АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ

А. В. СВЕТЛОВ

(Ленинград)

Изучением поперечных колебаний стержня, вращающегося вокруг своей оси, занималось весьма много авторов,[1] так как этот вопрос в связи с определением критических скоростей валов в различных машинах, турбинах и т. д. имеет большое практическое значение.

Однако, насколько мне известно, в литературе вопрос рассматривается в предположении, что главные моменты инерции поперечного сечения стержня равны.

В настоящей работе мы получим некоторые интересные результаты для стержней переменного сечения с различными главными моментами инерции, что дает более глубокое представление о сущности вопроса.

1. Кроме предположений, обычных при изучении малых поперечных колебаний тонкого стержня переменного сечения, как то: прямолинейность в ненапряженном состоянии, пренебрежение влиянием сдвига и „инерции вращения“,[2] мы допустим, что:

1) стержень в процессе колебаний не скручивается;

2) главные оси инерции всех поперечных сечений лежат в двух (взаимно перпендикулярных) плоскостях, проходящих через прямолинейную (в состоянии покоя) ось стержня;

3) в прямолинейном состоянии стержень вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω.

При этом в силу предположения 1) проекция угловой скорости какого-либо поперечного сечения на касательную к изогнутой оси стержня будет также равна ω.

---

[1] См., например, работы: Pidduck, Proc. London Math. Soc., 1920; Jeffcott, Phil Mag., 1919; Föppl., Technische Mechanik, 1909, а также литературные указания у Г. В. Бондаренко, Малые колебания упругих систем, стр. 95—99.

[2] Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, 1934, стр. 227.

Примем ось стержня в прямолинейном состоянии за ось X системы координат XYZ, вращающейся вокруг этой оси X с угловой скоростью ω в сторону вращения стержня; при этом за плоскости XY и XZ примем плоскости, упомянутые в предположении 2.

Имея в виду получить дифференциальные уравнения движения стержня при помощи принципа Гамильтона, обозначим проекции смещения оси стержня в момент t в точке x на выбранные оси Y, Z соответственно через y и z.

Тогда проекции (абсолютной) скорости рассматриваемой точки оси стержня на оси Y и Z соответственно будут равны:

$$\frac{\partial y}{\partial t}+z\omega, \quad \frac{\partial z}{\partial t}-y\omega,$$

а кинетическая энергия T стержня будет равна:

$$T=\frac{1}{2}\int\limits_{(L)}\rho s\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial t}+z\omega\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}-y\omega\right)^2\right\}dx,$$

где ρ — плотность материала стержня, s — площадь поперечного сечения его.

Потенциальную энергию U деформации найдем, как обычно:

$$U=\int\limits_{(L)}Es\left\{r_1^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+r_2^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2\right\}dx,$$

где r_1 и r_2 — соответствующие главные радиусы инерции площади поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга.

Согласно принципу Гамильтона имеем:

$$\delta\int\limits^{(t)}\int\limits_{(L)}(T-U)\,dx\,dt=0,$$

откуда получаем следующую систему уравнений:

$$L_1(y)\equiv\frac{E}{\rho s}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(sr_1^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\omega^2 y=-2\omega\frac{\partial z}{\partial t}, \tag{1}$$

$$L_2(z)\equiv\frac{E}{\rho s}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(sr_2^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\omega^2 z=2\omega\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2}$$

Эти уравнения необходимо дополнить соответствующими граничными условиями по четыре для каждого конца стержня и надлежащими начальными условиями.

Из уравнений (1) и (2) легко исключить неизвестную функцию z, именно:

$$L_2(L_1(y))=-2\omega L_2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=-2\omega\frac{\partial}{\partial t}L_2(z),$$

причем вынесение знака $\frac{\partial}{\partial t}$ из оператора L_2 возможно благодаря тому, что все коэффициенты последнего не зависят от времени. Пользуясь теперь уравнением (2), получим следующее уравнение для y:

$$L_2(L_1(y))=-4\omega^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3}$$

и аналогичное уравнение для z:

$$L_1(L_2(z)) = -4\omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Полученные уравнения (3) и (4) с частными производными восьмого порядка довольно сложны, и исследование их в таком общем виде не является нашей задачей. Мы остановимся лишь на случае, когда операторы L_1 и L_2 удовлетворяют соотношению

$$L_1(L_2) = L_2(L_1),$$

что, очевидно, будет иметь место, если отношение радиусов инерции r_1 и r_2 будет одинаково для всех поперечных сечений стержня, в частности, если все поперечные сечения подобны, что в дальнейшем и будем предполагать.

Тогда, введя для краткости обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho s} &= p(x), \\ s r_1^2 &= a_1^2 q(x), \\ s r_2^2 &= a_2^2 q(x), \end{aligned} \tag{5}$$

будем иметь:

$$\begin{gathered} L_1 = a_1^2 p(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(q(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega^2, \\ L_2 = a_2^2 p(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(q(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega^2, \\ L_1(L_2) = L_2(L_1) = a_1^2 a_2^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2}{\partial x^2} p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ + (a_1^2 + a_2^2) p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega^2\right) + \frac{\partial^4}{\partial t^4} - 2\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^4, \end{gathered} \tag{6}$$

так что для функций y и z получим одинаковые уравнения вида:

$$\begin{gathered} a_1^2 a_2^2 L^2(u) + (a_1^2 + a_2^2) L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - (a_1^2 + a_2^2)\omega^2 L(u) + \\ + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 2\omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^4 u = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где оператор L дается выражением:

$$\begin{gathered} L = p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L^2 = L(L). \end{gathered}$$

2. Если искать решение уравнения (7) в виде

$$u = X(x)\, T(t),$$

то благодаря наличию в этом уравнении смешанных производных (второй член левой части) найдем, что решение такого вида будет существовать лишь при условии:

$$L = \lambda^4, \tag{8}$$

где λ^4 — постоянная, т. е. когда $X(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$p \frac{d^2}{\partial x^2} q \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^4 X = 0, \tag{9}$$

либо когда $T(t)$ удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \mu^2 T = 0.$$

Однако второй из этих случаев представляет мало интереса, так как при этом окажется невозможным удовлетворить любым наперед заданным начальным условиям, поэтому мы остановимся на первом случае. Следовательно, мы полагаем:

$$\begin{aligned} y &= X^{\mathrm{I}}(x)\, T_1(t), \\ z &= X^{\mathrm{II}}(x)\, T_2(t), \end{aligned} \tag{10}$$

причем $X^{\mathrm{I}}(x)$ и $X^{\mathrm{II}}(x)$ должны будут удовлетворять уравнениям вида (9). Но нетрудно видеть, что в таком случае $X^{\mathrm{I}}(x)$ и $X^{\mathrm{II}}(x)$ должны быть тождественно равны. Действительно, подставляя выражения (10) в уравнения (1) и (2) и принимая во внимание (6), найдем, что

$$\frac{X^{\mathrm{I}}}{X^{\mathrm{II}}} = -\frac{(a_1^2 \lambda^4 - \omega^2)\, T_1 + T_1''}{2\omega\, T_2'} = \frac{(a_2^2 \lambda^4 - \omega^2)\, T_2 + T_2''}{2\omega\, T_2'},$$

откуда видим, что отношение $\frac{X^{\mathrm{II}}}{X^{\mathrm{I}}}$ должно равняться постоянной, которую без ограничения общности можно принять равной единице. Таким образом находим:

$$X^{\mathrm{I}}(x) = X^{\mathrm{II}}(x) \equiv X(x), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} (a_1^2 \lambda^4 - \omega^2)\, T_1 + T_1'' &= -2\omega T_2', \\ (a_2^2 \lambda^4 - \omega^2)\, T_2 + T_2'' &= 2\omega T_1', \end{aligned} \tag{12}$$

причем функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ должны будут на основании (7) и (8) удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$T^{\mathrm{IV}} + [2\omega^2 + (a_1^2 + a_2^2)\lambda^4]\, T'' + [a_1^2 a_2^2 \lambda^8 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda^4 \omega^2 + \omega^4]\, T = 0. \tag{13}$$

Однако, благодаря соотношению (11), в рассматриваемом случае, очевидно, нельзя будет удовлетворить любым граничным условиям.

Предположим, что граничные условия для y на концах $x = x_1$ и $x = x_2$ заданы в виде:

$$f_m\left(y,\ j_y a_1^{-2},\ \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\Bigg|_{x=x} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ m=1,\ 2 \\ k=2,\ m=3,\ 4 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где j_y — проекция (абсолютного) ускорения соответствующего конца стержня на ось Y.

Тогда решения рассматриваемого вида можно получить, если функции f_m линейны и однородны относительно своих аргументов, с вещественными коэффициентами, не зависящими от времени, а граничные условия для функции z те же самые, что и для y, с заменой a_1 на a_2.

Эти предположения имеют место в случаях, наиболее интересных для приложений, когда каждый из концов стержня упруго или жестко закреплен, подперт или свободен (в обеих плоскостях XY и XZ) или когда на каком-либо конце укреплено тело, принимаемое за материальную точку.

Действительно, в этих случаях, подставив первое из выражений (10) в граничные условия (14) и приняв во внимание, что проекции (абсолютного) ускорения какой-либо точки оси стержня соответственно равны (на основании 12):

$$j_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega^2 y + 2\omega \frac{\partial z}{\partial t} = a_1^2 \lambda^4 T_1 X,$$

$$j_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \omega^2 z - 2\omega \frac{\partial y}{\partial z} = a_2^2 \lambda^4 T_2 X,$$

а граничные условия (14) предположены однородными и линейными, получим четыре следующих линейных граничных условия для $X(x)$:

$$f_m\left(X,\ \lambda^4 X,\ \frac{dX}{dx},\ \frac{d^2X}{dx^2},\ \frac{d^3X}{dx^3}\right)\Bigg|_{x=x_k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ m=1,\ 2 \\ k=2,\ m=3,\ 4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

причем граничные условия для z, очевидно, также будут удовлетворяться в силу сделанных предположений.

Теперь заметим, что если бы стержень не вращался, то при решении задачи о его поперечных колебаниях мы пришли бы к тому же самому уравнению (9) и граничным условиям вида (15), а эта задача достаточно хорошо исследована. Как известно, при условии достаточной регулярности имеется полная система фундаментальных функций $X_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, соответствующих характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (9) и граничным условиям.

Для дальнейшего отметим, что характеристические числа λ_n для всех перечисленных выше граничных условий вещественны.

Таким образом задача о поперечных колебаниях вращающегося стержня при сделанных предположениях приводит к построению фундаментальных функций для случая невращающегося стержня. При этом величины $a_1\lambda_n^2$ и $a_2\lambda_n^2$ будут представлять угловые частоты гармоник порядка n соответственно при колебаниях покоящегося стержня в плоскостях XY и XZ.

Каждой фундаментальной функции $X_n(x)$ будут соответствовать нормальные колебания

$$y_n = X_n(x)\, T_{1,n}(t),$$

$$z_n = X_n(x)\, T_{2,n}(t),$$

причем $T_{1\,n}(t)$ и $T_{2,n}(t)$ должны удовлетворять уравнению (13) при $\lambda = \lambda_n$:

Искомые функции, как обычно, будут представляться рядами:

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= \sum^{\infty} X_n T_{1,n}, \\
z &= \sum^{\infty} X_n T_{2,n}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{16}
$$

Функции $T_{1,n}(t)$ и $T_{2,n}(t)$ как решения уравнения (13) будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
T_{1,n} &= C^{\mathrm{I}}_{1,n} \operatorname{sh} \mu_{1,n} t + C^{\mathrm{I}}_{2,n} \operatorname{ch} \mu_{1,n} t + C^{\mathrm{I}}_{3,n} \operatorname{sh} \mu_{2,n} t + C^{\mathrm{I}}_{4,n} \operatorname{ch} \mu_{2,n} t, \\
T_{2,n} &= C^{\mathrm{II}}_{1,n} \operatorname{sh} \mu_{1,n} t + C^{\mathrm{II}}_{2,n} \operatorname{ch} \mu_{1,n} t + C^{\mathrm{II}}_{3,n} \operatorname{sh} \mu_{2,n} t + C^{\mathrm{II}}_{4,n} \operatorname{ch} \mu_{2,n} t,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $\mu_{1,n}$ и $\mu_{2,n}$ — корни уравнения.

$$
\mu_n^4 + [2\omega^2 + (a_1^2 + a_2^2)\lambda_n^4]\,\mu_n^2 + [a_1^2 a_2^2 \lambda_n^8 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda_n^4 \omega^2 + \omega^4] = 0, \tag{18}
$$

а $C^{\mathrm{I}}_{1,n}, \ldots, C^{\mathrm{II}}_{4,n}$ — постоянные, причем предполагается, что $\mu_{1,n}$ и $\mu_{2,n}$ отличны от нуля и различны.

Постоянные $C^{\mathrm{I}}_{1,n}, \ldots, C^{\mathrm{II}}_{4,n}$ связаны следующими уравнениями, которые получим, подставив выражения (17) в уравнения (12):

$$
\begin{aligned}
2\omega\mu_{1,n} C^{\mathrm{I}}_{1,n} &= \left(\omega^2_{2,n} - \omega^2 + \mu^2_{1,n}\right) C^{\mathrm{II}}_{2,n}, \\
-2\omega\mu_{1,n} C^{\mathrm{II}}_{1,n} &= \left(\omega^2_{1,n} - \omega^2 + \mu^2_{1,n}\right) C^{\mathrm{I}}_{1,n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-2\omega\mu_{2,n} C^{\mathrm{II}}_{4,n} &= \left(\omega^2_{1,n} - \omega^2 + \mu^2_{1,n}\right) C^{\mathrm{I}}_{4,n},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega_{1,n} &= a_1 \lambda_n^2, \\
\omega_{2,n} &= a_2 \lambda_n^2
\end{aligned}
\right\}
\tag{20}
$$

представляют угловые частоты соответствующих гармоник при колебаниях невращающегося стержня.

Однако каждое четное уравнение этой группы является непосредственным следствием предыдущего нечетного. Действительно, определитель, составленный из коэффициентов, например, первых двух уравнений, будет равен нулю:

$$
\begin{aligned}
\left(\omega^2_{1,n} - \omega^2 + \mu^2_{1,n}\right)\left(\omega^2_{2,n} - \omega^2 + \mu^2_{1,n}\right) + 4\omega^2 &= \mu_{1,n} + \left(2\omega^2 + \omega^2_{1,n} + \omega^2_{2,n}\right)\mu^2_{1,n} + \\
&+ \omega^2_{1,n}\omega^2_{2,n} - \left(\omega^2_{1,n} + \omega^2_{2,n}\right)\omega^2 + \omega^4 = 0,
\end{aligned}
$$

так как представляет левую часть уравнения (18), а $\mu_{1,n}$ есть корень последнего.

Таким образом из восьми постоянных $C^{\mathrm{I}}_{1,n}, \ldots, C^{\mathrm{II}}_{4,n}$ мы можем придать произвольные значения четырем любым, у которых первые нижние индексы различны, а остальные выразить через эти при помощи каких-нибудь четырех уравнений (19). Затем, разлагая, как обычно, заданные начальные смещения y_0 и z_0 и начальные скорости y_0' и z_0' в ряды по функциям $X_n(x)$ и обозначая коэффициенты этих разложений соответственно через $c_{y,n}$, $c_{z,n}$, $c'_{y,n}$ и $c'_{z,n}$, получим уравнения:

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{I}}_{2,n} + C^{\mathrm{I}}_{4,n} &= c_{y,n}, \\ C^{\mathrm{II}}_{2,n} + C^{\mathrm{II}}_{4,n} &= c_{z,n}, \\ \mu_{1,n} C^{\mathrm{I}}_{1,n} + \mu_{2,n} C^{\mathrm{I}}_{3,n} &= c'_{y,n}, \\ \mu_{1,n} C^{\mathrm{II}}_{1,n} + \mu_{2,n} C^{\mathrm{II}}_{3,n} &= c'_{z,n}, \end{aligned} \tag{21}$$

которые, очевидно, и позволят определить все постоянные $C^{\mathrm{I}}_{1,n}, \ldots, C^{\mathrm{II}}_{4,n}$.

3. Практически наиболее интересным является вопрос об устойчивости (в обычном смысле теории малых колебаний) или о критических скоростях вращающегося стержня. Этот вопрос решается путем рассмотрения корней уравнения (18), которое мы можем записать в виде:

$$\mu_n^4 + \left(2\omega^2 + \omega_{1,n}^2 + \omega_{2,n}^2\right)\mu_n^2 + \left(\omega^2 - \omega_{1,n}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{2,n}^2\right) = 0. \tag{22}$$

Дискриминант этого биквадратного уравнения

$$\left(2\omega^2 + \omega_{1,n}^2 + \omega_{2,n}^2\right)^2 - 4\left(\omega^2 - \omega_{1,n}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{2,n}^2\right) = 8\omega^2\left(\omega_{1,n}^2 + \omega_{2,n}^2\right) + \left(\omega_{1,n}^2 - \omega_{2,n}^2\right)^2$$

больше нуля, если, как и было отмечено, характеристические числа λ_n вещественны.

Таким образом уравнение не может иметь отличных от нуля кратных корней.

Легко видеть, что все корни чисто мнимые (а следовательно попарно сопряженные), если выполнено соотношение

$$\left(\omega^2 - \omega_{1,n}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{2,n}^2\right) > 0; \tag{23}$$

если же

$$\left(\omega^2 - \omega_{1,n}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{2,n}^2\right) < 0,$$

то имеется два мнимых (сопряженных) корня и два вещественных корня разных знаков.

Отсюда следует, что устойчивым стержень будет при выполнении соотношения (23) при любом значении n. Полагая, для определенности, что $a_1 < a_2$, мы видим, что существует бесконечный ряд зон неустойчивости, определяемый неравенствами:

$$\begin{aligned} &\omega_{1,1} < \omega < \omega_{2,1}, \\ &\omega_{1,2} < \omega < \omega_{2,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\omega_{1,n} < \omega < \omega_{2,n}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

Интересно отметить, что возрастание колебаний по показательному закону, притом в определенных зонах неустойчивости, физически имеет сходство с так называемым явлением параметрического резонанса, проявляющимся в системах, параметры которых изменяются периодически с течением времени, хотя в рассматриваемом случае имеем систему уравнений с коэффициентами, не зависящими от времени.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (22) имеет корни, равные нулю. Очевидно, это возможно только тогда, когда выполнено одно из соотношений:

$$\omega^2 = \omega_{1,n}^2,$$

$$\omega^2 = \omega_{2,n}^2.$$

При этом уравнение (22) имеет один двойной корень μ_2, равный нулю, и два чисто мнимых сопряженных $\pm\mu_1$. Для $T_{1,n}$ и $T_{2,n}$ теперь будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} T_{1,n} &= C_{1,n}^{\mathrm{I}} \operatorname{sh} \mu_1 t + C_{2,n}^{\mathrm{I}} \operatorname{ch} \mu_1 t + C_{3,n}^{\mathrm{I}} t + C_{4,n}^{\mathrm{I}}, \\ T_{2,n} &= C_{1,n}^{\mathrm{II}} \operatorname{sh} \mu_1 t + C_{2,n}^{\mathrm{II}} \operatorname{ch} \mu_1 t + C_{3,n}^{\mathrm{II}} t + C_{4,n}^{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{25}$$

На основании уравнений (12) найдем, что коэффициенты $C_{1,n}^{\mathrm{I}}, \ldots, C_{4,n}^{\mathrm{II}}$ вместо соотношений (19) должны будут удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega\mu_1 C_{1,n}^{\mathrm{II}} &= -\mu_1^2 C_{2,n}^{\mathrm{I}}, \\ 2\omega\mu_1 C_{2,n}^{\mathrm{II}} &= -\mu_1^2 C_{1,n}^{\mathrm{I}}, \\ C_{3,n}^{\mathrm{II}} &= 0, \\ \left(\omega_{2,n}^2 - \omega^2\right) C_{4,n}^{\mathrm{II}} &= 2\omega C_{3,n}^{\mathrm{I}} \end{aligned}\right\} \quad \left(\omega_{1,n}^2 = \omega^2\right) \tag{26}$$

или аналогичным условиям, когда $\omega_{2,n}^2 = \omega^2$.

Из начальных условий теперь вместо (21) получим:

$$\begin{aligned} C_{2,n}^{\mathrm{I}} + C_{4,n}^{\mathrm{I}} &= c_{y,n}, \\ C_{2,n}^{\mathrm{II}} + C_{4,n}^{\mathrm{II}} &= c_{z,n}, \\ \mu_1 C_{1,n}^{\mathrm{I}} + C_{3,n}^{\mathrm{I}} &= c'_{y,n}, \\ \mu_1 C_{1,n}^{\mathrm{II}} &= c'_{z,n}. \end{aligned} \tag{27}$$

Легко видеть, что полученные уравнения (26) и (27) имеют решения (единственные), вообще говоря (при начальных условиях общего вида), отличные от нуля, кроме $C_{3,n}^{\mathrm{II}}$ (или $C_{3,n}^{\mathrm{I}}$ в случае $\omega_{2,n}^2 = \omega^2$), которое равно нулю при любых начальных условиях.

Отсюда следует, что вращающийся стержень неустойчив и на границах отмеченных выше зон неустойчивости.

Однако интересно отметить, что в только что рассмотренных случаях амплитуда колебаний соответствующей гармоники возрастает лишь в одной из координатных плоскостей при любых начальных условиях, тогда как в другой из них отклонения остаются конечными.

Замечательно, что при отличии поперечного сечения от круглого (в отношении моментов инерции), вообще говоря, зоны неустойчивости, определяемые неравенствами (24), будут тем шире, чем больше n, и после некоторого n будут перекрывать друг друга, благодаря чему окажется, что стержень будет неустойчив при любой угловой скорости, большей или равной угловой частоте $\omega_{1,n}$ собственных колебаний некоторой гармоники невращающегося стержня. Например, если имеем однородный стержень длины l постоянного сечения, радиусы инерции которого относительно главных осей инерции равны r_1 и r_2, а концы стержня оперты (обычный случай вала, вращающегося, например, в шариковых подшипниках), то характеристические числа, как известно, будут равны:

$$\lambda_n = n\frac{\pi}{l}.$$

Соответствующие угловые частоты $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$ будут:

$$\omega_{1,n} = a_1\frac{\pi^2}{l^2}n^2 = \frac{\pi^2}{l^2}n^2 r_1\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\omega_{2,n} = a_2\frac{\pi^2}{l^2}n^2 = \frac{\pi^2}{l^2}n^2 r_2\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\omega_{1,n+1}}{\omega_{2,n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{r_1}{r_2}, \tag{28}$$

так что при любом отношении $\frac{r_1}{r_2}$ (меньшем единицы, так как мы считаем $\alpha_1 < a_2$) найдется такое целое число k, при котором будет $\omega_{1,k+1} \leqslant \omega_{2,n}$, если $n \geqslant k$. Поэтому, как легко видеть, при любом $\omega \geqslant \omega_{1,k}$ будет выполнено по крайней мере одно из неравенств (24), следовательно, в разложениях (16) появится, вообще говоря, по крайней мере по одному члену, беспредельно возрастающему с течением времени, и стержень будет неустойчив. Отмеченное значение k находится из неравенства:

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\frac{r_1}{r_2} \leqslant 1,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} - 1} + \varepsilon, \tag{29}$$

где ε — величина, дополняющая первый член левой части до ближайшего большего целого числа.

Таким образом, как бы мало ни отличался стержень от круглого, он будет неустойчив в зонах (24) для $n < k$ и при $\omega \geqslant \omega_{1,k}$, т. е. при достаточно большой угловой скорости.

Если сечение стержня сильно отличается от круглого, то может случиться, что k, определяемое выражением (29), будет равно единице. В рассматриваемом примере это будет, когда $4r_1 \leqslant r_2$.

В таком случае все зоны (24) сливаются в одну:

$$\omega_{1,1} \leqslant \omega < \infty.$$

4. В заключение рассмотрим предельный случай, когда $a_1^2 = a_2^2$. В этом случае будем иметь:

$$\omega_{1,n} = \omega_{2,n} \equiv \omega_n,$$

так что уравнение (22) будет иметь вид:

$$\mu_n^4 + 2(\omega^2 + \omega_n^2)\mu_n^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2 = 0. \tag{30}$$

Корни его, очевидно, равны:

$$\mu_n = \pm(\omega \pm \omega_n)\, i.$$

Все эти корни чисто мнимые, попарно сопряженные, если $\omega \neq \omega_n$, поэтому круглый стержень при сделанных предположениях устойчив при любой угловой скорости.

Покажем, что стержень устойчив и в случае

$$\omega = \omega_n.$$

Действительно, в этом случае уравнение (30) имеет один двукратный корень, равный нулю, и два мнимых сопряженных $\pm\mu_n$, поэтому для $T_{1,n}(t)$ и $T_{2,n}(t)$ будем иметь прежние выражения (25).

Однако, подставляя эти выражения в (12) вместо (26), теперь будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega C^{\mathrm{I}}_{1,n} &= \mu_n C^{\mathrm{II}}_{2,n}, \\ 2\omega C^{\mathrm{I}}_{2,n} &= \mu_n C^{\mathrm{II}}_{1,n}, \\ C^{\mathrm{I}}_{3,n} &= 0, \\ C^{\mathrm{II}}_{3,n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Отсюда видим, что выражения (26) при любых начальных условиях не будут содержать членов, возрастающих с течением времени, поэтому круглый стержень будет устойчив в прежнем смысле при любой угловой скорости.

Интересно отметить, что у круглого стержня не появится расходящихся колебаний ни при какой угловой скорости, даже если учесть силы тяжести, когда ось x горизонтальна, хотя в этом случае в левых частях уравнений (1) и (2) придется ввести члены вида $gs\rho\cos\omega t$ и $gs\rho\sin\omega t$, обычно вызывающие явление резонанса.

При надлежащем выборе начала отсчета времени, в этом случае будем иметь:

$$a^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega^2 y + 2\omega \frac{\partial z}{\partial t} = g \cos \omega t,$$

$$a^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \omega^2 z - 2\omega \frac{\partial y}{\partial t} = g \sin \omega t.$$

Необходимые частные решения этих уравнений имеют вид:

$$y = X(x) \cos \omega t,$$

$$z = X(x) \sin \omega t,$$

при этом оба рассматриваемых уравнения будут удовлетворяться, если $X(x)$ является решением уравнения

$$a^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = g$$

Отсюда $X(x)$ находится простым четырехкратным интегрированием, а появляющиеся постоянные определяются при помощи граничных условий. Однако для нас интересно лишь то обстоятельство, что найденное решение, очевидно не меняющееся с течением времени, есть статический прогиб стержня в вертикальной плоскости.

Таким образом вращение тонкого круглого стержня вокруг его оси совершенно не влияет (поскольку можно пренебречь „инерцией вращения") на его поперечные колебания. Природа неустойчивости круглого вращающегося стержня совершенно иная и определяется различного рода асимметрией.

Например, неустойчивое состояние у круглого стержня появится при $\omega = \omega_n$, если ось его непрямолинейна в состоянии равновесия. При этом уравнения (1) и (2) будут неоднородны благодаря тому, что в них придется ввести члены y^0 и z^0, не зависящие от времени, где $y = y^0(x)$, $z = z^0(x)$ представляют уравнения оси стержня в состоянии равновесия.

Вместо уравнений (1) и (2) будем иметь, учитывая (5):

$$a_1^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2 (y - y^0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega^2 y = -2\omega \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$a_2^2 p \frac{\partial^2}{\partial x^2} q \frac{\partial^2 (z - z^0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \omega^2 z = 2\omega \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Поступая, как и выше для круглого стержня, при $\omega = \omega_n$ вместо уравнений (12) получим:

$$-2\omega T'_{2,n} = T''_1 + d_1,$$

$$2\omega T'_{1,n} = T''_2 + d_2,$$

где d_1 и d_2 — постоянные, определяемые коэффициентами разложения y^0 и z^0 по фундаментальным функциям $X_n(x)$.

Отсюда видно, что теперь постоянные $C^{\mathrm{I}}_{3,n}$ и $C^{\mathrm{II}}_{3,n}$, входящие в выражения (25), в отличие от (31), вообще говоря, не будут равны нулю, поэтому колебания стержня не будут оставаться малыми.

Угловые скорости $\omega = \omega_n$ обычно и называются критическими.

5. Изложенное показывает, насколько различно поведение круглого вращающегося стержня и стержня, у которого поперечное сечение в отношении моментов инерции сколь угодно мало отличается от круглого, что и являлось нашей целью.

ON LATERAL VIBRATION OF A ROTATING BAR

A. SVETLOV
(Leningrad)

(Summary)

Some interesting results are obtained in this work, on the lateral vibration of various cross-section bars with different principle moments of inertia, rotating around their axis.

These results render possible the determination of the extent of difference of conduct of a circular rotating bar and of a bar, the cross-section of which, tn respect to inertia moments, is but slightly distinguishable from a circular bar.