

О ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ НИТЕЙ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ю. С. СИКОРСКИЙ

(Одесса)

§ 1. Пусть совершенно гибкая, нерастяжимая нить (провод) подвергается действию сплошных внешних сил, непрерывных как по величине, так и по направлению. Внешние силы внутри нити вызывают натяжения, нормальные к плоскостям поперечных сечений. И если площади поперечных сечений всюду по величине одинаковы, то нормальные напряжения в точках, расположенных вдоль нити, будут, вообще говоря, различны.

Но если площади поперечных сечений нити изменять пропорционально натяжениям, то нормальные напряжения в различных точках будут по величине одни и те же.

Таким образом изготовленную нить с переменным поперечным сечением будем называть *нитью равного сопротивления*, а кривую провисания нити, форму которой принимает ось нити, будем называть *линией равного сопротивления*, принимая, что ось нити есть геометрическое место центров тяжести поперечных сечений.

В частности, если действующей внешней силой является сила тяжести, то кривую провисания назовем *цепной линией равного сопротивления*.

Среди других авторов вопросом о форме равновесия нити равного сопротивления занимался Кориолис. Он рассматривал тот простейший случай, когда однородная нить подвешена к двум точкам неподвижно и подвергается действию только силы тяжести. В заметке, напечатанной в первом журнале Лиувилля, для цепной линии равного сопротивления Кориолис дал уравнение:

$$e^{\frac{y}{k}} \cos \frac{x}{k} = 1,$$

в котором k обозначает постоянную.

§ 2. Обозначим буквой s длину участка M_0M нити, причем M_0 есть фиксированная точка на оси нити. Будем полагать, что силы, приложенные к элементу ds нити, могут быть приведены к одной силе Pds , проекции которой на координатные оси пусть будут:

$$Xds, Yds, Zds.$$

Сила P , как известно, называется силой, отнесенной к единице длины. Пусть α , β и γ обозначают углы, которые касательная в точке M к оси нити образует с координатными осями. Нормальное натяжение T в сечении, соответствующем точке M , направлено по этой касательной. Дифференциальные уравнения линии равновесия нити имеют вид:

$$\begin{aligned} d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + X ds &= 0, \\ d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + Y ds &= 0, \\ d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + Z ds &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

причем

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma.$$

Пусть F обозначает переменную площадь поперечного сечения нити равного сопротивления; R — нормальное напряжение, постоянное по величине во всех точках нити. В таком случае натяжение

$$T = FR.$$

Будем полагать, что отнесенная к единице длины нити величина силы зависит от длины s дуги $M_0 M$, т. е. что

$$P = F \delta_0 f(s). \quad (2)$$

Относительно функции $f(s)$ условимся, что в тех интервалах, в которых мы будем ее рассматривать, она непрерывна, однозначна и принимает вещественные положительные значения; δ_0 есть то значение, которое принимает P при $F=1$ и $f(s)=1$. В дальнейшем функцию $f(s)$ будем называть *распределяющей функцией*.

Дифференциальные уравнения кривой равновесия нити равного сопротивления будут иметь вид:

$$\begin{aligned} d\left(F \frac{dx}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R} F f(s) \cos \lambda ds &= 0, \\ d\left(F \frac{dy}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R} F f(s) \cos \mu ds &= 0, \\ d\left(F \frac{dz}{ds}\right) + \frac{\delta_0}{R} F f(s) \cos \nu ds &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где буквами λ , μ и ν обозначены углы, образованные вектором P с осями координат, и где

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (4)$$

Умножая уравнение (3) соответственно на

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

и принимая во внимание (4), результаты сложим. Мы получим:

$$\frac{dF}{F} + \frac{1}{k} f(s) \cos \omega ds = 0, \quad (5)$$

где

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu. \quad (6)$$

Следовательно, ω есть лежащий в соприкасающейся плоскости угол между вектором P , приложенным к некоторой точке M линии равного сопротивления, и касательной к этой линии в этой точке. Параметр

$$k = \frac{R}{\delta_0}.$$

Из (5) имеем

$$F = F_0 e^{-\frac{1}{k} \int_0^s f(s) \cos \omega ds}. \quad (7)$$

Здесь F_0 есть площадь поперечного сечения, проходящего через начало отсчета дуг.

Нетрудно заметить, что F есть функция от s , убывающая при $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ и возрастающая при $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$.

Подставляя значение F в уравнения (3) и помня, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \alpha}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \alpha + \frac{f(s)}{k} \cos \lambda &= 0, \\ \frac{d \cos \beta}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \beta + \frac{f(s)}{k} \cos \mu &= 0, \\ \frac{d \cos \gamma}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \gamma + \frac{f(s)}{k} \cos \nu &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (6), (7) и (8) определяют

$$\alpha, \beta, \gamma, \omega \text{ и } F,$$

когда заданы

$$k, f(s), \lambda = \lambda(s), \mu = \mu(s), \cos \nu = \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu};$$

равенства

$$x = x_0 + \int_0^s \cos \alpha ds, \quad y = y_0 + \int_0^s \cos \beta ds, \quad z = z_0 + \int_0^s \cos \gamma ds$$

представят в параметрической форме уравнение искомой линии равного сопротивления.

Постоянные интегрирования могут быть определены, если будут заданы соответствующие $s=0$ величины:

$$F_0, \alpha_0, \beta_0, x_0, y_0, z_0.$$

§ 3. Напомним теорему: если к точке M оси нити приложена отнесенная к единице длины сила P , то бинормаль в этой точке оси нити перпендикулярна к вектору P . Следовательно, вектор P лежит в соприкасающейся плоскости.

Во всякой точке оси нити направленная к центру кривизны главная нормаль составляет тупой угол с направлением P .

§ 4. Умножим уравнения [(8), § 2] соответственно на $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ и результаты сложим. Мы получим:

$$\cos \lambda \frac{d \cos \alpha}{ds} + \cos \mu \frac{d \cos \beta}{ds} + \cos \nu \frac{d \cos \gamma}{ds} + \frac{f(s)}{k} \sin^2 \omega = 0.$$

Пусть α_1 , β_1 и γ_1 обозначают углы, образованные главной нормалью в точке M оси нити с координатными осями, а ρ_1 — радиус первой кривизны в той же точке. В таком случае, согласно формулам Серре-Френе:

$$\frac{d \cos \alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha_1}{\rho_1}, \quad \frac{d \cos \beta}{ds} = \frac{\cos \beta_1}{\rho_1}, \quad \frac{d \cos \gamma}{ds} = \frac{\cos \gamma_1}{\rho_1}.$$

В виду этого

$$\cos \lambda \cos \alpha_1 + \cos \mu \cos \beta_1 + \cos \nu \cos \gamma_1 + \frac{\rho_1 f(s)}{k} \sin^2 \omega = 0.$$

Но в силу теоремы § 3:

$$\cos \lambda \cos \alpha_1 + \cos \mu \cos \beta_1 + \cos \nu \cos \gamma_1 = \cos \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \omega, \quad (1)$$

т. е.

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{f(s)}{k} \sin \omega; \quad (2)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \alpha}{ds} &= \frac{\cos \alpha_1 \sin \omega}{k} f(s), \\ \frac{d \cos \beta}{ds} &= \frac{\cos \beta_1 \sin \omega}{k} f(s), \\ \frac{d \cos \gamma}{ds} &= \frac{\cos \gamma_1 \sin \omega}{k} f(s). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (8, § 2) приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\cos \omega \cos \alpha - \cos \lambda}{\sin \omega}, \\ \cos \beta_1 &= \frac{\cos \omega \cos \beta - \cos \mu}{\sin \omega}, \\ \cos \gamma_1 &= \frac{\cos \omega \cos \gamma - \cos \nu}{\sin \omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть α_2 , β_2 и γ_2 обозначают углы, образуемые с осями координат бинормалью в точке M линии равного сопротивления. В таком случае, вследствие перпендикулярности к бинормали вектора P и касательной, будем иметь:

$$\begin{aligned}\cos \lambda \cos \alpha_2 + \cos \mu \cos \beta_2 + \cos \nu \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2 &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha_2}{\cos \mu \cos \gamma - \cos \nu \cos \beta} &= \frac{\cos \beta_2}{\cos \nu \cos \alpha - \cos \lambda \cos \gamma} = \frac{\cos \gamma_2}{\cos \lambda \cos \beta - \cos \mu \cos \alpha} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\cos \mu \cos \gamma - \cos \nu \cos \beta)^2 + (\cos \nu \cos \alpha - \cos \lambda \cos \gamma)^2 + (\cos \lambda \cos \beta - \cos \mu \cos \alpha)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sin \omega}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos \alpha_2 &= \frac{\cos \mu \cos \gamma - \cos \nu \cos \beta}{\sin \omega}, \\ \cos \beta_2 &= \frac{\cos \nu \cos \alpha - \cos \lambda \cos \gamma}{\sin \omega}, \\ \cos \gamma_2 &= \frac{\cos \lambda \cos \beta - \cos \mu \cos \alpha}{\sin \omega}.\end{aligned}\tag{4}$$

Формулы (2), (3) и (4) удобны для вычисления радиуса первой кривизны и определения направления главной нормали и бинормали. Отметим еще формулу для вычисления радиуса второй кривизны.

Воспользуемся формулами Серре-Френе:

$$\frac{d \cos \alpha_2}{ds} = \frac{\cos \alpha_1}{\rho_2}, \quad \frac{d \cos \beta_2}{ds} = \frac{\cos \beta_1}{\rho_2}, \quad \frac{d \cos \gamma_2}{ds} = \frac{\cos \gamma_1}{\rho_2},$$

в которых ρ_2 — радиус второй кривизны.

Определив отсюда $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ и $\cos \gamma_1$, внесем их значения в (1). Мы получим:

$$\rho_2 = \frac{-\sin \omega ds}{\cos \lambda d \cos \alpha_2 + \cos \mu d \cos \beta_2 + \cos \nu d \cos \gamma_2},$$

либо, вследствие того, что

$$\begin{aligned}\cos \lambda d \cos \alpha_2 + \cos \mu d \cos \beta_2 + \cos \nu d \cos \gamma_2 &= \\ &= -(\cos \alpha_2 d \cos \lambda + \cos \beta_2 d \cos \mu + \cos \gamma_2 d \cos \nu),\end{aligned}$$

будем иметь:

$$\rho_2 = \frac{\sin \omega ds}{\cos \alpha_2 d \cos \lambda + \cos \beta_2 d \cos \mu + \cos \gamma_2 d \cos \nu}.$$

Если линия равного сопротивления есть линия плоская, то α_2 , β_2 и γ_2 постоянны и

$$\rho_2 = \infty.$$

§ 5. Если внешних сил нет, то согласно [(7), (8), § 2] $F = F_0$, α , β , γ постоянны, т. е. имеем прямолинейную форму равновесия с постоянной площадью поперечного сечения нити.

Если $\lambda = \frac{\pi}{2}$, то на основании [(3), § 2]

$$F \frac{dx}{ds} = \text{const},$$

т. е. если приложенные к нити силы перпендикулярны к какой-нибудь оси, то проекция площади поперечного сечения нити на плоскость, перпендикулярную к оси, есть величина постоянная.

Если приложенные к нити силы параллельны, например, оси oz , то

$$F \frac{dx}{ds} = C_1, \quad F \frac{dy}{ds} = C_2,$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = C \quad \text{и} \quad y = Cx + A,$$

где C_1 , C_2 , C и A — постоянные. Мы видим, что ось нити есть плоская кривая, лежащая в плоскости, параллельной оси.

Если внешние силы в каждой точке линии равного сопротивления параллельны касательной, то $\omega = 0$, $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$. Из [(7), § 2] следует, что

$$F = F_0 e^{-\frac{1}{k} \int_0^s f(s) ds},$$

а из [(8), § 2]

$$\alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad \gamma = \text{const},$$

форма равновесия — прямая линия.

Если действующая на нить сила есть сила тяжести, то распределяющая функция $f(s) = 1$, δ_0 есть вес единицы объема нити, и мы имеем формулу:

$$F = F_0 e^{-\frac{\delta_0 s}{k}},$$

аналогичную известной формуле для брусьев равного сопротивления на растяжение или сжатие.

§ 6. Переходя к случаю действия центральных сил, примем центр действия сил за начало координат. Теорема моментов натяжений и сплошных внешних сил, приложенных к элементу ds нити, дает:

$$d[T(y \cos \gamma - z \cos \beta)] + (yZ - zY) ds = 0,$$

$$d[T(z \cos \alpha - x \cos \gamma)] + (zX - xZ) ds = 0,$$

$$d[T(x \cos \beta - y \cos \alpha)] + (xY - yX) ds = 0;$$

здесь X , Y и Z обозначают проекции на координатные оси вектора P .

Если внешние силы центральны, то

$$(yZ - zY) ds = 0, \quad (zX - xZ) ds = 0, \quad (xY - yX) ds = 0.$$

Вследствие чего, помня, что $T = FR$, будем иметь:

$$F(y \cos \gamma - z \cos \beta) = A_1,$$

$$F(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = A_2,$$

$$F(x \cos \beta - y \cos \alpha) = A_3,$$

где A_1 , A_2 и A_3 — постоянные.

Заметив, что

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0,$$

мы видим, что, в случае действия центральных сил, линия равного сопротивления лежит в плоскости, проходящей через центр действия сил.

Пусть на линии равного сопротивления точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть начало отсчета дуг (фиг. 1). Координаты x_0 , y_0 и z_0 не равны нулю одновременно. В этой точке

$$F_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) = A_1,$$

$$F_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) = A_2,$$

$$F_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) = A_3,$$

следовательно,

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = F_0^2 [r_0^2 - (x_0 \cos \alpha_0 + y_0 \cos \beta_0 + z_0 \cos \gamma_0)^2],$$

где r_0 есть радиус-вектор точки M_0 .

Пусть h_0 есть отрезок опущенного из начала координат перпендикуляра на нормальную плоскость, построенную в точке M_0 ; очевидно, углы

$$\widehat{h_0 X} = \alpha_0, \quad \widehat{h_0 Y} = \beta_0, \quad \widehat{h_0 Z} = \gamma_0.$$

Поэтому

$$x_0 \cos \alpha_0 + y_0 \cos \beta_0 + z_0 \cos \gamma_0 = h_0$$

и

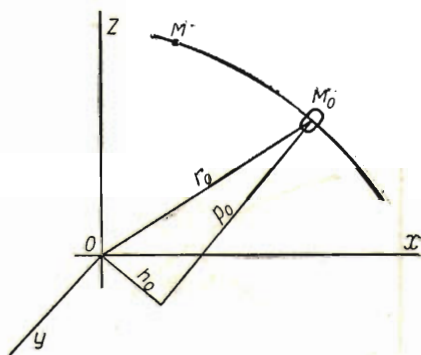
$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = F_0^2 p_0^2,$$

где $p_0 = \sqrt{r_0^2 - h_0^2}$ есть проекция r_0 на главную нормаль, построенную в точке M_0 .

Если на линии равного сопротивления рассмотреть некоторую точку $M(x, y, z)$, то легко показать, что

$$Fp = F_0 p_0, \tag{1}$$

причем значение p в точке M аналогично значению p_0 в точке M_0 .



Фиг. 1.

Таким образом выходит, что объемы призм, основаниями которых служат площади поперечных сечений, а высотами — проекции радиусов-векторов на главные нормали, вдоль линии равного сопротивления остаются постоянными.

Примем ту плоскость, в которой лежит линия равного сопротивления, за плоскость xy (фиг. 2 и 3).

Имеем:

$$\omega = \pm (\alpha - \lambda).$$

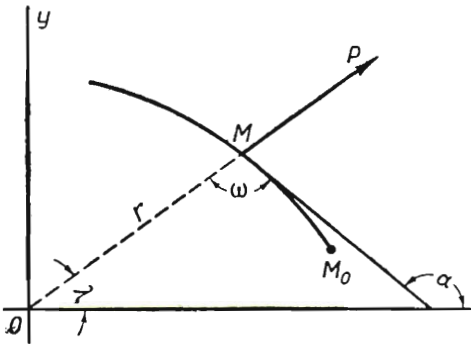
Первое из уравнений [(8), § 2] принимает вид:

$$\frac{d \cos \alpha}{ds} + \frac{f(s)}{k} [\cos \lambda - \cos (\alpha - \lambda) \cos \alpha] = 0,$$

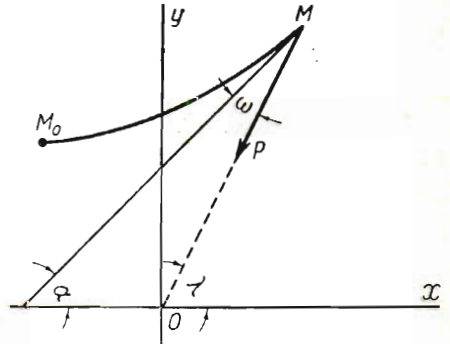
либо

$$\frac{d\alpha}{ds} + \frac{f(s)}{k} \sin (\lambda - \alpha) = 0 \quad (2)$$

для обоих изображенных на фиг. 2 и 3 случаев.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Уравнение (2), наряду с уравнениями

$$x = x_0 + \int_0^s \cos \alpha ds, \quad y = y_0 + \int_0^s \sin \alpha ds,$$

служит для определения вида линии равного сопротивления в случае действия центральных сил.

Сопоставляя формулу (1) с [(7), § 2], приходим к заключению, что

$$p = p_0 e^{\frac{1}{k} \int_0^s f(s) \cos \omega ds} \quad (3)$$

Полученное соотношение дает возможность решить такую задачу: кривая равного сопротивления задана уравнениями:

$$x = x(s), \quad y = y(s);$$

определить закон распределения центральных сил, при действии которых нить равного сопротивления принимает заданную форму.

Полагая

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{d^2x}{ds^2} = x'', \quad \frac{d^2y}{ds^2} = y'',$$

будем иметь:

$$\cos \alpha = x', \quad \sin \alpha = y',$$

кроме того,

$$\cos \lambda = \frac{x}{r}, \quad \sin \lambda = \frac{y}{r},$$

где r — радиус-вектор точки M , взятой на линии равного сопротивления; для угла ω получим:

$$\sin \omega = \pm \frac{xy' - yx'}{r}, \quad \cos \omega = \frac{xx' + yy'}{r}.$$

Вследствие этого

$$p = r \sin \omega = \pm (xy' - yx'),$$

и на основании (3):

$$\pm (xy' - yx') = p_0 e^{\frac{1}{k} \int_0^s f(s) \frac{xx' + yy'}{r} ds}.$$

Логарифмическая производная дает:

$$\frac{xy'' - yx''}{xy' - yx'} = \frac{f(s)}{k} \frac{xx' + yy'}{r},$$

откуда распределяющая функция

$$f(s) = \frac{k(xy'' - yx'') \sqrt{x^2 + y^2}}{(xy' - yx')(xx' + yy')};$$

вследствие этого

$$F = F_0 \frac{x_0 y_0' - y_0 x_0'}{xy' - yx'}. \quad (4)$$

Теперь на основании соотношения

$$P = F \delta_0 f(s)$$

будет иметь:

$$P = T_0 (x_0 y_0' - y_0 x_0') \frac{(xy'' - yx'') \sqrt{x^2 + y^2}}{(xy' - yx')^2 (xx' + yy')}. \quad (5)$$

§ 7. Пусть заданная кривая есть окружность

$$x = r \cos \frac{s}{r}, \quad y = a + r \sin \frac{s}{r},$$

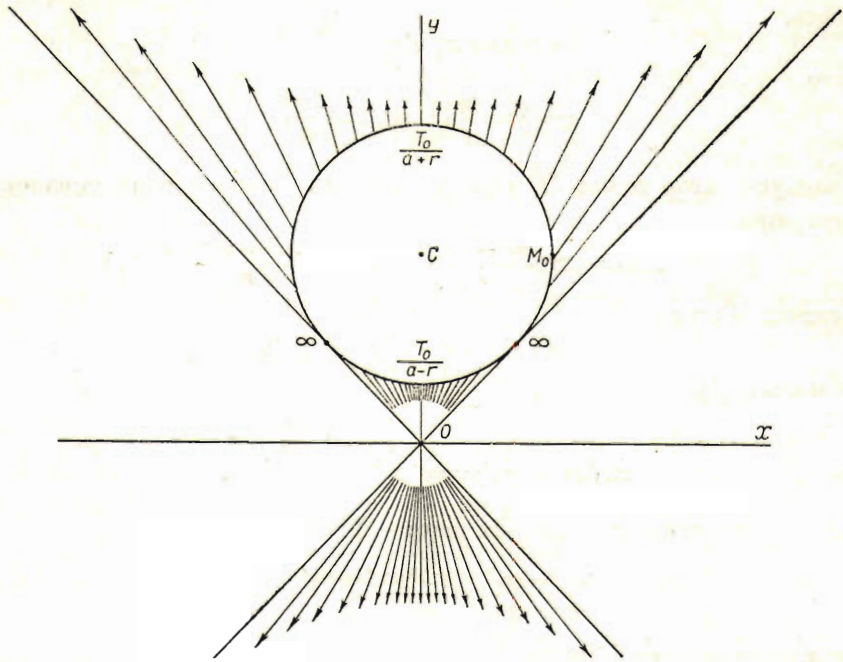
причем длина дуги s отсчитывается от точки $M_0(r, a)$; так как

$$x_0 y_0' - y_0 x_0' = r,$$

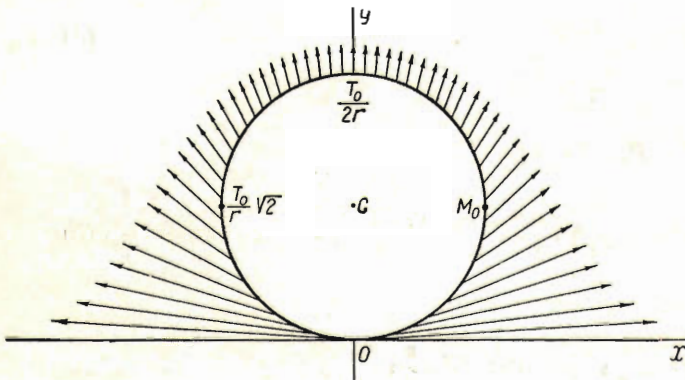
то согласно [(5), § 6] имеем:

$$P = T_0 \frac{\sqrt{a^2 + 2ar \sin \frac{s}{r} + r^2}}{\left(r + a \sin \frac{s}{r}\right)^2}.$$

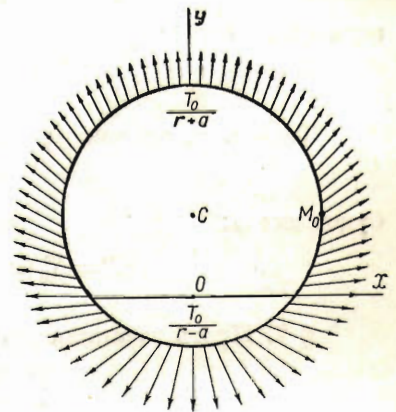
Смотря по тому, будет ли $a > r$, $a = r$ или $a < r$, картина распределения сил представится так, как показано на фиг. 4, 5 и 6.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Для площади поперечного сечения согласно [(4), § 6] получим:

$$F = F_0 \frac{r}{r + a \sin \frac{s}{r}}$$

Если $a = 0$, то $P = \frac{T_0}{r}$; $F = F_0$.

Заметим еще, что в тех точках, в которых $xy' - yx' = 0$, имеем $P \rightarrow \infty$ и $F \rightarrow \infty$. Эти точки могут быть названы критическими. В них касательная к линии равного сопротивления проходит через притягивающий центр.

Решим еще такой вопрос: каков должен быть закон распределения центральных сил, при действии которых ось нити равного сопротивления принимает форму обыкновенной цепной линии?

Параметрическое уравнение цепной линии

$$y = \operatorname{ch} x$$

можно представить так:

$$x = \operatorname{ar sh} s, \quad y = \sqrt{1 + s^2},$$

где s — длина дуги, отсчитанной от точки $M_0(0, 1)$.

Будем рассматривать ту часть нити, для которой

$$0 \leq s \leq a < 1.509,$$

и часть, симметричную этой относительно оси Oy . Заметим, что число 1.509 получается как корень уравнения

$$\psi(s) = \sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar sh} s = 0,$$

вычисленный с тремя десятичными знаками. Заметим еще, что функция $\psi(s) = 0$, когда

$$xy' - yx' = 0.$$

В силу сделанного выше замечания отсюда следует, что рассматриваемый нами отрезок цепной линии представляет часть участка нити, концами которого служат критические точки. В точке $s = a$ и в точке, ей симметричной относительно оси Oy , будем считать отрезок нити закрепленным неподвижно.

Пользуясь формулами [(5), (6); § 6], находим, что

$$P = \frac{T_0 \sqrt{\operatorname{ar sh}^2 s + 1 + s^2}}{(\sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar sh} s)^2} \quad (1)$$

и

$$F = \frac{F_0 \sqrt{1 + s^2}}{\sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar sh} s}. \quad (2)$$

Исследуя функции P и F , прежде всего заметим, что

$$\psi(0) = 1 \text{ и } \psi(1.509) \approx 0.$$

Производная

$$\frac{d\psi}{ds} = -\operatorname{ar sh} s$$

при возрастании s от 0 до a все время отрицательна. Следовательно, в интервале $0 \leq s \leq a$ функция $\psi(s)$ убывает, причем

$$1 \geq \psi(s) > 0.$$

Отсюда следует, что в точках рассматриваемого нами отрезка нити P и F принимают конечные значения.

Так как

$$\begin{aligned}\min \sqrt{\operatorname{ar} \operatorname{sh}^2 s + 1 + s^2} &= 1, \\ \max (\sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar} \operatorname{sh} s) &= 1,\end{aligned}$$

то

$$\min P = T_0 \text{ и } \min F = F_0.$$

Таким образом выходит, что ось рассматриваемого отрезка нити равного сопротивления принимает вид обыкновенной цепной линии в случае действия притягивающих к началу координат сплошных сил, распределенных по закону, указанному формулой (1), причем площади поперечных сечений выражаются формулой (2). Интенсивность действия сил достигает своего минимального значения при $s=0$, где $P=T_0$. Своей верхней границы как P , так и F достигают в точке $s=a$ и в точке, ей симметричной.

§ 8. Обращаясь к уравнению [(2), § 6] и пользуясь соотношением

$$\omega = \pm (\alpha - \lambda),$$

будем иметь:

$$\frac{d\omega}{ds} - \frac{f(s)}{k} \sin \omega = \mp \frac{d\lambda}{ds}.$$

Подстановка

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = z$$

дает

$$\frac{dz}{ds} + Qz + S(1 + z^2) = 0, \quad (1)$$

где

$$Q = -\frac{f(s)}{k} \text{ и } S = \pm \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{ds}.$$

Уравнение (1) есть уравнение Рикатти. Таким образом задача об определении линии равного сопротивления в случае действия центральных сил оказывается непосредственно связанной с этим хорошо исследованным уравнением.

Теперь можем формулировать такую основную для данного вопроса задачу.

Дана распределяющая функция $f(s)$ центральных сил и угол $\lambda = \lambda(s)$. Даны:

$$F_0, \delta_0, k, \omega_0 \text{ и } r_0.$$

Здесь r_0 есть радиус-вектор точки M_0 , от которой отсчитывается длина дуги s .

Требуется для заданного интервала изменения дуги s найти линию равного сопротивления и выразить в зависимости от s силу P и площадь поперечного сечения F .

Пусть $z = \varphi(s, C)$ есть полный интеграл уравнения (1), коэффициенты которого, согласно заданию, известны. Определив постоянную C из условия

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} = \varphi(0, C),$$

получим частное решение z . Будем иметь:

$$\omega = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z.$$

Следовательно,

$$\alpha = \lambda \pm \omega$$

есть известная функция от s . Уравнение искомой линии:

$$x = x_0 + \int_0^s \cos \alpha \, ds, \quad y = y_0 + \int_0^s \sin \alpha \, ds,$$

либо

$$x = x_0 + \int_0^s \frac{(1-z^2) \cos \lambda \mp 2z \sin \lambda}{1+z^2} \, ds,$$

$$y = y_0 + \int_0^s \frac{(1-z^2) \sin \lambda \pm 2z \cos \lambda}{1+z^2} \, ds.$$

Площадь поперечного сечения F и сила P определяются формулами [(2, 7), § 2].

Рассмотрим случай, когда распределяющая функция притягивающих сил имеет вид:

$$f(s) = k \frac{\sqrt{\operatorname{ar} \operatorname{sh}^2 s + 1 + s^2}}{\sqrt{1 + s^2} (\sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar} \operatorname{sh} s)},$$

а образованный вектором P с осью Ox угол

$$\lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1 + s^2}}{\operatorname{ar} \operatorname{sh} s}.$$

Будем полагать, что F_0 , δ_0 и k даны и что

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$r = \sqrt{\operatorname{ar} \operatorname{sh}^2 s + 1 + s^2} \quad \tau = \operatorname{ar} \operatorname{sh} s + s \sqrt{1 + s^2} \quad \psi = \sqrt{1 + s^2} - s \operatorname{ar} \operatorname{sh} s.$$

Будем предполагать, как и выше, что

$$0 \leq s < 1.509.$$

Уравнение (1) в нашем случае имеет вид:

$$z' - \frac{r z}{\psi \sqrt{1 + s^2}} + \frac{\psi (1 + z^2)}{2r^2 \sqrt{1 + s^2}} = 0.$$

Выражение

$$z = \frac{-\tau + r\sqrt{1+s^2}}{\psi}$$

служит его частным интегралом. Полагая

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{-\tau + r\sqrt{1+s^2}}{\psi},$$

будем иметь:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\psi}{\tau}.$$

Кроме того,

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\psi}{r^2\sqrt{1+s^2}}.$$

В интервале

$$0 \leq s < 1.509$$

функция

$$\psi(s) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\lambda}{ds} < 0$$

и

$$\omega = \lambda - \alpha.$$

Поэтому

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1+s^2}}{\operatorname{ar} \operatorname{sh} s} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1+s^2} - s \operatorname{ar} \operatorname{sh} s}{\operatorname{ar} \operatorname{sh} s + s\sqrt{1+s^2}},$$

либо

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} s,$$

т. е.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

В виду этого

$$x = \int_0^s \cos \alpha \, ds = \ln(s + \sqrt{1+s^2}),$$

$$y = 1 + \int_0^s \sin \alpha \, ds = \sqrt{1+s^2}.$$

Исключение s приводит к уравнению

$$y = \operatorname{ch} x$$

цепной линии. Нетрудно теперь выразить P и F в зависимости от s .

§ 9. Пусть $z = \varphi(s)$ есть частный интеграл уравнения [(1), § 8]. Если мы построим соответствующую ему интегральную кривую (R), то, исходя из зависимости

$$z = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

можем утверждать, что в случае действия центральных сил:

1) точкам пересечения (R) с осью S , а также и точкам (R), в которых $z = \pm\infty$, отвечают на линии равного сопротивления точки, в которых $\omega = 0$ или $\omega = \pi$, т. е. касательные в этих точках проходят через начало координат (критические точки);

2) точкам (R), в которых $z = \pm 1$, соответствуют точки линии равного сопротивления, в которых сила P направлена по нормали.

§ 10. Рассмотрим случай сил, параллельных оси, например, оси Oz . В § 5 было отмечено, что в случае действия параллельных сил линия равного сопротивления есть плоская кривая. Принимая ее плоскость за плоскость xz , мы увидим, что

$$\cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = 0, \quad \cos \nu = -1,$$

$$z = \frac{\pi}{2} + \gamma, \quad \cos \omega = -\sin \alpha.$$

Направление сил мы считаем противоположным направлению оси Oz .

Второе из уравнений [(8), § 2] обращается в тождество. Первое и третье — приводятся к уравнению

$$\frac{dz}{ds} = \frac{f(s)}{k} \cos \alpha,$$

из которого, отделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{2} \right)} = \varphi(s), \quad (1)$$

где

$$\varphi(s) = \frac{1}{k} \int_0^s f(s) ds,$$

а α_0 есть значение угла α , соответствующее $s = 0$. Относительно функции $\varphi(s)$ заметим, что $\varphi(0) = 0$. Так как

$$\varphi'(s) = \frac{f(s)}{k} > 0,$$

то $\varphi(s)$ при $s \geq 0$ есть функция возрастающая и, подобно $f(s)$, принимает положительные значения.

В случае, когда $\alpha_0 = 0$, из (1) имеем:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = e^{\varphi(s)},$$

т. е.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad \sin \alpha = \operatorname{th} \varphi(s). \quad (2)$$

Следовательно, параметрическое уравнение линии равного сопротивления представится в виде:

$$x = x_0 + \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad z = z_0 + \int_0^s \operatorname{th} \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Из равенства (2) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} = \operatorname{sh} \varphi(s).$$

Отсюда

$$dz = \frac{\varphi'(s) ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)} = \frac{f(s) ds}{k \operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad (4)$$

поэтому радиус кривизны

$$\rho = \frac{k \operatorname{ch} \varphi(s)}{f(s)}. \quad (5)$$

Это равенство есть натуральное уравнение линии равного сопротивления в случае действия параллельных сил. Если функцию $f(s)$ выберем так, чтобы $f(0) = 1$, то

$$\rho_0 = k.$$

Расстояние от начала координат до касательной, проведенной к линии равного сопротивления в некоторой ее точке $M(x, z)$, выражается формулой

$$h = x \sin \alpha - z \cos \alpha,$$

причем

$$\sin \alpha = \frac{dz}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Кроме того, согласно (4):

$$\alpha = \frac{1}{k} \int_0^s \frac{f(s) ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}.$$

Пусть $s \rightarrow \infty$. Может случиться, что α стремится при этом к некоторому пределу A , где

$$A = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{f(s) ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}. \quad (6)$$

Будем говорить в этом случае, что кривая (3) имеет асимптотическое направление. Если на ряду с этим величина h стремится к некоторому пределу H , причем

$$H = \sin A \int_0^{\infty} \cos \alpha ds - \cos A \int_0^{\infty} \sin \alpha ds,$$

либо

$$H = \int_0^{\infty} \sin(A - \alpha) ds, \quad (7)$$

то кривая имеет асимптоту.

§ 11. Предположим в частном случае, что действующая сила есть сила тяжести и нить однородна. При этом предположении распределяющая функция $f(s) = 1$ и δ_0 есть вес единицы объема. Согласно [(3), § 10] будем иметь:

$$\varphi(s) = \frac{s}{k},$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch} \frac{s}{k}} = 2k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{th} \frac{s}{2k} \right),$$

$$y = \int_0^s \operatorname{th} \frac{s}{k} ds = k \ln \operatorname{ch} \frac{s}{k},$$

где вместо z написано y . Здесь принято, что начало координат служит началом отсчета дуг, т. е. $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$.

Исключая из полученных двух равенств параметр s , получим уравнение

$$\operatorname{th} \frac{y}{2k} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2k}$$

однородной цепной линии равного сопротивления. Его нетрудно представить в виде:

$$e^{\frac{y}{k}} \cos \frac{x}{k} = 1, \quad (1)$$

т. е. в виде, данном Кориолисом.

Натуральное уравнение рассматриваемой линии, как известно, будет:

$$\rho = k \operatorname{ch} \frac{s}{k}.$$

Для асимптотического направления имеем:

$$A = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\operatorname{ch} \frac{s}{k}} = \frac{\pi}{2}.$$

Вследствие этого длина

$$H = \int_0^{\infty} \cos z ds.$$

Но так как

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{sh} \frac{s}{k},$$

то

$$H = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\operatorname{ch} \frac{s}{k}} = 2k \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right),$$

где n — любое целое число.

Однородная цепная линия равного сопротивления, как видно из (1), есть расположенная выше оси Ox и симметричная относительно оси Oy кривая. Продолженная за точки привеса цепная линия равного сопротивления состоит из бесчисленного множества тождественных ветвей, расположенных в интервалах

$$\left[\frac{(4m-1)\pi k}{2}, \frac{(4m+1)\pi k}{2} \right],$$

где m — любое целое число.

§ 12. Если стороны прямого угла скользят по кривой, то будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1,$$

где α_1 и α_2 — углы, образованные осью Ox со сторонами угла, и так как для линии равного сопротивления

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sh} \varphi(s)$$

(см. § 10), то

$$\operatorname{sh} \varphi(s_1) \operatorname{sh} \varphi(s_2) = -1,$$

откуда

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi(s_1)} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi(s_2)} = 1,$$

либо, на основании [(5), § 10]:

$$\frac{1}{\rho_1^2 f^2(s_1)} + \frac{1}{\rho_2^2 f^2(s_2)} = \frac{1}{k^2}.$$

Соотношение это аналогично известной зависимости

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{k}$$

для обыкновенной цепной линии $y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$.

В случае цепной линии равного сопротивления, когда $f(s) = 1$:

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Отметим еще такие, легко проверяемые для этой линии зависимости:

$$\alpha = \frac{x}{k}, \quad \varphi = k \operatorname{sec} \frac{x}{k}, \quad \cos \frac{x}{k} \operatorname{ch} \frac{s}{k} = 1, \quad e^{-\frac{y}{k}} \operatorname{ch} \frac{s}{k} = 1.$$

Для обыкновенной цепной линии радиус ее кривизны пропорционален квадрату натяжения.¹ Для цепной линии равного сопротивления будем иметь:

$$\rho = \frac{R}{\delta_0} \operatorname{sec} \alpha = \frac{T \operatorname{sec} \alpha}{F \delta_0} = \frac{T}{F_0 \delta_0},$$

т. е. радиус кривизны пропорционален первой степени натяжения.

¹ M ö b i u s, Lehrbuch der Statik, § 292.

Если принять $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, то координаты центра кривизны линии [(3), § 10] выразятся формулами:

$$x_c = \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)} - \frac{k \operatorname{sh} \varphi(s)}{f(s)}, \quad y_c = \int_0^s \operatorname{th} \varphi(s) ds + \frac{k}{f(s)},$$

которые для случая Кориолиса дают:

$$x_c = x - k \operatorname{th} \frac{x}{k}, \quad y_c = k \left(1 - \ln \cos \frac{x}{k} \right).$$

В § 5 было отмечено, что в случае действия сил, параллельных, например, оси Oy

$$F \frac{dx}{ds} = C,$$

либо

$$F = \frac{F_0}{\cos \alpha} = F_0 \operatorname{ch} \varphi(s);$$

отсюда следует, что если поперечные сечения нити представляют подобные фигуры, то линейные размеры любого поперечного сечения находятся в сходственном им размерам сечения F_0 в отношении, равном

$$\sqrt{\operatorname{ch} \varphi(s)},$$

и если фигура F_0 будет задана, то форма нити будет вполне определена.

Объем участка нити, начало которого совпадает с началом координат, выражается формулой:

$$V = F_0 \int_0^s \operatorname{ch} \varphi(s) ds,$$

а его вес

$$Q = \delta_0 F_0 \int_0^s f(s) \operatorname{ch} \varphi(s) ds.$$

В случае Кориолиса

$$Q = \delta_0 F_0 k \operatorname{tg} \frac{x}{k}.$$

§ 13. Для цепной линии $y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$ параметр k может быть определен, если известны:

$2S$ — длина нити между точками привеса;

$2L$ — отсчитанный по горизонтальному направлению пролет;

$2H$ — разность уровней точек привеса.

Определяющее параметр k уравнение имеет вид:¹

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{L}{k}}{\left(\frac{L}{k}\right)} = \frac{\sqrt{S^2 - H^2}}{L}. \quad (1)$$

¹ См. А п п е л ь, Руководство теоретической механики, т. I; Г о р т, Дифференциальные уравнения.

Перейдем к общему случаю линии, заданной уравнениями:

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad y = \int_0^s \operatorname{th} \varphi(s) ds.$$

Пусть длины (фиг. 7)

$$OA = S_1, \quad OB = S_2, \quad OA_1 = L_1, \quad OB_1 = L_2, \quad A_1A = H_1, \quad B_1B = H_2;$$

мы будем иметь:

$$L_1 + L_2 = 2L, \quad H_1 - H_2 = 2H, \quad S_1 + S_2 = 2S. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$|S_1 - S_2| > 2H, \quad S^2 > L^2 + H^2. \quad (3)$$

Так как

$$L_1 = \int_0^{S_1} \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad L_2 = \int_0^{S_2} \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)}, \quad (4)$$

$$H_1 = \int_0^{S_1} \operatorname{th} \varphi(s) ds, \quad H_2 = \int_0^{S_2} \operatorname{th} \varphi(s) ds,$$

то уравнения (2) дают:

$$\int_0^{S_1} \frac{ds}{\operatorname{ch} \left[\frac{\psi(s)}{k} \right]} + \int_0^{S_2} \frac{ds}{\operatorname{ch} \left[\frac{\psi(s)}{k} \right]} = 2L, \quad (5)$$

$$\int_{S_2}^{S_1} \operatorname{th} \left[\frac{\psi(s)}{k} \right] ds = 2H,$$

$$S_1 + S_2 = 2S,$$

где $\psi(s) = k\varphi(s) > 0$. В уравнениях (5) неизвестными являются S_1 , S_2 и k . В частном случае, когда $S_1 = S_2$, значение k определится из уравнения:

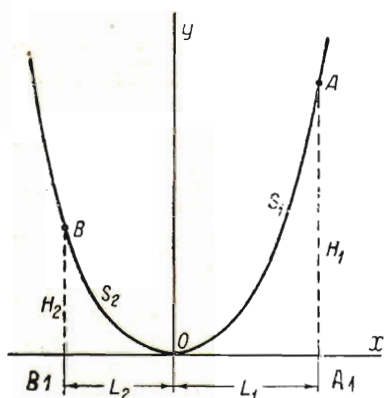
$$\int_0^S \frac{ds}{\operatorname{ch} \left[\frac{\psi(s)}{k} \right]} = L.$$

Если $S_1 \neq S_2$, то нетрудно понять, что второе из уравнений (5) дает для k одно вещественное и положительное значение. Действительно, пользуясь теоремой о среднем значении интеграла, можем рассматриваемое уравнение представить в виде:

$$\operatorname{th} \left[\frac{\psi(s_0)}{k} \right] = \frac{2H}{S_1 - S_2}. \quad (6)$$

Будем считать, что $S_1 > S_2$. В таком случае

$$S_2 < s_0 < S_1.$$



Фиг. 7.

Так как $\psi(s_0) > 0$, то, изменяя k от 0 до ∞ , мы выражению $\frac{\psi(s_0)}{k}$ придадим все значения от ∞ до 0. При таком изменении аргумента непрерывная однозначная функция $\text{th} \left[\frac{\psi(s_0)}{k} \right]$ должна принять все значения, лежащие между нулем и единицей. Но так как $0 < \frac{2H}{S_1 - S_2} < 1$, то найдется одно такое вещественное и положительное k , при котором уравнение (6) будет удовлетворено.

§ 14. Применим общие уравнения (5) к случаю Корнолиса, когда $\psi(s) = s$. Мы будем иметь:

$$k \left[\text{arctg} \left(\text{th} \frac{S_1}{2k} \right) + \text{arctg} \left(\text{th} \frac{S_2}{2k} \right) \right] = L,$$

$$k \ln \left[\frac{\cos \frac{S_1}{k}}{\cos \frac{S_2}{k}} \right] = 2H, \quad (1)$$

$$S_1 + S_2 = 2S.$$

Выполняя несложные преобразования, получим:

$$\text{ch} \frac{S_1 - S_2}{2k} = \frac{\text{sh} \frac{S}{k}}{\text{tg} \frac{L}{k}}, \quad \text{th} \frac{S_1 - S_2}{2k} = \frac{\text{th} \frac{H}{k}}{\text{th} \frac{S}{k}}.$$

Исключая из этих равенств $\frac{S_1 - S_2}{2k}$, находим уравнение:

$$\cos \frac{L}{k} \text{ch} \frac{S}{k} = \text{ch} \frac{H}{k}, \quad (2)$$

которое является аналогом уравнения [(1), § 13] и служит для нахождения k , когда даны $2L$, $2S$ и $2H$. Полагая

$$\frac{L}{k} = z, \quad \frac{H}{L} = m, \quad \frac{S}{L} = n, \quad (3)$$

можно уравнению (2) придать вид:

$$\cos z \cdot \text{ch} nz = \text{ch} mz, \quad (4)$$

причем

$$m > 0, \quad n > 1, \quad m < 1.$$

На основании второго из неравенств [(3), § 13] будем иметь:

$$n^2 > 1 + m^2.$$

Определив из (3) z и зная L , будем знать k . Заметим, что

$$L_1 < \frac{\pi k}{2}, \quad L_2 < \frac{\pi k}{2},$$

следовательно,

$$z = \frac{L}{k} < \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Зная k , S и L , нетрудно будет, пользуясь уравнениями (1) и [(4), § 13], вычислить $S_1, S_2, L_1, L_2, H_1, H_2$.

В том случае, когда напряжение R задано, величина k определяется, конечно, из формулы:

$$k = \frac{R}{\delta_0}.$$

§ 15. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \cos z \operatorname{ch} nz - \operatorname{ch} mz;$$

разлагая в степенной ряд $\cos z$, $\operatorname{ch} nz$ и $\operatorname{ch} mz$, находим:

$$\psi(z) = \frac{z^2}{1 \cdot 2} (n^2 - m^2 - 1) + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (n^4 + 1 - m^4 - 6n^2) + \dots$$

При достаточно малом значении z функция $\psi(z)$ принимает знак первого члена, т. е. знак $+$. Вместе с тем

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} < 0.$$

Следовательно, между 0 и $\frac{\pi}{2}$ функция $\psi(z)$ имеет вещественный корень. Этот корень является абсциссой точки пересечения кривых

$$u = \cos z, \quad u = \frac{\operatorname{ch} mz}{\operatorname{ch} nz}, \quad (1)$$

имеющих в точке (0, 1) соприкосновение первого порядка. Так как единственный вещественный корень уравнения

$$\frac{du}{dz} = \frac{\operatorname{ch} mz}{\operatorname{ch} nz} (m \operatorname{th} mz - n \operatorname{th} nz) = 0$$

есть $z=0$, причем

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left[(m \operatorname{th} mz - n \operatorname{th} nz)^2 + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 mz} - \frac{n^2}{\operatorname{ch}^2 nz} \right]_{z=0} = m^2 - n^2 < 0,$$

то точка (0, 1) для кривой (1) служит единственной вершиной. При $z > 0$ и $m < n$ производная

$$\frac{du}{dz} < 0,$$

а при $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} mz}{\operatorname{ch} nz} = 0.$$

Отсюда следует, что кривая (1) асимптотически приближается к оси Oz . Прочие вещественные и положительные корни уравнения [(4), § 14], как это нетрудно усмотреть, заключаются в интервалах

$$\left[(4\lambda + 3) \frac{\pi}{2}, (4\lambda + 4) \frac{\pi}{2} \right] \text{ и } \left[(4\lambda + 4) \frac{\pi}{2}, (4\lambda + 5) \frac{\pi}{2} \right],$$

где $\lambda = 0, 1, 2, \dots$

В силу [(5), § 14] нас, однако, интересует только корень, заключенный в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

Пусть, например, $2L=100$ м, $2S=120$ м, $2H=10$ м. В таком случае $m=0.1$, $n=1.2$.

Рассматривая функцию

$$\psi(z) = \cos z \operatorname{ch} 1.2z - \operatorname{ch} 0.1z,$$

после небольшого числа проб и ограничиваясь тремя десятичными знаками, находим, что

$$\psi(0.942) = 0.001, \psi(0.960) = -0.003.$$

Можно принять, что корень $z=0.946$. В таком случае $k=52.85$ м. Если, например, $\delta_0=8$ г, то в каждой точке провода действует напряжение:

$$R = k\delta_0 = 42.28 \text{ кг/см}^2.$$

§ 16. Мебиус в „Lehrbuch der Statik“ (§ 287 и сл.) отметил некоторые интересные свойства обыкновенной цепной линии. Аналогичные свойства легко обнаружить и для цепной линии равного сопротивления.

Из равенств [(3), § 14] и уравнения [(4), § 14] следует, что при изменении L , H и S в одном и том же отношении величина k изменяется в том же отношении.

Заметив это, представим себе два подобных прямоугольных треугольника BEC и BE_1C_1 , отношение сходственных линий которых равно λ (фиг. 8). Проведем через вершину B произвольную прямую BM , расположенную внутри угла EBC , из B , как из центра, опишем радиусами BC и BC_1 дуги, пересекающие BM в точках D и D_1 .

Пусть A и A_1 — точки, в которых BM пересекается катетами CE и C_1E_1 . Представим себе далее, что точки D и D_1 скользят по BM , причем D попадает в A , а D_1 в A_1 . Отрезки BD и BD_1 провисают, образуя дуги

$$BGA \text{ и } BG_1A_1,$$

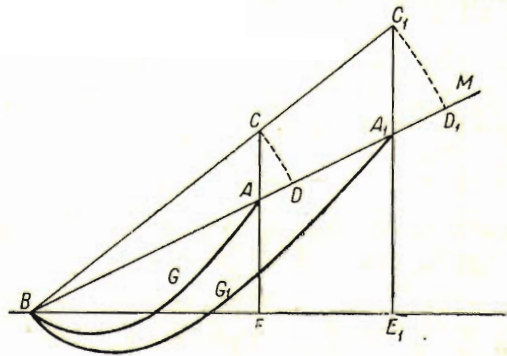
и если эти дуги изогнутся, принимая форму цепных линий равного сопротивления, то, вводя обозначения:

$$BE_1 = 2L_1, BE = 2L, A_1E_1 = 2H, AE = 2H,$$

$$\widehat{BG_1A_1} = 2S_1, \widehat{BGA} = 2S,$$

будем иметь:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{L_1}{L} = \frac{H_1}{H} = \lambda.$$



Фиг. 8.

Следовательно,

$$k_1 = \lambda k,$$

где k и k_1 — параметры линий BG_1A_1 и BGA .

Если желательно вызвать в нити BG_1A_1 то же напряжение, которое действует в BGA , то, согласно формуле

$$k = \frac{R}{\delta_0},$$

придется вес единицы объема δ_0 уменьшить в λ раз.

§ 17. Отметим некоторые, необходимые для дальнейшего, свойства Эйлеравой функции $\Gamma(p)$ и функции

$$\psi(p) = \frac{d \ln \Gamma(p)}{dp}.$$

Имеет место теорема: если внутри круга $|v| < 1$ функция $\varphi(v)$ регулярна и ряд

$$\varphi(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

в интервале от $v=0$ до $v=1$ почленно интегрируем, то интеграл

$$\int_0^1 \varphi(v) v^{p-1} dv$$

разлагается в ряд

$$\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \dots,$$

сходящийся во всей плоскости p , кроме простых полюсов.¹

Пусть

$$\varphi(v) = 1 - v + v^2 - v^3 + \dots = \frac{1}{1+v}, \quad |v| < 1;$$

в таком случае:

$$\beta(p) = \int_0^1 \frac{v^{p-1} dv}{1+v} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \dots \quad p > 0.$$

При $p=1$ $\beta(1) = \ln 2$; при $p < 0$ $\beta(p) = \infty$.

Из соотношения

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p)$$

следует, что

$$\psi(p+1) = \frac{1}{p} + \psi(p). \quad (1)$$

Имеет место равенство

$$\psi(p) = -c + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+m} \right), \quad (2)$$

в котором Эйлерава постоянная

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

¹ N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen, § 50.

Образуя согласно (2) функции $\psi\left(\frac{p+1}{2}\right)$ и $\psi\left(\frac{p}{2}\right)$, нетрудно проверить, что

$$\beta(p) = \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{p}{2}\right) \right], \quad p > 0. \quad (3)$$

Следствием известного соотношения

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

является равенство:

$$\psi(1-p) - \psi(p) = \pi \operatorname{ctg} p\pi. \quad (4)$$

Складывая образованные согласно (3) выражения для $\beta(p)$ и $\beta(1-p)$, получим:

$$\beta(p) + \beta(1-p) = \frac{1}{2} \left[\psi\left(1 - \frac{1-p}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-p}{2}\right) + \psi\left(1 - \frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{p}{2}\right) \right].$$

Отсюда, принимая во внимание (4), будем иметь:

$$\beta(p) + \beta(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (5)$$

Заменив в (3) p на $p+1$ и сложив результат с $\beta(p)$, получим:

$$\beta(p+1) + \beta(p) = \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{p}{2} + 1\right) - \psi\left(\frac{p}{2}\right) \right].$$

Отсюда, воспользовавшись (1), находим:

$$\beta(p+1) = \frac{1}{p} - \beta(p). \quad (6)$$

Заметим еще, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \beta(p) = 0.$$

Гауссом составлены таблицы числовых значений функции $\psi(p+1)$, которые вычислены с 20 десятичными знаками для значений аргумента p , следующих друг за другом через 0.01 в интервале (0, 1) (Ges. Werke, III, стр. 161). Таблицы значений функции ψ имеются также у Jahnke und Emde („Funktionentafeln“).

Зная значение функции $\psi(p)$ для p , заключенных в интервале (0.1), можно, пользуясь формулой (1), вычислить ее значения и для других интервалов. Ниже приводятся таблицы числовых значений интеграла:

$$\int_0^1 \frac{v^{p-1} dv}{1+v} \quad (7)$$

(см. § 20). Первая строка таблицы, соответствующая предположению, что нижний предел интеграла $v=0$, получается при помощи формулы (3), причем значения функции $\psi(p+1)$ находятся по таблицам Гаусса. Из (5) следует, что

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что если известны значения интеграла $\beta(p)$ для p , лежащих в интервале $(0, \frac{1}{2})$, то по той же формуле (5) их легко вычислить для p , лежащих в интервале $(\frac{1}{2}, 1)$. Формула (6) удобна для вычисления $\beta(p)$ в других интервалах.

Что касается до значений интеграла (7), помещенных в прочих строках таблицы, то для их вычисления может служить формула:

$$\int_0^1 \frac{v^{p-1} dv}{1+v} = \beta(p) - \left(\frac{v^p}{p} - \frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+2}}{p+2} - \dots \right).$$

§ 18. Остановим внимание на том частном случае, когда распределяющая функция

$$f(s) = \frac{a}{a+s} \quad (s \geq 0),$$

где a есть параметр, имеющий размерность длины.

Полагая

$$\frac{s}{a} = \sigma \quad (\sigma > 0),$$

получим:

$$f(s) = \frac{1}{1+\sigma}, \quad \varphi(s) = \frac{a}{k} \ln(1+\sigma),$$

причем

$$f(0) = 1, \quad \varphi(0) = 0.$$

Согласно формулам [(3), § 10], считая $x_0 = z_0 = 0$, будем иметь:

$$x = 2a \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^\mu + (1+\sigma)^{-\frac{1}{\mu}}},$$

$$y = a \int_0^\sigma \frac{(1+\sigma)^{\frac{1}{\mu}} - (1+\sigma)^{-\frac{1}{\mu}}}{(1+\sigma)^\mu + (1+\sigma)^{-\frac{1}{\mu}}} d\sigma,$$

где

$$\mu = \frac{k}{a} > 0$$

и где вместо z написано y .

Ординату y можно представить еще и так:

$$y = a\sigma - 2a \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^{\frac{2}{\mu}} + 1}.$$

Полагая $(1 + \sigma)^{2/\mu} = \frac{1}{v}$, находим, что

$$x = k \int_v^1 v^{-\frac{\mu+1}{2}} \frac{dv}{1+v}, \quad y = a \left(v^{-\frac{\mu}{2}} - 1 \right) - k \int_v^1 v^{-\frac{\mu}{2}} \frac{dv}{1+v}. \quad (1)$$

Таким образом координаты точек цепной линии выражаются посредством интегралов вида:

$$\int_v^1 \frac{v^{p-1} dv}{1+v},$$

в которых показатель p принимает значение

$$\frac{1-\mu}{2}$$

в выражении x и значение

$$\frac{2-\mu}{2}$$

в выражении y . Так как $\mu > 0$, то находим, что $p < \frac{1}{2}$ для x и $p < 1$ для y . Следовательно, для вычисления x и y можно пользоваться прилагаемой таблицей:

Отыскивая асимптоту, согласно [(6), § 10], находим:

$$A = \frac{2}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}-1} d\sigma}{(1+\sigma)^{\frac{\mu}{2}+1}}$$

Делая ту же, что и для x и y , подстановку, будем иметь:

$$A = \int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{2}-1} dv}{1+v} = \frac{\pi}{2} \quad \left(p = \frac{1}{2} \right).$$

Для длины H , согласно [(7), § 10], имеем:

$$H = 2a \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}+1} + (1+\sigma)^{-\frac{1}{2}}},$$

либо

$$H = k \int_0^1 \frac{v^{-\frac{\mu+1}{2}} dv}{1+v}; \quad (2)$$

здесь

$$p = \frac{1-\mu}{2}.$$

Полученный интеграл имеет конечное значение только при $p > 0$.

Отсюда заключаем: рассматриваемая цепная линия равного сопротивления имеет асимптотическое направление, совпадающее с направлением оси Oy . Асимптоту же она имеет при условии, что

$$\mu = \frac{k}{a} < 1.$$

При этом условии, согласно формуле [(3), § 17], получим:

$$\int_0^1 v^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{dv}{1+v} = \frac{1}{2} \left[\psi \left(\frac{3-\mu}{4} \right) - \psi \left(\frac{1-\mu}{4} \right) \right].$$

Следовательно, уравнение асимптоты

$$x = \frac{k}{2} \left[\psi \left(\frac{3-\mu}{4} \right) - \psi \left(\frac{1-\mu}{4} \right) \right]. \quad (3)$$

Натуральное уравнение цепной линии равного сопротивления в нашем случае будет:

$$\varphi = \frac{k}{2} \left[(1+\sigma)^{1+\frac{1}{\mu}} + (1+\sigma)^{1-\frac{1}{\mu}} \right].$$

Отметим еще, что для участка s вес нити

$$Q = k\gamma_0 F_0 \left[(1+\sigma)^{\frac{1}{\mu}} - (1+\sigma)^{-\frac{1}{\mu}} \right].$$

§ 19. Предположим, что для дуг, отсчитываемых влево от начала, распределяющая функция

$$f(s) = \frac{a}{a-s} > 0; \quad 0 \leq s \leq a.$$

Это значит, что сплошная нагрузка непрерывно продолжает расти влево от начала и в точке, для которой $s=a$, нагрузка становится бесконечной.

Повторив для второго координатного угла выкладки, сделанные для первого, находим:

$$f(s) = \frac{1}{1-\sigma}, \quad \varphi(s) = \ln(1-\sigma)^{-\frac{1}{\mu}}.$$

Вследствие этого

$$x = 2a \int_0^a \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^{\frac{1}{\mu}} + (1-\sigma)^{\frac{1}{\mu}}},$$

$$y = 2a \int_0^a \frac{d\sigma}{1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{\mu}}} - a\sigma.$$

Полагая

$$(1 - \sigma)^{\frac{2}{\mu}} = \frac{1}{v},$$

будем иметь:

$$x = k \int_1^v \frac{v^{-\frac{\mu+1}{2}} dv}{1+v},$$

$$(1 \leq v \leq \infty)$$

$$y = a \left(v^{-\frac{\mu}{2}} - 1 \right) + k \int_1^v \frac{v^{-\frac{\mu}{2}} dv}{1+v}.$$

Если $s = OC = a$ (фиг. 9), то $\sigma = 1$,
 $v = \infty$ и для точки C абсцисса

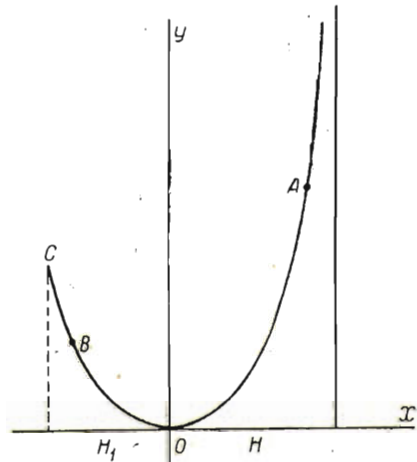
$$H_1 = k \int_1^{\infty} \frac{v^{-\frac{\mu+1}{2}} dv}{1+v}.$$

Складывая это равенство с [(2), § 18].
 находим, что

$$H + H_1 = k \int_0^{\infty} \frac{v^{-\frac{\mu+1}{2}} dv}{1+v},$$

т. е.

$$H + H_1 = \frac{k\pi}{\cos \frac{\mu\pi}{2}}, \quad (0 < \mu < 1).$$



Фиг. 9.

Таким образом кривая расположена в полосе, ограниченной прямыми параллельными оси Oy . Ширина полосы равна

$$\frac{k\pi}{\cos \frac{\mu\pi}{2}};$$

отметим еще, что ширина полосы

$$H + H_1 = \left[\beta \left(\frac{1-\mu}{2} \right) + \beta \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \right] k.$$

В то время как правая ветвь имеет асимптоту, левая, в виду условия $f(s) > 0$, прекращается в точке C ; касательная в этой точке параллельна оси Oy . Ордината точки C

$$y = \frac{k\pi}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} - k\beta \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - a.$$

$\begin{matrix} p \\ v \end{matrix}$	0.05	0.06	0.08	0.10	0.12	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0.00	19.3457	16.0198	11.8673	9.8809	7.7271	6.0794	4.4415	3.4679	2.8253	2.3712	2.0345	1.7758
0.05	2.1657	2.1335	2.0666	2.0024	1.9406	1.7554	1.6968	1.5948	1.4527	1.3835	1.2907	1.2075
0.10	1.6096	1.5833	1.5436	1.5165	1.4700	1.4182	1.3366	1.2785	1.1912	1.1273	1.0661	1.0034
0.15	1.2757	1.2635	1.2382	1.1937	1.1796	1.1450	1.0955	1.0477	1.0046	0.9549	0.9184	0.8701
0.20	1.0524	1.0439	1.0252	1.0080	0.9819	0.9667	0.9268	0.8898	0.8605	0.8224	0.7888	0.7589
0.25	0.8831	0.8762	0.8639	0.8517	0.8456	0.8213	0.7923	0.7647	0.7382	0.7145	0.6890	0.6661
0.30	0.7501	0.7442	0.7343	0.7254	0.7172	0.7040	0.6856	0.6603	0.6420	0.6245	0.6041	0.5867
0.35	0.6391	0.6355	0.6270	0.6195	0.6144	0.6044	0.5881	0.5728	0.5574	0.5397	0.5289	0.5155
0.40	0.5467	0.5444	0.5387	0.5337	0.5283	0.5203	0.5086	0.4971	0.4856	0.4767	0.4637	0.4535
0.50	0.3986	0.3966	0.3935	0.3910	0.3897	0.3854	0.3772	0.3721	0.3668	0.3615	0.3531	0.3485
0.60	0.2838	0.2836	0.2825	0.2804	0.2784	0.2736	0.2713	0.2689	0.2662	0.2637	0.2602	0.2569
0.70	0.1933	0.1930	0.1919	0.1909	0.1900	0.1891	0.1879	0.1864	0.1845	0.1832	0.1820	0.1798
0.80	0.1183	0.1180	0.1176	0.1172	0.1168	0.1163	0.1156	0.1150	0.1145	0.1139	0.1132	0.1125
0.90	0.0583	0.0581	0.0578	0.0575	0.0572	0.0568	0.0563	0.0557	0.0548	0.0542	0.0536	0.0530
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

SUR LA FIGURE D'ÉQUILIBRE DU FIL D'ÉGALE RÉSISTANCE

G. S. SIKORSKI

(Odessa)

(Sommaire)

Coriolis a donné dans le tome I du Journal de Liouville l'équation de la chaînette d'égal résistance. Il a traité le cas le plus simple de l'équilibre d'un fil homogène pesant.

Le problème est susceptible de généralisation: on peut étudier l'équilibre d'un fil d'égal résistance sous l'action de forces arbitraires continues.

Soit:

α, β, γ — les angles de la tangente avec les axes de coordonnées rectangulaires,

ω — l'angle de la tangente avec le vecteur P (la force rapportée à l'unité de longueur),

λ, μ, ν — les angles de P avec les axes,

s — la longueur de l'arc de la courbe d'égal résistance,

$f(s)$ — la fonction, qui caractérise l'action des forces pour chaque point du fil,

k — le coefficient constant.

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	
1.5708	1.4051	1.2687	1.1546	1.0579	0.9745	0.9082	0.8405	0.7855	0.7346	0.6931	§ 20 Таблица число- вых значений интеграла $\int \frac{v^{\rho-1} dv}{1+v}$
1.1286	1.0611	0.9976	0.9363	0.8859	0.8369	0.7919	0.7503	0.7123	0.6749	0.6443	
0.9582	0.9092	0.8649	0.8230	0.7839	0.7474	0.7133	0.6815	0.6518	0.6188	0.5978	
0.8318	0.7980	0.7623	0.7306	0.7008	0.6724	0.6459	0.6206	0.5971	0.5776	0.5534	
0.7298	0.7026	0.6751	0.6522	0.6280	0.6066	0.5856	0.5654	0.5374	0.5233	0.5108	
0.6438	0.6228	0.6026	0.5835	0.5651	0.5487	0.5307	0.5145	0.4992	0.4824	0.4701	
0.5694	0.5525	0.5373	0.5222	0.5077	0.4930	0.4800	0.4672	0.4555	0.4377	0.4251	
0.5022	0.4876	0.4760	0.4655	0.4540	0.4430	0.4322	0.4219	0.4121	0.4002	0.3929	
0.4431	0.4332	0.4238	0.4145	0.4055	0.3961	0.3883	0.3800	0.3722	0.3620	0.3568	
0.3410	0.3352	0.3296	0.3239	0.3186	0.3120	0.3081	0.3029	0.2980	0.2913	0.2884	
0.2532	0.2499	0.2469	0.2435	0.2406	0.2376	0.2352	0.2316	0.2287	0.2251	0.2234	
0.1780	0.1758	0.1748	0.1734	0.1718	0.1702	0.1685	0.1673	0.1658	0.1636	0.1629	
0.1120	0.1114	0.1108	0.1102	0.1096	0.1089	0.1082	0.1077	0.1072	0.1068	0.1063	
0.0524	0.0519	0.0515	0.0509	0.0504	0.0500	0.0496	0.0491	0.0486	0.0480	0.0474	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

Dans le cas général les équations différentielles de l'équilibre du fil peuvent être exprimées par:

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \alpha}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \alpha + \frac{f(s)}{k} \cos \lambda &= 0, \\ \frac{d \cos \beta}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \beta + \frac{f(s)}{k} \cos \mu &= 0, \\ \frac{d \cos \gamma}{ds} - \frac{f(s)}{k} \cos \omega \cos \gamma + \frac{f(s)}{k} \cos \nu &= 0. \end{aligned}$$

Nommons F l'aire de la section transversale du fil. Nous aurons

$$F = F_0 e^{-\frac{1}{k} \int_0^s f(s) \cos \omega ds},$$

$$F_0 = (F)_{s=0}.$$

où

L'examen de l'équilibre d'un fil sollicité par les forces centrales nous donne la relation

$$p = p_0 e^{\frac{1}{k} \int_0^s f(s) \cos \omega ds},$$

où p est la projection du rayon vecteur sur la normale. À l'aide de cette relation nous pouvons en établir une autre, suivant laquelle les forces centrales varient le long du fil, à la condition que la forme du fil soit connue.

Par exemple, on peut trouver la force, sous l'action de laquelle le fil aurait la forme de la chaînette ordinaire.

Au moyen de l'équation de Riccati, on peut résoudre la question réciproque, c'est-à-dire, trouver la courbe d'égalité résistance dans le cas de l'action de forces centrales.

Si les forces sont parallèles, les coordonnées courantes de la courbe d'égalité résistance sont déterminées par les équations:

$$x = x_0 + \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch} \varphi(s)},$$

$$y = y_0 + \int_0^s \operatorname{th} \varphi(s) ds,$$

où

$$\varphi(s) = \frac{1}{k} \int_0^s f(s) ds.$$

Des formules simples peuvent être données pour déterminer les asymptotes de la courbe d'égalité résistance (si ces asymptotes existent).

Dans le cas particulier, quand la force agissante est la pesanteur, nous obtiendrons l'équation de Coriolis

$$e^{\frac{y}{k}} \operatorname{ch} \frac{x}{k} = 1.$$
