

УСТОЙЧИВОСТЬ СПЛОШНЫХ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

А. В. ДЯТЛОВ

(Москва)

Сплошные составные стержни, состоящие из ряда профилей, соединенных упругими швами, находят широкое применение в металлических и деревянных конструкциях.

Если модуль упругости E сварного или заклепочного шва весьма высок и потому податливость шва почти не сказывается на величине критической сжимающей силы для стальных стержней, то для деревянных стержней дело обстоит иначе. Модуль упругости гвоздевого или шпоночного шва невысок, податливость шва значительна, и, как показывают экспериментальные исследования, критическая сила для деревянных составных стержней значительно ниже эйлеровской критической силы для целого стержня того же сечения.

Общее решение задачи об устойчивости сплошного составного стержня до сих пор отсутствует.

Полученное автором общее решение основывается на общей теории изгиба сплошных составных стержней. Поэтому сперва будет вкратце изложена общая теория изгиба сплошных составных стержней, а затем рассмотрена их устойчивость.

§ 1. Общая теория изгиба сплошных составных стержней

1. Теорией изгиба сплошных составных стержней занимались J. Arnovljevič, P. Fillunger, R. Kalina, K. Gikmann, A. Соколов.¹

¹ 1. J. Arnovljevič, Beitrag zur Theorie der Verbundbalken insbesondere der genieteten Träger, „Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen“, 1910. 2. P. Fillunger, Die Berechnung genieteter Vollwandträger, „Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien“, Mathematisch-Naturw. Klasse, Bd. 127, H. 9, 1918. 3. R. Kalina, Der Blechträger mit durchlaufenden Schweissnähten, „Wasserwirtschaft“, H. 7/8, 1933. 4. R. Kalina, Die Spannungsverteilung in Blechträgern mit unterbrochenen Schweissnähten, Der Stahlbau, H. 5,

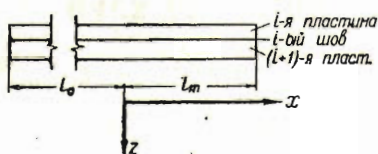
В этом параграфе будет дано некоторое обобщение применяемого ими (а также и в этой статье) метода исследования.

2. Как известно, элементарная теория изгиба дает достаточно точное решение для балки в виде пластины прямоугольного сечения. Для балок, составленных из ряда пластин, соединенных упругими швами, естественно употребить следующий прием.

Приводим разрезы по швам 1—1, 2—2, ..., i — i , ... соединяющие пластины балки (фиг. 1).

Тогда каждую пластину можно рассматривать как свободно лежащую балку, в которой действует момент:

$$M_i^* = \frac{MJ_i}{\sum_{i=1}^n J_i} \quad (1)$$



Фиг. 1.

и эксцентрично приложенные нормальные силы:

$$N_i = \sigma_i F_i = \int_x^{l_m} (T_i - T_{i-1}) dx, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

M — момент внешних сил,

J_i — момент инерции пластины,

$\sum_{i=1}^n J_i$ — сумма моментов инерции всех n пластин, составляющих данное сечение,

T_i — касательное усилие в i -ом шве,

σ_i — нормальное напряжение в i -ой пластине,

F_i — площадь i -ой пластины.

Под действием касательных усилий T_i шов деформируется, претерпевая конечный сдвиг.

Благодаря этому сечение при изгибе не остается плоским, а приобретает смещения в швах. Величина этого смещения полагается пропорциональной в каждой точке с абсциссой x действующему в этой точке усилию T_{ix} . Это первая предпосылка, лежащая в основу исследования, основывается на ряде экспериментальных исследований и соответствует упругим свойствам шва, изображаемым законом Гука.

Вторая предпосылка заключается в том, что кривизна как функция координаты z считается непрерывной. Отсюда вытекает, что кривизна волокон, примыкающих к шву и принадлежащих соответственно верхней и нижней пластинам, одинакова. Учитывая, что каждая пластина рассматривается как

1934. 5. K. G i r k m a n n, Spannungsverteilung in geschweissten Blechträgern, „Der Stahlbau“, Н. 12/13, 1933. 6. А. А. С о к о л о в, Распределение напряжений в точечном шве при изгибе, „Журнал технической физики“, т. III, вып. 1 и 7, 1933.

балка, напряжения в которой определяются по элементарной теории изгиба, вторую предпосылку можем записать в следующей форме:

$$\frac{M_1}{J_1} = \frac{M_2}{J_2} = \dots = \frac{M_n}{J_n}, \quad (3)$$

где M_1, M_2, \dots, M_n — моменты, действительно действующие в пластинах балки, т. е. вычисленные с учетом эксцентрисичности в приложении нормальных сил, передающихся на пластины со швов.

Заметим, что эта предпосылка дает значения изгибающих моментов M_1, M_2, \dots, M_n , обращающие потенциальную энергию деформированной балки в минимум.

С этой целью напишем выражение потенциальной энергии:

$$V = \frac{1}{2E} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^n \frac{M_i^2}{J_i} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2}{F_i} \right) dx, \quad (4)$$

где

$$M_i = M_i^* - \int_z^{l_m} (T_i - T_{i-1}) \frac{h_i}{2} dx,$$

h_i — высота пластины, причем M_i и N_i связаны условиями:

$$\sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n N_i z_i = M, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i = 0, \quad (6)$$

где z_i — расстояние от центра инерции i -й пластины до произвольной оси x (параллельной оси балки), M — момент внешних сил.

Обозначим подынтегральную функцию в выражении (4) через D , разность между левой и правой частью (5) через G и левую часть (6) через F .

Тогда, следуя правилу неопределенных множителей Лагранжа, составим функцию:

$$\beta = D + \lambda_1(x) G + \lambda_2(x) F. \quad (7)$$

Так как M_1, M_2, \dots, M_n согласно сказанному обращают (4) при условии (5) и (6) в минимум, то должны иметь место следующие уравнения Эйлера, составленные для функции β :

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{EJ_1} + \lambda_1(x) &= 0, \\ \frac{M_2}{EJ_2} + \lambda_1(x) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{M_n}{EJ_n} + \lambda_1(x) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда

$$\frac{M_1}{EJ_1} = \frac{M_2}{EJ_2} = \dots = \frac{M_n}{EJ_n} = -\lambda_1(x), \quad (9)$$

и, следовательно, множитель Лагранжа $\lambda_1(x)$ представляет в рассматриваемом случае кривизну балки.¹

Если потребовать, чтобы и нормальные силы N_1, N_2, \dots, N_n обращали потенциальную энергию в минимум, то получим дополнительные уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{EF_1} + \lambda_1(x) z_1 + \lambda_2(x) &= 0, \\ \frac{N_2}{EF_2} + \lambda_1(x) z_2 + \lambda_2(x) &= 0, \\ \dots & \\ \frac{N_n}{EF_n} + \lambda_1(x) z_n + \lambda_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Докажем, что при выполнении условий (8) и (10) распределение напряжений в составной балке совпадает с распределением напряжений в целой балке, вычисленным по элементарной теории изгиба.

С этой целью перепишем уравнения (10) в следующем виде:

$$\frac{N_1 - \lambda_2(x)}{EF_1 z_1} = \frac{N_2 - \lambda_2(x)}{EF_2 z_2} = \dots = \frac{N_n - \lambda_2(x)}{EF_n z_n} = -\lambda_1(x), \quad (11)$$

откуда

$$\frac{\sum_{i=1}^n N_i - n \lambda_2(x)}{E \sum_{i=1}^n F_i z_i} = -\lambda_1(x). \quad (12)$$

Так как согласно (6)

$$\sum_{i=1}^n N_i = 0,$$

то

$$n \lambda_2(x) = \lambda_1(x) E \sum_{i=1}^n F_i z_i. \quad (13)$$

¹ В статье А. А. Соколова, Распределение напряжений в точечном шве при изгибе, „Журнал технической физики“, т. III, вып. 1 и 7, 1933, исходя из выражения потенциальной энергии, в котором не учтена полностью энергия нормальных усилий, для составной балки получаются соотношения: $\frac{M_1^*}{J_1} = \frac{M_2^*}{J_2} = \dots = \frac{M_n^*}{J_n}$, т. е. такие же, как для составной балки, не имеющей швов (так называемой многоярусной балки).

Выберем ось x , до которой отсчитываются z_i , так чтобы

$$\sum_{i=1}^n F_i z_i = 0.$$

Иначе говоря, проведем ось x через центр инерции сечения балки. В этом случае согласно (13):

$$\lambda_2(x) = 0. \quad (13,1)$$

Поэтому при указанном выборе оси x вместо (11) имеем:

$$\frac{N_1}{F_1 z_1} = \frac{N_2}{F_2 z_2} = \dots = \frac{N_n}{F_n z_n} = -\lambda_1(x) \cdot E. \quad (14)$$

Отсюда легко видеть, что при одновременном выполнении условий (8) и (10) напряжения в балке будут распределяться, как в целой балке.

Поскольку для целой балки имеют место уравнения (8) и (10), а для составной балки только уравнения (8), то имеет место:

Теорема I. Целая балка обладает меньшей потенциальной энергией деформации, чем составная балка.

Учитывая эту теорему, можно заранее утверждать, что критическая сжимающая сила для составного стержня будет меньше, чем для целого стержня.

3. Направим координатные оси по главным осям инерции балки (такой выбор, однако, необязателен).

Рассмотрим i -ый шов, соединяющий i -ую и $(i+1)$ -ую пластину.

Перемещение нижних волокон i -ой пластины складывается из удлинения волокон при изгибе моментом M_i и сжатия напряжения σ_i (для растянутой зоны знаки смещений соответственно изменяются). Таким образом перемещение будет равно:

$$S_i = \frac{h_i}{2EJ_i} \int_0^x M_i dx - \frac{1}{E} \int_0^x \sigma_i dx, \quad (15)$$

где h_i — толщина, J_i — момент инерции, M_i — изгибающий момент, действующий в i -ой пластине.

Учитывая соотношения (3) и (5) п. 2, выражение (15) можем переписать в виде:

$$S_i = \frac{h_i}{2EJ_0} \int_0^x \left(M - \sum_{k=1}^n \sigma_k F_k z_k \right) dx - \frac{1}{E} \int_0^x \sigma_i dx, \quad (16)$$

где M — момент внешних сил, J_0 — сумма моментов инерции всех n пластин, составляющих данную балку. Аналогично напишется выражение для перемещения верхнего волокна $(i+1)$ -ой пластины, которое равно:

$$S'_{i+1} = -\frac{h_{i+1}}{2EJ_0} \int_0^x \left(M - \sum_{k=1}^n \sigma_k F_k z_k \right) dx - \frac{1}{E} \int_0^x \sigma_{i+1} dx. \quad (17)$$

Общее решение этой системы, как известно, имеет вид:¹

$$\sigma_i = {}^0\sigma_i + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij} (C_j \cos h\lambda_j x + D_j \sin h\lambda_j x), \quad (23)$$

где ${}^0\sigma_i$ — i -ое частное решение неоднородной системы (22), C_j, D_j — произвольные константы, подлежащие определению, λ_j — корни алгебраического уравнения степени $2n$:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda^2 - a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \lambda^2 - a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & \lambda^2 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

Γ_{ij} — миноры детерминанта (24), соответствующие элементу a_{ij} , после подстановки в детерминант значения $\lambda = \lambda_j$.

Учитывая (5) и (9), получим:

$$T_i = - \sum_{k=1}^i \frac{d^0\sigma_k}{dx} F_k - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj} \lambda_j F_k (C_j \sin h\lambda_j x + D_j \cos h\lambda_j x). \quad (25)$$

Предположим, что имеется N участков, где σ_i и $\frac{d\sigma_i}{dx}$ однозначно дифференцируемы. В таком случае для определения постоянных C_j и D_j , общее число которых $2n \cdot N$, имеем следующие условия:

$$1) \quad x = l_0, \quad \sigma_i = 0,$$

где l_0 — расстояние от начала координат до левой опоры,

$$2) \quad x = l_m, \quad \sigma_i = 0,$$

где l_m — расстояние от начала координат до правой опоры,

$$3) \quad \text{для } x = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$(\sigma_i)_j = (\sigma_i)_{j+1}, \quad (T_i)_j = (T_i)_{j+1},$$

где l_j — абсцисса, определяющая начало j -го участка с однозначно дифференцируемыми σ_i и $\frac{d\sigma_i}{dx}$.

Всего получим $2n \cdot N$ уравнений. Определитель этой системы отличен от нуля. Действительно, в правых частях рассматриваемых уравнений стоят

¹ При λ_j мнимом гиперболические функции переходят в круговые.

функции ${}^{\circ}\sigma_i$ и $\frac{d{}^{\circ}\sigma_i}{dx}$, зависящие от момента M и обращающиеся в нуль при $M=0$ (поскольку ${}^{\circ}\sigma_i$ есть частное решение неоднородной системы (8)). Поэтому, если бы определитель рассматриваемой системы обращался в нуль, то при отсутствии внешних сил ($M=0$) значения C_j и D_j были бы отличны от нуля и в балке существовало бы напряженное состояние.

Предполагая, что отсчет напряжений происходит от напряжений, имеющих место при $M=0$, необходимо заключить, что в этом случае константы C_j и D_j равны нулю. Таким образом определитель системы уравнений, определяющих константы C_j и D_j , не равен нулю:

$$\Delta \neq 0. \quad (26)$$

4. Система уравнений (22) при частных значениях функции M обладает рядом интересных свойств. Для целей нашего исследования достаточно ограничиться рассмотрением случая симметричной непрерывной нагрузки, дающей изгибающий момент:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n=1, 3, 5, \dots), \quad (27)$$

где l — пролет балки. Частные решения системы (22) будем искать в виде:

$${}^{\circ}\sigma_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (28)$$

где B_{in} — некоторые постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Подставив (27) и (28) в (22) и допуская, что ${}^{\circ}\sigma_i$ имеют непрерывные (или по крайней мере кусочно-непрерывные) производные второго порядка, что справедливо для рассматриваемого случая непрерывной нагрузки, найдем значения коэффициентов:

$$B_{in} = \begin{vmatrix} -\frac{n^2\pi^2}{l^2} + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,n+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} & \dots & -\frac{n^2\pi^2}{l^2} + a_{nn} \end{vmatrix} m_n. \quad (29)$$

$$B_{in} = \begin{vmatrix} -\frac{n^2\pi^2}{l^2} + a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & -\frac{n^2\pi^2}{l^2} + a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & -\frac{n^2\pi^2}{l^2} + a_{nn} \end{vmatrix} m_n.$$

Таким образом общее решение неоднородной системы (22) будет:

$$\sigma_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \cos \frac{n\pi}{l} \cdot x + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij} (C_j \cos h \lambda_j x + D_j \sin h \lambda_j x), \quad (30)$$

откуда

$$T_i = \sum_{k=1}^i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} F_k B_{in} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \cdot x - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^n F_k \Gamma_{ij} \lambda_j (C_j \sin h \lambda_j x + D_j \cos h \lambda_j x). \quad (31)$$

Постоянные C_j и D_j определяются из условий:

- 1) $x=0, T_i=0,$
- 2) $x=\frac{l}{2}, \sigma_i=0.$

Легко видеть, что при этих условиях получится однородная система линейных алгебраических уравнений с детерминантом Δ , который согласно формуле (26) не равен нулю.

Отсюда следует:

Теорема II. В случае симметричной непрерывной нагрузки напряжения в центрах инерции пластин, составляющих балку, определяются по формуле:

$$\sigma_i = {}^0\sigma_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (32)$$

где B_{in} находятся по формуле (29).

В частном случае, когда $M = m \cos \frac{\pi x}{l}$, встречающемся при рассмотрении устойчивости составных стержней, коэффициенты B_{in} получаются не зависящими от индекса n и потому по теореме II:

$$\sigma_i = B_i \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (33)$$

С другой стороны, напряжения, вычисленные по элементарной теории изгиба, в этом случае будут:

$$\bar{\sigma}_i = \bar{B}_i \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (34)$$

где $\bar{B}_i = \frac{mz_i}{J}$, J — момент инерции целой балки, z_i — расстояние от центра инерции пластины до центра инерции балки. Поэтому в рассматриваемом случае напряжения в составной балке получим равными напряжениям в целой балке, умноженным на коэффициент

$$k = \frac{B_i}{\bar{B}_i} = \frac{B_i J}{mz_i}.$$

Иначе говоря, происходит аффинное преобразование эпюры напряжений целой балки.

§ 2. Теория устойчивости сплошных составных стержней

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что принятие косинусоидальной (синусоидальной) формы искривления, шарнирно закрепленного по концам стержня, является достаточно точным при исследовании устойчивости центрально и эксцентрично сжатых *сплошных и сквозных* стержней. Поэтому можно считать, что выпучивание сжатого *составного* стержня также происходит по косинусоиде (синусоиде).

В § 1 (теорема II) доказано, что в случае симметричной непрерывной нагрузки, или что по теореме Шведлера равносильно условию непрерывности изгибающего момента и его производных первого и второго порядка,¹ напряжения в составной балке определяются по формуле:

$$\sigma_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (1)$$

где коэффициенты B_{in} определяются по формуле (29) § 1.

В нашем случае

$$M = m_n \cos \frac{\pi x}{l} = Pf \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

где f — прогиб по середине стержня. Из (2) видно, что требуемые условия непрерывности M , $\frac{dM}{dx}$ и $\frac{d^2M}{dx^2}$ удовлетворены.

Выяснив напряженное состояние, перейдем к вычислению критической силы $P_{кр}$.

Потенциальная энергия изогнутого стержня будет:

$$V = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_i^2 dx}{2EJ_i} + \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{N_i^2 dx}{2EF_i}, \quad (3)$$

где n — полное число пластин в балке.

Величины M_i и N_i связаны уравнениями (5) и (9) § 1. Используя эти соотношения, представим (3) в виде:

$$V = \int_0^l \frac{\left(M - \sum_{i=1}^n N_i z_i \right)^2 dx}{2EJ_0} + \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{N_i^2 dx}{2EF_i}. \quad (4)$$

¹ По теореме Шведлера $Q = \frac{dM}{dx}$ и $q = \frac{d^2M}{dx^2}$, где q — интенсивность нагрузки, M — изгибающий момент. Так как всякая дифференцируемая функция непрерывна, то Q и M при непрерывном q необходимо непрерывны. Поэтому условие непрерывности q соответствует условию непрерывности M , $\frac{dM}{dx}$ и $\frac{d^2M}{dx^2}$.

Подставляя сюда

$$N_i = \sigma_i F_i = B_i F_i \cos \frac{\pi x}{l} = B_i F_i M,$$

где

$$B_i = \frac{F_i}{P_f},$$

получим вместо (4):

$$V = \int_0^l \frac{M^2 \left(1 - \sum_{i=1}^n B_i F_i z_i \right)^2 dx}{2EJ_0} + \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M^2 B_i^2 F_i}{2E} dx. \tag{5}$$

Приравнявая это значение V работе силы P , найдем критическую силу:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2 \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n B_i F_i z_i \right)^2 + J_0 \sum_{i=1}^n B_i^2 F_i \right]}, \tag{6}$$

где

$$B_i = \frac{B_i}{P_f} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,n+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} & \dots & -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + a_{nn} \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Коэффициенты a_{ij} имеют значение, указанное в § 1.

§ 3. Применения общей теории устойчивости сплошных составных стержней к частным случаям

1. Стойка двутаврового сечения

а) Общие формулы. По формуле (7) § 2, учитывая обозначения § 1, находим:

$$B = \frac{a_2}{\frac{\pi^2}{l^2} + a_1}, \tag{1}$$

где

$$a_1 = \frac{\varepsilon (h_1 + h_2)^2}{2EJ_0} + \frac{\varepsilon}{E \cdot b_1 h_1}, \quad (2, 1)$$

$$a_2 = \frac{\varepsilon (h_1 + h_2)}{2EJ_0 b_1 h_1}, \quad (2, 2)$$

причем приняты следующие обозначения:

b_1 и h_1 — ширина и толщина полок,

h_2 — высота стенки,

$J_0 = 2J_1 + J_2$ — сумма моментов инерции полок и стенки относительно собственных осей инерции.

Подставляя значение B в формулу (6) § 2, получим:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2 [1 + F_1^2 (h_1 + h_2)^2 B^2 + 2F_1 J_0 B^2 - 2F_1 (h_1 + h_2) \cdot B]}, \quad (3)$$

где $F_1 = b_1 h_1$ — площадь сечения полки.

Если ввести коэффициент k , равный отношению действительного нормального усилия в поясе, к расчетному (определяемому по элементарной теории):

$$k = \frac{2Ja_2}{\left(\frac{\pi^2}{l^2} + a_1\right) (h_1 + h_2)}, \quad (4)$$

где J — момент инерции всего сечения, то вместо (3) получим:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2 \left[1 + \frac{k^2 J_{\pi} (J_{\pi} + J_0)}{J^2} - \frac{2k J_{\pi}}{J} \right]}, \quad (5)$$

где

$$J_{\pi} = \frac{b_1 h_1 (h_1 + h_2)^2}{2}$$

есть момент инерции поясов относительно центра инерции всего сечения.

При $k = 1$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_0 J^2}{l^2 (J^2 + J_{\pi}^2 + J_{\pi} J_0 - 2J_{\pi} J)} \equiv \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (6)$$

б) Численный пример. Рассмотрим двутавровую стойку, состоящую из трех досок сечением 4×25 см.

На фиг. 2 по оси ординат отложена разность между критической силой, вычисленной по Эйлеру ($P_{\text{кр. Эй.}}$), и действительной критической силой ($P_{\text{кр.}}$) в процентах. Из фиг. 2 видно, что эта разность возрастает с уменьшением гибкости стойки λ и уменьшением отношения $\frac{\varepsilon}{E}$.

Для соединений, имеющих

$$\frac{\varepsilon}{E} \geq 0.01,$$

уменьшение критической силы для $\lambda > 100$ практически равно нулю.

2. Стойка, составленная из двух брусьев

а) Общие формулы. По формуле (7) § 2, учитывая обозначения § 1 находим:

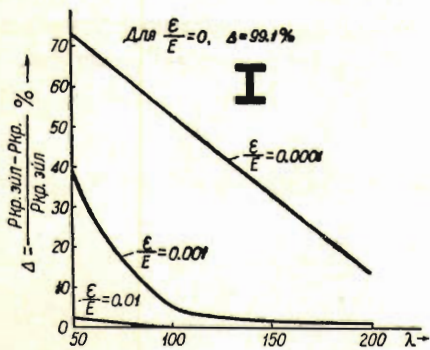
$$B = \frac{a_2}{\frac{\pi^2}{l^2} + a_1}, \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{8\varepsilon}{Ebh}, \quad (8, 1)$$

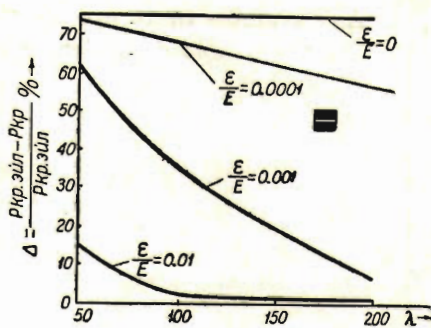
$$a_2 = \frac{6\varepsilon}{Eb^2 h^3}. \quad (8, 2)$$

Подставляя в (6) § 2, получим:

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2 \left[1 + \frac{4}{3} b^2 h^4 B^2 - 2bh^2 B \right]}. \quad (9)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

б) Численный пример. Рассмотрим стойку, составленную из двух досок сечением 5×10 см.

Результаты вычисления разности между $p_{кр.эвл.}$ и действительным $p_{кр}$ в процентах изображены на фиг. 3.

Сравнивая фиг. 2 и фиг. 3, видим, что форма сечения оказывает сильное влияние на величину критической силы. Так, для $\lambda = 100$ и $\frac{\varepsilon}{E} = 0.001$ для двутаврового сечения $\Delta = 3.18\%$, а для сечения, состоящего из двух досок, $\Delta = 35.28\%$.

Исследование прочих практически важных случаев не представляет никаких затруднений и может быть легко выполнено по формулам, приведенным в § 3.

Исследованные частные случаи иллюстрированы численными примерами.

STABILITY OF BUILT-UP BARS**A. DIATLOV**

(Moscow)

(Summary)

The author gives in the present article a general solution of the stability problem of built-up bars. This problem presents a considerable interest for wooden structures with a small modulus of elasticity of joints (\mathcal{E}) and a considerable yielding of joints.

The solution of this problem is given by the author on the base of the general bending theory of built-up bars.

The application of the general solution to individual cases permits readil determination of the value of the critical force for any shape of cross section however complicated it may be.

As examples there are discussed I-columns and a strut built up of two bars. The investigated particular cases are illustrated by numerical examples.
