АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ СФЕРЫ

Я. А. МИНДЛИН

(Москва)

Рассмотрение простейших волновых процессов в пространстве связано, как известно, с решением соответственного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где a есть скорость распространения рассматриваемых волн, которую мы будем считать постоянной.

Мы ставим себе задачей найти интеграл уравнения (1) во внутренности шара радиуса R, если

$$V\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \tag{2}$$

а граничное условие имеет вид

$$V\Big|_{r=R}=\varphi_n^{(m)}(t)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} n=0, 1, 2, \ldots \\ m=0, 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$ суть сферические функции.

Для нахождения интеграла уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и (3), воспользуемся выражением, дающим решение уравнения (1) в виде определенного интеграла:

$$V=\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_n^{(m)}(x\sin u\cos v+y\sin u\sin v+$$

$$+z\cos u+at)\sin u\, P_n^{(m)}(\cos u)\begin{matrix}\cos mv\\ \sin mv\end{matrix}\, du\, dv. \tag{4}$$

Решение уравнения (1) в форме (4) было впервые дано Whittaker.[1]

Рассматривая интеграл как предел суммы, мы видим, что физическая интерпретация равенства (4) состоит в том, что решение производится множеством плоских волн, причем элементарное возмущение дается выражением:

$$f_n^{(m)}(x\sin u\cos v+y\sin u\sin v+z\cos u+at)\, P_n^{(m)}(\cos u)\begin{matrix}\cos mv\\ \sin mv\end{matrix}\,\delta u\,\delta v.$$

[1] E. Whittaker, Mathematische Annalen, 1903.

Пусть теперь сферические координаты точки (x, y, z) будут (r, θ, φ). Введем новые географические координаты (ω, ψ), отнесенные к таким новым осям, что полярная ось является направлением (θ, φ) и плоскость $\psi = 0$ проходит через Oz; при этом формулы преобразования примут вид:

$$\cos\omega = \cos\theta\cos u + \sin\theta\sin u\cos(\varphi - v),$$
$$\sin u\sin(\varphi - v) = \sin\omega\sin\psi.$$

В силу инвариантности сферической функции относительно преобразования координат, имеем:

$$f_n^{(m)}(x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + at)\, P_n^{(m)}(\cos u)\,\frac{\cos mv}{\sin mv} =$$
$$= Y_n(r\cos\omega + at;\quad \theta, \varphi;\ \omega, \psi), \tag{5}$$

где Y_n есть поверхностная гармоническая функция относительно ω, ψ n-й степени.

Таким образом выражение (4) примет вид:

$$V(r, \theta, \varphi, t) = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_n(r\cos\omega + at;\ \theta, \varphi;\ \omega, \psi)\sin\omega\, d\omega\, d\psi, \tag{6}$$

где

$$Y_n(r\cos\omega + at; \theta, \varphi; \omega, \psi) = A_n(r\cos\omega + at; \theta, \varphi)\, P_n(\cos\omega) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n}[A_n^{(m)}(r\cos\omega + at; \theta, \varphi)\cos m\psi + B_n^{(m)}(r\cos\omega +$$
$$+ at; \theta, \varphi)\sin m\psi]\, P_n^{(m)}(\cos\omega). \tag{7}$$

Докажем, что в выражении (7) функция $A_n(r\cos\omega + at;\ \theta, \varphi)$ есть сферическая функция переменных θ, φ.

В самом деле, при $\omega = 0$ и произвольном ψ имеем $u = \theta$, $v = \varphi$, в силу чего равенства (5) и (7) примут вид:

$$f_n^{(m)}(r + at)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\,\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = Y_n(r + at; \theta, \varphi; 0, \psi) = A_n(r + at; \theta, \varphi),$$

откуда следует ранее высказанное утверждение.

Вставляя в равенство (6) вместо Y_n его значение из формулы (7) и интегрируя относительно ψ, получаем

$$V(r, \theta, \varphi, t) = \int_0^\pi \alpha_n^{(m)}(r\cos\omega + at)\, P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega \times P_n^{(m)}(\cos\theta)\,\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}. \tag{8}$$

Таким образом решение уравнения (1) при заданных условиях (2) и (3) будем искать в виде формулы (8).

Начальные и граничные условия позволяют найти искомую функцию $\alpha_n^{(m)}$.

Из граничного условия получаем равенство:

$$\varphi_n^{(m)}(t) = \int_0^\pi \alpha_n^{(m)}(R\cos\omega + at)\,P_n(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega, \tag{9}$$

а из начальных условий:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi \alpha_n^{(m)}(r\cos\omega)\,P_n(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega, \\ 0 &= \int_0^\pi \alpha_n^{(m)\prime}(r\cos\omega)\,P_n(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (10) будут удовлетворены, если мы положим искомую функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ равной нулю для $-R \leqslant \mu \leqslant R$.

Таким образом искомая функция $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ определена в интервале $(-R, +R)$. Интегральное уравнение (9) позволит нам определить искомую функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ в интервале (R, ∞). Введем в уравнении (9) новую переменную интеграции z, определенную соотношением:

$$z = R\cos\omega + at.$$

При этом обозначении интегральное уравнение (9) примет вид:

$$\varphi_n^{(m)}(t) = \frac{1}{R}\int_{-R+at}^{R+at} \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz. \tag{11}$$

В силу непротиворечивости граничных и начальных условий мы имеем, что $\varphi_n^{(m)}(0) = 0$ так же, как и $\varphi_n^{(m)\prime}(0) = 0$, вследствие чего интегральное уравнение (11) будет удовлетворяться само по себе при $t = 0$.

Разобьем промежуток интегрирования $(-R + at;\ R + at)$ в интегральном уравнении (11) на два следующим образом:

$$\varphi_n^{(m)}(t) = \frac{1}{R}\int_{-R+at}^{R} \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz + \frac{1}{R}\int_{R}^{R+at} \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz. \tag{12}$$

Пусть переменное t изменяется в интервале

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{2R}{a}.$$

При этом аргумент подъинтегральной функции $\alpha_n^{(m)}(z)$ в первом слагаемом уравнения (12) не выходит из интервала $(-R, +R)$, а в этом промежутке функция $\alpha_n^{(m)}(z)$ в силу начальных условий равна нулю.

Таким образом интегральное уравнение (12) примет вид:

$$\varphi_n^{(m)}(t) = \frac{1}{R}\int_{R}^{R+at} \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{2R}{a}\right). \tag{13}$$

Заменяя верхний предел интеграла одной буквой x, т. е. полагая $R+at=x$, имеем:

$$\varphi_n^{(m)}\left(\frac{x-R}{a}\right)=\frac{1}{R}\int_R^x \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-x+R}{R}\right)dz \quad (R\leqslant x\leqslant 3R), \tag{14}$$

причем $\varphi_n^{(m)}(0)=0$. Интегральное уравнение (14) носит название интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода с регулярным ядром, зависящим от разности аргументов. Дифференцируя обе части уравнения (14), мы его приведем к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода:

$$\frac{R}{a}\varphi_n^{(m)\prime}\left(\frac{x-R}{a}\right)=\alpha_n^{(m)}(x)+\frac{(-1)^n}{R}\int_R^x \alpha_n^{(m)}(z)\,P_n'\left(\frac{x-z-R}{R}\right)dz, \tag{15}$$

$$\varphi_n^{(m)\prime}(0)=0.$$

Как известно из теории решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеем:

$$\alpha_n^{(m)}(x)=\frac{R}{a}\varphi_n^{(m)\prime}\left(\frac{x-R}{a}\right)+\frac{R}{a}\int_R^x H_n^{(m)}(x-z)\,\varphi_n^{(m)\prime}\left(\frac{z-R}{a}\right)dz, \tag{16}$$

причем $\alpha_n^{(m)}(R)=0$. Резольвента $H_n^{(m)}(\nu)$ легко находится в случае, когда ядро интегрального уравнения представляет собою полином.[1] В нашем случае резольвента $H_n^{(m)}(\nu)$ равна сумме вычетов функции

$$\Phi_n(s)=\frac{s^n e^{s\nu}}{s^n-\frac{P_n'(1)}{R}s^{n-1}+\frac{P_n''(1)}{R^2}s^{n-2}+\ldots+(-1)^n\frac{P_n^n(1)}{R^n}} \tag{17}$$

по отношению к нулям знаменателя, причем символ $P_n^{\,n}(x)$ означает n-ю производную.

Окончательно мы нашли искомую функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ в интервале $(R,\,3R)$; ранее она нами была найдена в интервале $(-R,\,+R)$, причем такого рода продолжение не нарушает ее непрерывности. Для определения $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ при других значениях μ вновь обратимся к интегральному уравнению (11):

$$\varphi_n^{(m)}(t)=\frac{1}{R}\int_{-R+at}^{R+at}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz.$$

Рассмотрим дальнейший промежуток изменения t.

Пусть переменное t изменяется в интервале:

$$\frac{2R}{a}\leqslant t\leqslant\frac{4R}{a}.$$

---

[1] E. Whittaker, On the Numerical Solution of Integral Equations, Proceedings of the Royal Society, v. 94, 1917.

Разобьем интеграл в выражении (11) на два интеграла следующим образом:

$$\varphi_n^{(m)}(t)=\frac{1}{R}\int\limits_{-R+at}^{3R}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz+\frac{1}{R}\int\limits_{3R}^{R+at}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz. \qquad (18)$$

Для сокращения письма обозначим:

$$\frac{1}{R}\int\limits_{-R+at}^{3R}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz=h_n^{(m)}(t). \qquad (19)$$

В силу равенства (11) имеем:

$$h_n^{(m)}\left(\frac{2R}{a}\right)=\varphi_n^{(m)}\left(\frac{2R}{a}\right).$$

Функция $h_n^{(m)}(t)$ определена в промежутке

$$\frac{2R}{a}\leqslant t\leqslant\frac{4R}{a}$$

в силу того, что подъинтегральная функция была нами ранее найдена в интервале $(R, 3R)$. При принятых нами обозначениях интегральное уравнение (18) примет вид:

$$\varphi_n^{(m)}(t)-h_n^{(m)}(t)=\frac{1}{R}\int\limits_{3R}^{R+at}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-at}{R}\right)dz,\quad\left(\frac{2R}{a}\leqslant t\leqslant\frac{4R}{a}\right). \qquad (20)$$

Заменяя верхний предел интеграла одной буквой x, т. е. полагая $R+at=x$, имеем:

$$\varphi_n^{(m)}\left(\frac{x-R}{a}\right)-h_n^{(m)}\left(\frac{x-R}{a}\right)=\frac{1}{R}\int\limits_{3R}^{x}\alpha_n^{(m)}(z)\,P_n\left(\frac{z-x+R}{R}\right)dz,$$

$$(3R\leqslant x\leqslant 5R), \qquad (21)$$

причем левая часть равенства (21), при $x=3R$, обращается в нуль в силу ранее доказанного. Ядро интегрального уравнения (21) совпадает с рассмотренным ранее ядром интегрального уравнения (14).

Таким образом функция $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ для μ $(3R\leqslant\mu\leqslant 5R)$ определяется следующей формулой:

$$\alpha_n^{(m)}(\mu)=\frac{R}{a}\left[\varphi_n^{(m)\prime}\left(\frac{\mu-R}{a}\right)-h_n^{(m)\prime}\left(\frac{\mu-R}{a}\right)\right]+$$

$$+\frac{R}{a}\int\limits_{3R}^{x}H_n^{(m)}(\mu-z)\left[\varphi_n^{(m)\prime}\left(\frac{z-R}{a}\right)-h_n^{(m)\prime}\left(\frac{z-R}{a}\right)\right]dz, \qquad (22)$$

где резольвента $H_n^{(m)}(\nu)$ равна сумме вычетов функции $\Phi_n(s)$ [формула (17)] по отношению к нулям знаменателя.

Окончательно мы нашли искомую функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ в интервале $(3R, 5R)$; ранее она нами была найдена в интервале $(-R, 3R)$. Для дальнейшего ее определения нужно точно так же, как мы только что это делали, обратиться опять к интегральному уравнению (11).

Сформулируем правило для нахождения функции $\alpha_n^{(m)}(\mu)$, когда μ изменяется в промежутке $(2k+1)R \leqslant \mu \leqslant (2k+3)R$, где k — целое положительное число или нуль. Этот промежуток соответствует изменению t в промежутке

$$\frac{2kR}{a} \leqslant t \leqslant \frac{(2k+2)R}{a}.$$

Для этого только нужно в интегральном уравнении (11) промежуток интегрирования $(-R+at,\ R+at)$ разбить на два промежутка

$$[-R+at,\ (2k+1)R]$$

и

$$[(2k+1)R,\ R+at].$$

В первом промежутке подъинтегральная функция представляет собой известную величину, так что интеграл будет представлять собой известную функцию. Полученное при этом интегральное уравнение даст нам возможность определить искомую функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ в промежутке $(2k+1)R \leqslant \mu \leqslant (2k+3)R$, если для значений μ, лежащих в промежутке $(2k-1)R \leqslant \mu \leqslant (2k+1)R$, мы ранее ее определили.

Вышеуказанным процессом мы находим функцию $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ для значений аргумента, изменяющихся в промежутке $(-R, \infty)$. Но, как видно из формулы (8), дающей решение уравнения (1), аргумент искомой функции $\alpha_n^{(m)}(\mu)$ как раз изменяется в указанном промежутке.

20 IX 1937.

Группа технической механики
Академии Наук СССР.

BOUNDARY PROBLEM OF THE WAVE EQUATION IN THE CASE OF A SPHERE

J. A. MINDLIN
(Moscow)

(Summary)

In the present work is investigated the solution of a wave equation (1) at zero initial conditions and under boundary conditions (3). Applying the principle of superposition (4) established by Whittaker, the problem can be brought down to a solution of integral equation (14) of the Volterra 1st type with a regular nucleus depending on the difference of arguments.