Drei Vorles. u. s. w. Leipz., стр. 159, 1914.

Тогда

$$\int_0^t K(x, t-\theta) V(x, \theta) d\theta = -\int_t^0 K(x, \vartheta) V(x, t-\vartheta) d\vartheta.$$

Уравнение (87) принимает вид:

$$\int_0^t V(x, t-\vartheta) K(x, \vartheta) d\vartheta = W(x, t). \tag{88}$$

Это — уравнение Вольтерра первого рода с ядром $V(x, t-\vartheta)$ циклического типа, изучением которого занимался в числе других и Пуассон, благодаря чему его называют часто именем последнего. Из теории уравнений Вольтерра следует, что решение $K(x, \vartheta)$ уравнения (88), если оно существует, непременно единственно.

Пусть x не есть точка перегиба кривой

$$Y = \eta\varphi(x) + M\Phi(x).$$

Рассмотрим множество моментов времени $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$, отделенных друг от друга достаточно малым интервалом τ. Обозначим:

$$\begin{aligned} W(x, i\tau) &= W_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \\ \tau V(x, (i-j)\tau) &= V_{i-j}, \quad j \leqslant i, \\ K(x, j\tau) &= K_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Тогда уравнение (88) приближенно может быть заменено следующей системой:

$$\sum_{j=0}^{i} V_{i-j} K_j = W_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{89}$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &V_0 K_0 &&= W_0 \\ &V_1 K_0 + V_0 K_1 &&= W_1 \\ &V_2 K_0 + V_1 K_1 + V_0 K_2 &&= W_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Определитель этой системы есть:

$$V_0^{n+1} = [f(x, 0) - \rho\ddot{u}(x, 0)]^{n+1},$$

где n — любое целое неотрицательное число. Так как этот определитель не равен нулю при сделанном предположении относительно точки x, то из (89) можно найти сколь угодно большое число n неизвестных $K_0, K_1, \ldots$, и притом единственным образом определенных при данном τ. Находя достаточно большое количество значений K_i при выбранных x и τ, мы по способу Прони[1] можем

[1] Витекер Э., Робинсон Г., Матем. обработка результатов наблюдений, ОНТИ, стр. 343, 1933.

найти приближенное выражение для $K(x, t-\vartheta)$ в виде суммы показательных функций:

$$K(x, t-\theta)=\sum_{p=1}^{N} A_p(x)\, e^{\alpha_p(x)[t-\theta]}, \tag{90}$$

где $A_p(x)$, $\alpha_p(x)$ — надлежащим способом подобранные для данного x числа.

§ 19. Пусть теперь $V(x, 0)=0$ для данного x, являющегося особой точкой в смысле, установленном в § 16, и пусть производная от $V(x, t)$ по t при $t=0$ не исчезает. Хотя система (89) предыдущего параграфа и не разрешима в этом случае, тем не менее и для таких значений x ядро K может быть найдено при помощи следующего общего приема. Дифференцируя (88) по t, находим:

$$K(x, t)\, V(x, 0)+\int_0^t \frac{\partial V(x, t-\vartheta)}{\partial t} K(x, \vartheta)\, d\vartheta=\frac{\partial W(x, t)}{\partial t},$$

или, так как $V(x, 0)=0$:

$$\int_0^t \frac{\partial V(x, t-\vartheta)}{\partial t} K(x, \vartheta)\, d\vartheta=\frac{\partial W(x, t)}{\partial t}, \tag{91}$$

т. е. опять уравнение типа (88), но с ядром $\frac{\partial V}{\partial t}$, не исчезающем при $t=0$. Тогда остается лишь повторить все сказанное по этому поводу в § 18.

Если бы для данного x производная $\frac{\partial V}{\partial t}$ обращалась в нуль при $t=0$, но $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right|_{t=0} \neq 0$, то, дифференцируя (91) по t, опять получили бы уравнение типа (88):

$$\int_0^t \frac{\partial^2 V(x, t-\vartheta)}{\partial t^2} K(x, \vartheta)\, d\vartheta=\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2}$$

с ядром, не исчезающим при $t=0$. Общность приведенных рассуждений очевидна.

Решающее слово, как всегда, принадлежит опыту. Здесь может быть одно из двух: или наблюдения над малыми колебаниями однородных нитей в самом деле приводят к тем законам движения, о которых говорилось выше, или же действительные колебания происходят не так, как это следовало бы при сделанных предположениях по теории. В первом случае было бы возможно заключить, что упругое последействие, дающее себя знать в рассматриваемом процессе движения нити, является следствием совместного влияния упругих и вязких сил. Во втором случае можно было бы по меньшей мере утверждать, что наличие сил упругости и вязкости не исчерпывает проблемы упругого последействия. Однако и в этом втором случае проведенное выше исследование вопроса все-таки является некоторым приближением к разгадке истинной природы упругого последействия.

Московский текстильный институт.

LE PROBLÈME DE L'ACTION POSTÉRIEURE ÉLASTIQUE ET LA FRICTION INTÉRIEURE

A. N. GUÉRASSIMOV

(Moscou)

(Résumé)

L'ouvrage proposé est un essai théorique à appliquer les équations de la théorie de l'élasticité et de la hydrodynamique classique à la question de petits déplacements de fils homogènes, appelés ici élastovisqueux.

Dans cet ouvrage est donnée une équation aux dérivées partielles du troisième ordre et il a été démontré que cette équation ne peut avoir qu'une seule solution qui prend avec sa dérivée première par rapport à t les valeurs données sur la borne du domaine fondamental. Cette équation peut être résolue en appliquant par exemple la méthode connue de D. Bernoulli.

Les mouvements des fils visqueux et en même temps élastiques peuvent être décrits moyennant l'équation intégrale de L. Boltzmann, la fonction influente de cette équation étant donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles dont les coefficients ont été trouvés par la méthode de Prony.

Les résultats de la théorie exposée s'appliquent actuellement à la méthode acoustique pour la déterminaison pratique et assez simple du coefficient de la friction intérieure et du module de l'élasticité.

Institut textile de Moscou.