АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences — Отделение технических наук
Section of Technical Mechanics — Группа технической механики

О ПРИВЕДЕНИИ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. И. НЕРОНОВ
(Ленинград)

Рассмотрим плоское безвихревое движение безграничной жидкости в присутствии неподвижного цилиндрического твердого тела. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, а скорость ее на бесконечно большом расстоянии от твердого тела постоянной по величине и направлению. Ограничимся случаем установившегося движения.

Задача может быть решена, исходя из предположения о существовании в жидкости поверхностей разрыва, при переходе через которые скорость меняется прерывно. С другой стороны, можно ограничиться изучением непрерывных движений жидкости.

Движения первого типа рассматривал Levi-Civita[1] в своем основном мемуаре „Scie e leggi di resistenza“, приведя задачу к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. Впоследствии Villat[2] привел задачу к разрешению одного уравнения.

В настоящей работе мы ограничиваемся изучением непрерывных движений жидкости. Этого типа задача в своей общей постановке была предметом исследования Н. И. Мусхелишвили.[3] Автор исходил из соотношения $z=\omega(\zeta)$, устанавливающего взаимно однозначное конформное преобразование области z, занятой жидкостью, на круг радиуса $|\zeta|=1$ (теорема Римана). Связав функцию $\omega(\zeta)$ с функцией $F(z)$, вещественная часть которой представляет потенциал скоростей, некоторым функциональным уравнением, он в видах упрощения решения задачи задает $\omega(\zeta)$ в форме той или другой рациональной функции

[1] Circolo Matematico di Palermo, t. I, p. 1, 1907.

[2] Annales de l'Ecole Normale supérieure, p. 284, 1911.

[3] Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei, vol. VII, p. 995, 1928.

и в ряде интересных частных примеров находит соответствующий этой форме контур цилиндрического тела.

В настоящей работе предлагается другой способ решения формулированной выше задачи.

§ **1.** Обозначим через z и w два комплексных переменных:

$$z = x + iy, \ w = \varphi + i\psi, \tag{1}$$

где x, y и φ, ψ суть прямоугольные декартовы координаты точек в плоскостях z и w.

Конформное преобразование (взаимно однозначное[1])

$$z = f(w), \tag{2}$$

устанавливая зависимость между z и w, дает в плоскости z движения жидкости две системы взаимно ортогональных кривых:

$$\varphi = \text{const}, \ \psi = \text{const}. \tag{3}$$

Последнюю из них условимся считать соответствующей линиям тока. Тогда функция φ будет представлять потенциал скоростей.

Пусть уравнение линии тока L, состоящей из двух бесконечных ветвей и контура цилиндра A (фиг. 1), будет:

$$\psi = 0. \tag{4}$$

Наконец, обозначим через a точку обтекаемого контура, в которой частица жидкости, описывающая траекторию L, вступает с ним в соприкосновение и через b точку, где она покидает контур (фиг. 1).

Кривым (3) соответствуют на плоскости w прямые параллельные координатным осям, в частности линии тока L соответствует ось абсцисс. Пусть точкам a и b соответствуют расположенные на оси абсцисс точки α (начало координат) и β (фиг. 1), для которых имеем соответственно:

$$w = 0, \ w = w_0. \tag{5}$$

В результате нашего преобразования контур цилиндра отображается на плоскости w в прямолинейный отрезок $\alpha\beta$ оси абсцисс, который мы будем рассматривать как сплющенный контур, различая у него верхнюю и нижнюю стороны. Пусть верхней стороне отрезка $\alpha\beta$ соответствует верхняя часть обтекаемого контура на плоскости z и, наоборот, нижней стороне — нижняя часть контура цилиндра.

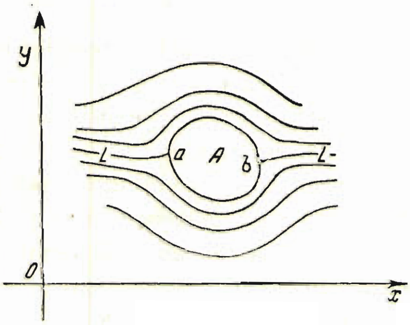
Итак, нашей задачей является взаимно однозначное отображение внешней по отношению к контуру цилиндра области z на внешнюю по отношению к отрезку $\alpha\beta$ область w, другими словами, нахождение однозначной аналитической функции $f(w)$, осуществляющей конформное преобразование (2).

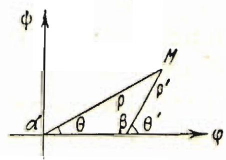
[1] Следуя Н. Е. Жуковскому, можно не ограничиваться взаимно однозначным конформным преобразованием и рассматривать также задачи с многозначным потенциалом скоростей.

При решении поставленной задачи мы считаем заданным параметрическое уравнение обтекаемого контура, который предполагается простым.

В общем случае мы будем считать, что верхняя и нижняя стороны контура представляют различные кривые, которым соответствуют различные уравнения.

Наше предположение о непрерывности движения жидкости, а также предположение о том, что точки сопряжения упомянутых выше кривых являются в то же время соответственно точками: одна — разделения линии тока L на две части и другая — их последующего слияния, ограничивают произвол в ориентации обтекаемого контура, связывая последнюю со скоростью жидкости в бесконечно удаленных точках. В противном случае может быть нарушено требо-





Фиг. 1.

вание конечного, отличного от нуля значения модуля производной $\frac{dz}{dw}$ внутри области, занятой жидкостью.

Пусть параметрическое уравнение верхней стороны контура имеет вид:

$$x = \Phi_1(p), \quad y = \Psi_1(p). \tag{6}$$

При монотонном изменении параметра p в интервале

$$p_1 \leqslant p \leqslant p_2$$

точка $N(x, y)$ пробегает один раз в положительном направлении указанную часть контура. Аналогичное обстоятельство имеет место для нижней части обтекаемого контура, уравнение которой представим в виде:

$$x = \Phi_2(q), \quad y = \Psi_2(q), \tag{7}$$

где параметр q изменяется в пределах

$$q_1 \leqslant q \leqslant q_2.$$

В точках a и b или соответствующих им точках α и β параметр p принимает соответственно значения p_1 и p_2. Точно так же обозначим q_1 и q_2 значения параметра q соответственно в точках b и a или им соответствующих β и α. Очевидно, мы имеем следующие соотношения:

$$\Phi_1(p_1) = \Phi_2(q_2), \quad \Psi_1(p_1) = \Psi_2(q_2),$$
$$\Phi_1(p_2) = \Phi_2(q_1), \quad \Psi_1(p_2) = \Psi_2(q_1).$$

Возможен, конечно, более простой частный случай одного уравнения некоторой кривой, частями которой являются верхняя и нижняя стороны обтекаемого контура. В этом случае нужно положить:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi,\ \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi,\ p_2 = q_1,\ q_2 = p_3,$$

и параметрическое уравнение контура принимает вид:

$$x = \Phi(p),\ y = \Psi(p), \tag{8}$$

где

$$p_1 \leqslant p \leqslant p_3$$

и

$$\Phi(p_1) = \Phi(p_3),\ \Psi(p_1) = \Psi(p_3).$$

Предполагается, что в каждой точке контура существует определенная касательная, непрерывно изменяющаяся вместе с изменением положения точки на контуре, за исключением точек a и b, которые могут быть и угловыми.

Наконец, чтобы задача была вполне определенной, необходимо знать разложение функции $f(w)$ в области бесконечно удаленной точки. Эта точка является особенной точкой функции, именно, полюсом, что вытекает из общих свойств взаимно однозначного конформного отображения одной бесконечной области на другую, а также согласуется с характером движения жидкости в бесконечно удаленных точках. Действительно, как известно, модуль производной функции $f(w)$ связан со скоростью v жидкости в некоторой точке пространства соотношением:[1]

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1}{v}. \tag{9}$$

Кроме того, аргумент упомянутой производной дает направление скорости жидкости в той же точке. Поэтому, обозначив через v_x и v_y проекции скорости v на координатные оси, будем иметь:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v^2}(v_x + iv_y). \tag{10}$$

Принимая во внимание равенство (10), мы удовлетворим предыдущему условию относительно скорости жидкости на бесконечно большом расстоянии от твердого тела, если будем считать бесконечно удаленную точку полюсом первого порядка функции $f(w)$. Таким образом имеем следующее разложение для достаточно больших значений модуля $|w|$:

$$z = f(w) = \gamma_1 w + \gamma_0 + \frac{\gamma_{-1}}{w} + \frac{\gamma_{-2}}{w^2} + \ldots \tag{11}$$

Коэффициенты предыдущего ряда

$$\gamma_j = \gamma_j^{(1)} + i\gamma_j^{(2)}, \qquad j = 1, 0, -1, -2, \ldots \tag{12}$$

являются, вообще говоря, мнимыми количествами.

[1] Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 22 Vorl., § 1.

Коэффициент γ_1 связан со скоростью жидкости в бесконечно удаленных точках. Действительно, обозначим величину этой скорости через v_∞, а ее проекции на координатные оси соответственно через $v_{x\infty}$ и $v_{y\infty}$. Тогда, исходя из равенств (10), (11), (12), мы получаем для бесконечно удаленных точек:

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{|w|\to\infty}=\frac{1}{v_\infty^2}(v_{x\infty}+iv_{y\infty})=\gamma_1=\gamma_1^{(1)}+i\gamma_2^{(2)}. \tag{13}$$

Отсюда находим соотношения:

$$\gamma_1^{(1)}=\frac{v_{x\infty}}{v_\infty^2},\quad \gamma_1^{(2)}=\frac{v_{y\infty}}{v_\infty^2}. \tag{14}$$

Переходим теперь к особенным точкам функции $f(w)$ на конечном расстоянии. Поскольку $f(w)$ является однозначной аналитической функцией, такими точками могут быть только α и β. В самом деле, функция $f(w)$ по условию непрерывна на части плоскости w, внешней по отношению к отрезку $\alpha\beta$, и на самом отрезке, который мы условились рассматривать как сплющенный контур и на котором, как было указано ранее, мы различаем верхнюю и нижнюю стороны.[1] Кроме того, скорость жидкости, а значит, и модуль производной $\frac{dz}{dw}$ всюду имеют конечное, отличное от нуля, значение. В противном случае конформное отображение не было бы взаимно однозначным. Особенность могут представлять только точки α и β плоскости w или соответствующие им точки a и b плоскости z. Если в какой-либо из точек a и b обтекаемого контура скорость жидкости обращается в нуль, то на основании равенства (9) модуль производной $\frac{dz}{dw}$ в точке α или β обращается в бесконечность. В приведенных мной ранее примерах[2] точки α и β являлись точками разветвления функции $f(w)$. Там же мной разбирались случаи, когда точки a и b служат точками возврата контура цилиндра и скорость жидкости в них имеет конечное, отличное от нуля значение. То же самое можно сказать о значении модуля производной $\frac{dz}{dw}$ в точках α и β. Поэтому для обтекаемого контура с точками возврата (при условии непрерывности движения) в последних будет непрерывна не только функция $f(w)$, но и ее производная. Конечно, наши рассуждения предполагают непременным условием существование на плоскости w купюры, именно, отрезка $\alpha\beta$.

Резюмируя все сказанное выше, приходим к заключению, что особенными точками функции $f(w)$ на конечном расстоянии могут явиться только точки α и β. Однако функция $f(w)$ остается в этих точках однозначной и непрерывной.[3]

[1] Под непрерывностью функции на отрезке $\alpha\beta$ мы подразумеваем непрерывность ее в некоторой области, состоящей из точек той и другой сторон отрезка, а также смежных с ними точек плоскости w, внешних по отношению к отрезку.

[2] Московский математический сборник, т. XXXVIII, вып. 3—4, 1931. Comptes Rendus, t. 188, № 8, p. 544, 1929.

[3] Возможность обхода только одной из этих точек исключена благодаря существованию купюры.

Последнее замечание весьма существенно, так как позволяет нам в дальнейшем применить известную формулу Коши, дающую значения аналитической функции внутри некоторого контура, если известны ее значения на самом контуре.

Теперь можно определить радиус сходимости ряда (11), в который разлагается $f(w)$, если учесть равенство (5). Именно:

$$|w| > w_0. \tag{15}$$

Здесь следует подчеркнуть, что задание только величины и направления скорости жидкости в бесконечно удаленных точках недостаточно для характеристики движения жидкости в присутствии цилиндрического твердого тела.

§ **2.** Выделим на плоскости w двусвязную конечную область, ограниченную контуром отрезка $\alpha\beta$ и контуром Σ круга, описанного из начала координат произвольным радиусом R, значение которого удовлетворяет неравенству:

$$R > w_0.$$

Пусть будут $M(w)$, $N(w_\sigma)$, $P(w_\Sigma)$ точки, взятые соответственно внутри указанной выше области, на отрезке $\alpha\beta$ и на окружности. Тогда формула Коши дает:

$$z = x + iy = f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha\beta} \frac{f(w_\sigma)\,dw_\sigma}{w_\sigma - w} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{f(w_\Sigma)\,dw_\Sigma}{w_\Sigma - w}, \tag{16}$$

где оба интеграла взяты в положительном направлении. Пользуясь разложением (11) функции $f(w_\Sigma)$ в равномерно сходящийся ряд на основании условия

$$|w_\Sigma| > w_0,$$

вычисляем второй интеграл. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{f(w_\Sigma)\,dw_\Sigma}{w_\Sigma - w} = \gamma_1 w + \gamma_0, \tag{17}$$

где значение коэффициента γ_1, зависящего от величины и направления скорости жидкости в бесконечно удаленных точках, дается равенствами (13) и (14).

После этого равенство (16) переписывается в следующем виде:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha\beta} \frac{f(w_\sigma)\,dw_\sigma}{w_\sigma - w} + \gamma_1 w + \gamma_0. \tag{18}$$

Далее для точек отрезка $\alpha\beta$ в силу равенства

$$w = \varphi + i\psi$$

можно написать:

$$\psi_\sigma = 0, \quad w_\sigma = \varphi_\sigma = \sigma. \tag{19}$$

Наконец, для тех же точек имеем:

$$f(w_\sigma) = z_\sigma = x_\sigma + iy_\sigma = \Phi_1(p) + i\Psi_1(p), \tag{20}$$

если точки берутся на верхней стороне отрезка и

$$f(w_\sigma) = \Phi_2(q) + i\Psi_2(q), \tag{21}$$

если они берутся на нижней стороне, где функции $\Phi_1(p)$, $\Psi_1(p)$, $\Phi_2(q)$, $\Psi_2(q)$ даны.

Теперь равенство (18) принимает вид:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(p) + i\Psi_1(p)}{\sigma - w}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{\Phi_2(q) + i\Psi_2(q)}{\sigma - w}\, d\sigma + \gamma_1 w + \gamma_0. \tag{22}$$

В первом интеграле правой части предыдущего равенства нужно рассматривать σ как неизвестную, монотонно возрастающую функцию параметра p, которую мы обозначим через $\sigma_1(p)$.

На основании аналогичных соображений мы заменим σ во втором интеграле через $\sigma_2(q)$. После указанной замены равенство (22) переписывается следующим образом:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(p) + i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p) - w}\, d\sigma_1(p) + \int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{\Phi_2(q) + i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q) - w}\, d\sigma_2(q) + \gamma_1 w + \gamma_0. \tag{23}$$

Замена переменной в первом интеграле дает:

$$d\sigma_1(p) = \frac{d\sigma_1(p)}{dp}\, dp$$

и аналогично во втором:

$$d\sigma_2(q) = \frac{d\sigma_2(q)}{dq}\, dq,$$

предполагая существование и интегрируемость производных $\dfrac{d\sigma_1(p)}{dp}$ и $\dfrac{d\sigma_2(q)}{dq}$.

Переходим теперь к основному вопросу об определении неизвестных функций $\sigma_1(p)$ и $\sigma_2(q)$. С этой целью мы обращаемся к равенству (23), в котором точка $M(w)$ предполагается взятой внутри области, ограниченной контурами $\alpha\beta$ и Σ. Будем неограниченно приближать ее к некоторой произвольной точке Q контура $\alpha\beta$, в которой совпадают точка Q_1, относящаяся к верхней стороне контура, и точка Q_2, принадлежащая его нижней стороне. Обозначим значения параметров p и q в точке Q соответственно через λ и μ. Имеем:

$$\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\mu), \quad p_1 \leqslant \lambda \leqslant p_2, \; q_1 \leqslant \mu \leqslant q_2. \tag{24}$$

Если $M \to Q_1$, $w \to \sigma_1(\lambda)$, то равенство (23) принимает вид:

$$\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(p) + i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p) - w}\, d\sigma_1(p)\Bigg|_{w \to \sigma_1(\lambda)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{\Phi_2(q) + i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q) - w}\, d\sigma_2(q)\Bigg|_{w \to \sigma_1(\lambda)} + \gamma_1 \sigma_1(\lambda) + \gamma_0. \tag{25}$$

Если же $M \to Q_2$, $w \to \sigma_2(\mu)$, то предыдущее равенство заменяется следующим:

$$\Phi_2(\mu) + i\Psi_2(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(p) + i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p) - w}\, d\sigma_1(p)\Bigg|_{w \to \sigma_2(\mu)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2} \frac{\Phi_2(q) + i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q) - w}\, d\sigma_2(q)\Bigg|_{w \to \sigma_2(\mu)} + \gamma_1\,\sigma_2(\mu) + \gamma_0. \tag{26}$$

Нам предстоит теперь совершить в равенствах (25) и (26) переход к пределу. Займемся сначала равенством (25). Входящие в него интегралы при подстановке $w = \sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\mu)$ представляют особенность, так как их дифференциальные элементы делаются бесконечно большими по модулю в точках $p = \lambda$, $q = \mu$. Поэтому переход к пределу требует предварительного преобразования указанных интегралов. С этой целью рассмотрим сначала некоторый новый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p) - w}\, d\sigma_1(p) = \frac{\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2} \frac{d\sigma_1(p)}{\sigma_1(p) - w} =$$

$$= \frac{\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\log\left[\sigma_1(p) - w\right]\Big|_{p_1}^{p_2},$$

где точка $M(w)$ предполагается внешней по отношению к отрезку $\alpha\beta$. Обозначая через r и δ соответственно модуль и аргумент комплексного количества $\sigma(p) - w$, т. е.

$$\sigma(p) - w = re^{\delta i},$$

без труда получаем:

$$\log\left[\sigma_1(p) - w\right]\Big|_{p_1}^{p_2} = \log\frac{r_2}{r_1} + i(\delta_2 - \delta_1),$$

где взято вещественное значение входящего сюда логарифма и введены обозначения:

$$r_1 = r\big|_{p=p_1}, \qquad r_2 = r\big|_{p=p_2}, \qquad \delta_1 = \delta\big|_{p=p_1}, \qquad \delta_2 = \delta\big|_{p=p_2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2} \frac{\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p) - w}\, d\sigma_1(p) = \frac{\Phi_1(\lambda) + i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\left[\log\frac{r_2}{r_1} + i(\delta_2 - \delta_1)\right]. \tag{27}$$

Рассуждения, подобные предыдущим, позволяют найти также другой интеграл аналогичного вида:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2} \frac{\Phi_2(\mu) + i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q) - w}\, d\sigma_2(q) = \frac{\Phi_2(\mu) + i\Psi_2(\mu)}{2\pi i}\left[\log\frac{r_1}{r_2} + i(\delta_1 - \delta_2)\right], \tag{28}$$

где сохранены прежние обозначения.

При помощи введенных нами вспомогательных интегралов (27) и (28) можно следующим образом преобразовать интегралы, фигурирующие в правой части равенства (25):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p)-w}\,d\sigma_1(p) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)-\Phi_1(\lambda)-i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-w}\,d\sigma_1(p)+\\
&+\frac{\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\left[\log\frac{r_2}{r_1}+i(\delta_2-\delta_1)\right],\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q)-w}\,d\sigma_2(q) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-w}\,d\sigma_2(q)+\\
&+\frac{\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)}{2\pi i}\left[\log\frac{r_1}{r_2}+i(\delta_1-\delta_2)\right].
\end{aligned}\tag{29}$$

В результате такого преобразования после подстановки $w=\sigma_1(\lambda)=\sigma_2(\mu)$ дифференциальные элементы написанных выше интегралов будут представлять в точках $p=\lambda$, $q=\mu$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В дальнейшем мы ограничимся изучением случая, когда эта неопределенность оказывается в действительности конечным числом.[1] Например, предполагая существование и непрерывность в соответствующих интервалах производных функций $\Phi_1(p)$, $\Psi_1(p)$, $\Phi_2(q)$, $\Psi_2(q)$, $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\mu)$, можно утверждать, что вычисление этой неопределенности дает $\frac{\Phi_1'(\lambda)+i\Psi_1'(\lambda)}{\sigma_1'(\lambda)}$ в одном случае и соответственно $\frac{\Phi_2'(\mu)+i\Psi_2'(\mu)}{\sigma_2'(\mu)}$ в другом сохраняя обычное обозначение производных при помощи штрихов и предполагая, что

$$\sigma_1'(\lambda)\neq 0,\quad \sigma_2'(\mu)\neq 0$$

внутри интервалов

$$p_1<\lambda<p_2,\quad q_1<\mu<q_2.$$

В разбираемых ниже примерах указанные условия как раз выполнены. Во всех подобных случаях интегралы, входящие в правые части равенств (29), остаются непрерывными в окрестности точки

$$w=\sigma_1(\lambda)=\sigma_2(\mu)$$

контура $\alpha\beta$, и мы можем совершить предельный переход.[2] Заметим еще следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned}
r_1\big|_{w=\sigma_1(\lambda)} &= \sigma_1(\lambda), & r_2\big|_{w=\sigma_1(\lambda)} &= w_0-\sigma_1(\lambda),\\
\delta_1\big|_{w=\sigma_1(\lambda)} &= \pi, & \delta_2\big|_{w=\sigma_1(\lambda)} &= 2\pi.
\end{aligned}\tag{30}$$

[1] Условия Lipschitz или Hölder позволили бы обобщить решение.

[2] См. выноску на стр. 381.

После всех этих замечаний переход к пределу $w \to \sigma_1(\lambda)$ в равенствах (29) не представляет никакого труда, и мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p)-w}\,d\sigma_1(p)\Bigg|_{w\to\sigma_1(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)-\Phi_1(\lambda)-i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)+$$
$$+\frac{\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\left[\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\pi i\right],$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q)-w}\,d\sigma_2(q)\Bigg|_{w\to\sigma_1(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)+$$
$$+\frac{\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)}{2\pi i}\left[\log\frac{\sigma_1(\lambda)}{w_0-\sigma_1(\lambda)}-\pi i\right]. \tag{31}$$

Наконец, подстановка в равенство (25) дает:

$$\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)-\Phi_1(\lambda)-i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)+$$
$$+\frac{\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\left[\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\pi i\right]+$$
$$+\frac{\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)}{2\pi i}\left[\log\frac{\sigma_1(\lambda)}{w_0-\sigma_1(\lambda)}-\pi i\right]+\gamma_1\sigma_1(\lambda)+\gamma_0. \tag{32}$$

Соображения, аналогичные предыдущим, позволяют также совершить предельный переход в равенстве (26). Именно:

$$\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)-\Phi_1(\lambda)-i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)+$$
$$+\frac{\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)}{2\pi i}\left[\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}-\pi i\right]+$$
$$+\frac{\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)}{2\pi i}\left[\log\frac{\sigma_1(\lambda)}{w_0-\sigma_1(\lambda)}+\pi i\right]+\gamma_1\sigma_1(\lambda)+\gamma_0. \tag{33}$$

После упрощений равенства (32) и (33) дают один и тот же результат:

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)+\Phi_2(\mu)+i\Psi_2(\mu)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_2(p)-\Phi_1(\lambda)-i\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)+ \tag{34}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left[\Phi_1(\lambda)+i\Psi_1(\lambda)-\Phi_2(\mu)-i\Psi_2(\mu)\right]\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\gamma_1\sigma_1(\lambda)+\gamma_0.$$

Остается еще отделить в равенстве (34) вещественную и мнимую части, принимая во внимание выражения (12) для коэффициентов γ_1 и γ_0. Находим:

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_1(\lambda)+\Phi_2(\mu)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Psi_1(p)-\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)+\frac{1}{2\pi}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Psi_2(q)-\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left[\Psi_1(\lambda)-\Psi_2(\mu)\right]\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\gamma_1^{(1)}\sigma_1(\lambda)+\gamma_0^{(1)}, \tag{35}$$
$$\frac{1}{2}\left[\Psi_1(\lambda)+\Psi_2(\mu)\right]=-\frac{1}{2\pi}\int_{p_1}^{p^2}\frac{\Phi_1(p)-\Phi_1(\lambda)}{\sigma_1(p)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(p)-\frac{1}{2\pi}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)-\Phi_2(\mu)}{\sigma_2(q)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(q)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\left[\Phi_1(\lambda)-\Phi_2^*(\mu)\right]\log\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\gamma_0^{(2)}\sigma_1(\lambda)+\gamma_0^{(2)}.$$

Присоединяем к написанной выше системе двух функциональных уравнений типа интегро-дифференциальных также уравнение (24). Полученная нами система уравнений определяет три неизвестных функции: $\sigma_1(\lambda)$ в интервале $p_1\leqslant\lambda\leqslant p_2$, $\sigma_2(\mu)$ в интервале $q_1\leqslant\mu\leqslant q_2$, а также функцию μ, $\mu=\mu(\lambda)$.

Неопределенные постоянные, входящие в выражения для $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\mu)$, могут быть найдены при помощи условий:

$$\sigma_1(\lambda)\big|_{\lambda=p_1}=0,\quad \sigma_1(\lambda)\big|_{\lambda=p_2}=w_0,\quad \sigma_2(\mu)\big|_{\mu=q_1}=w_0,\quad \sigma_2(\mu)\big|_{\mu=q_2}=0. \tag{36}$$

Найдя σ_1 и σ_2, получаем выражение для функции $f(w)$, осуществляющей требуемое конформное преобразование путем соответствующей подстановки в уравнение (23) и выполнения квадратур.

Наконец, производная

$$\frac{dz}{dw}=\frac{d}{dw}f(w)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)}{[\sigma_1(p)-w]^2}\,d\sigma_1(p)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)}{[\sigma_2(q)-w]^2}\,d\sigma_2(q)+\gamma_1 \tag{37}$$

позволит изучить получающееся поле скоростей.

Во всем предыдущем положение точек a и b на плоскости z, а значит, и соответствующие значения p_1, p_2, q_1, q_2 параметров p и q считались известными. В некоторых случаях решение поставленной задачи, сохраняя в основном свой характер, несколько видоизменяется.

Рассмотрим сначала случай, когда обтекаемый контур представляет одну кривую с непрерывно изменяющейся касательной, так что положение точек a и b остается неизвестным. Тогда, как было отмечено ранее:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi, \ \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi, \ p_2 = q_1, \ q_2 = p_3.$$

При этом p_1 и p_2 считаются искомыми величинами, а p_3, удовлетворяя условиям

$$\Phi(p_1) = \Phi(p_3), \quad \Psi(p_1) = \Psi(p_3),$$

является данной функцией p_1. Очевидно, мы имеем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Система уравнений (35) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}[\Phi(\lambda)+\Phi(\mu)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Psi(p)-\Psi(\lambda)}{\sigma(p)-\sigma(\lambda)}\,d\sigma(p) + \frac{1}{2\pi}\int_{p_2}^{p_3}\frac{\Psi(p)-\Psi(\mu)}{\sigma(p)-\sigma(\mu)}\,d\sigma(p) + \\ &+ \frac{1}{2\pi}[\Psi(\lambda)-\Psi(\mu)]\log\frac{w_0-\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} + \gamma_1^{(1)}\sigma(\lambda) + \gamma_0^{(1)}, \\ \frac{1}{2\pi}[\Psi(\lambda)+\Psi(\mu)] &= -\frac{1}{2\pi}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi(p)-\Phi(\lambda)}{\sigma(p)-\sigma(\lambda)}\,d\sigma(p) - \frac{1}{2\pi}\int_{p_2}^{p_3}\frac{\Phi(p)-\Phi(\mu)}{\sigma(p)-\sigma(\mu)}\,d\sigma(p) - \\ &- \frac{1}{2\pi}[\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)]\log\frac{w_0-\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} + \gamma_1^{(2)}\sigma(\lambda) + \gamma_0^{(2)}, \end{aligned} \tag{38}$$

где значения λ и μ связаны уравнением:

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\mu). \tag{39}$$

Система уравнений (38) и (39) содержит четыре неизвестных σ, μ, p_1, p_2. Недостающее для их определения уравнение имеет вид:

$$\left.\frac{d\sigma(\lambda)}{d\lambda}\right|_{p=p_2} = 0, \tag{40}$$

если сделать естественное предположение о непрерывности производной функции $\sigma(\lambda)$ в точке $\lambda = p_2$. Равенство, аналогичное предыдущему, можно было бы написать и для точки $\lambda = p_1$, а также для $\lambda = p_3$.

Отметим еще случай симметричных движений жидкости. Такого рода симметрия требует, во-первых, симметрии обтекаемого контура относительно некоторой оси и, во-вторых, определенной ориентации его относительно направления скорости жидкости в бесконечно удаленных точках, именно это направление должно быть параллельным оси симметрии контура. Примем последнюю за ось абсцисс на плоскости z.

Тогда на основании соображений симметрии можно всегда принять:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi,\ \Psi_1 = -\Psi_2 = \Psi,\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma,\ p = q,\ p_1 = q_2,\ p_2 = q_1,$$
$$\lambda = \mu,\ \gamma_1^{(2)} = 0,\ \gamma_0^{(2)} = 0.$$

Далее мы убеждаемся, что в разбираемом случае второе из системы уравнений (35) обращается в тождество, а первое принимает вид:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{p_1}^{p_2} \frac{\Psi(p) - \Psi(\lambda)}{\sigma(p) - \sigma(\lambda)}\, d\sigma(p) + \frac{1}{\pi}\Psi(\lambda)\log\frac{w_0 - \sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} + \gamma_1^{(1)}\sigma(\lambda) + \gamma_0^{(1)}. \tag{41}$$

Полученное функциональное уравнение определяет $\sigma(\lambda)$ в интервале $p_1 \leqslant \lambda \leqslant p_2$. Имея в виду упростить решение поставленной задачи, можно ее обратить, задавшись значением σ и считая функцию Φ известной в том же интервале. Тогда уравнение (41) будет интегральным по отношению к Ψ. Еще проще задаться функциями Ψ и σ, так как после этого Φ найдется из уравнения (41) при помощи квадратуры.

Системе уравнений (35) можно придать другой вид. Действительно, возвратимся к первоначальному переменному σ, полагая:

$$\sigma_1(p) = \sigma_2(q) = \sigma,\ \sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\mu) = s \tag{42}$$

и принимая во внимание равенства:

$$\sigma_1(p_1) = \sigma_2(q_2) = 0,\ \sigma_1(p_2) = \sigma_2(q_1) = w_0.$$

Уравнения (35) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\Phi_1(\lambda) + \Phi_1(\mu)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{w_0} \frac{\Psi_1(p) - \Psi_2(q) - \Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu)}{\sigma - s}\, d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2\pi}[\Psi_1(\lambda) - \Psi_2(\mu)]\log\frac{w_0 - s}{s} + \gamma_1^{(1)} s + \gamma_0^{(1)}, \\ \frac{1}{2}[\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu)] &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{w_0} \frac{\Phi_1(p) - \Phi_2(q) - \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\mu)}{\sigma - s}\, d\sigma - \\ &- \frac{1}{2\pi}[\Phi_1(\lambda) - \Phi_2(\mu)]\log\frac{w_0 - s}{s} + \gamma_1^{(2)} s + \gamma_0^{(2)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Эта система нелинейных интегральных уравнений определяет λ и μ как функции переменного s в интервале $0 \leqslant s \leqslant w_0$.

Неопределенные постоянные, входящие в выражения для λ и μ, должны удовлетворять условиям:

$$\lambda|_{s=0} = p_1,\ \lambda|_{s=w_0} = p_2,\ \mu|_{s=0} = q_2,\ \mu|_{s=w_0} = q_1. \tag{44}$$

Уравнения (33) и (41) предыдущих двух случаев соответствующим образом видоизменяются.

§ **3.** Решение относительно $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\mu)$ системы (35) интегро-дифференциальных уравнений или ей эквивалентных, указанных в предыдущем параграфе, вообще говоря, не представляет легкой задачи, особенно если не ограничиваться теоремой существования, а искать решение, пригодное в смысле простоты вычислений для практических приложений. В некоторых случаях дает известные результаты обращение задачи, о котором там же упоминалось.

Следующее обстоятельство позволяет в неограниченном числе случаев указать решение уравнений (35). Мной[1] была указана форма функции $f(w)$, дающая обтекание алгебраического контура произвольно высокого порядка n, правда, не самого общего вида, т. е. зависящего при $n<2$ от меньшего числа произвольных параметров по сравнению с самой общей алгебраической кривой порядка n. Во всех этих случаях искомые функции могут быть указаны непосредственно и, следовательно, решение уравнений (35) оказывается известным. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем, применяя наши рассуждения к двум разбираемым ниже случаям.

Сделаем еще следующее замечание. После того как функции $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\mu)$ определены из уравнений (35), для нахождения функции $f(w)$ нужно выполнить квадратуру в равенстве (23). Далее можно найти параметрическое уравнение той или другой из бесконечных ветвей линии тока L. Для этого нужно обратиться к найденному выражению функции $f(w)$ или исходить из равенства (23). Положим в последнем:

$$\psi=0,\ w=\varphi,$$

после чего оно переписывается в виде:

$$x+iy=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)+i\Psi_1(p)}{\sigma_1(p)-\varphi}\,d\sigma_1(p)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)+i\Psi_2(q)}{\sigma_2(q)-\varphi}\,d\sigma_2(q)+\gamma_1\varphi+\gamma_0, \tag{45}$$

где для правой ветви

$$\varphi\geqslant w_0$$

и аналогично для левой

$$\varphi\leqslant 0.$$

Отделяя в равенстве (45) вещественную и чисто мнимую части и выполняя квадратуры (функции $\sigma_1(p)$ и $\sigma_2(q)$ считаются найденными), получим координаты x и y как функции параметра φ, т. е. искомое параметрическое уравнение. Будем иметь:

$$\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{\Psi_1(p)\,d\sigma_1(p)}{\sigma_1(p)-\varphi}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{q_1}^{q_2}\frac{\Psi_2(q)\,d\sigma_2(q)}{\sigma_2(q)-\varphi}+\gamma_1^{(1)}\varphi+\gamma_0^{(1)},\\
y&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{\Phi_1(p)\,d\sigma_1(p)}{\sigma_1(p)-\varphi}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{q_1}^{q_2}\frac{\Phi_2(q)\,d\sigma_2(q)}{\sigma_2(q)-\varphi}+\gamma_1^{(2)}\varphi+\gamma_0^{(2)}.
\end{aligned}\tag{46}$$

---

[1] Московский математический сборник, l. c.; Comptes Rendus, l. c.; Известия Госуд. гидролог. института, № 29, 1930.

Переходим к разбору следующих двух случаев.

1-й случай — круговой контур.

Ось x в плоскости z расположена параллельно направлению скорости жидкости в бесконечно удаленных точках и проходит через центр круга. Таким образом из соображений симметрии положение точек $a\,(z=0)$ и $b\,(z=g)$, лежащих на оси абсцисс, заранее известно. Пусть уравнение контура задано в следующей параметрической форме:

$$x=\Phi(p)=g\sin^2 p,\;\; y=\Psi(p)=g\sin p\cos p,$$

где параметр p изменяется в пределах

$$0\leqslant p\leqslant\pi$$

при обходе всей окружности в положительном направлении.

Функция $f(w)$ имеет вид:[1]

$$z=f(w)=cw+cw^{\frac{1}{2}}(w-w_0)^{\frac{1}{2}},$$

где $c=\frac{1}{2v_\infty}$, $w_0=2gv_\infty$ и введено соответствующее условие о выборе определенной ветви, фигурирующей в предыдущем равенстве многозначной функции.

Функция $\sigma(p)$ имеет следующий вид:

$$\sigma(p)=w_0\sin^2 p,\;\; p_1=0,\;\; p_2=\frac{\pi}{2},\;\; p_3=\pi.$$

Значение коэффициентов γ_1 и γ_0:

$$\gamma_1=\frac{1}{v_\infty}=2c,\quad \gamma_0=-\frac{g}{2}.$$

Легко убеждаемся, что подстановка значения функции $\sigma(p)$ обращает уравнения (38) или уравнение (41) в тождество.

Для поверки полученных результатов найдем еще параметрическое уравнение правой бесконечной ветви линии тока $L\;(\varphi\geqslant w_0)$, внося в равенства (46) известные значения функций $\Phi(p)$, $\Psi(p)$, $\sigma(p)$:

$$x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{g\sin p\cos p}{w_0\sin^2 p-\varphi}\,d\,(w_0\sin^2 p)+\gamma_1\varphi+\gamma_0,$$

$$y=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{g\sin^2 p}{w_0\sin^2 p-\varphi}\,d\,(w_0\sin^2 p).$$

Выполняем входящие сюда квадратуры:

$$x=c\varphi+c\varphi^{\frac{1}{2}}(\varphi-w_0)^{\frac{1}{2}},\;\; y=0.$$

---

[1] Messenger of Mathematics, vol. LVIII, № 8, 1928.

Тот же результат получается непосредственно из приведенной выше формулы для $f(w)$, если на плоскости w ввести полярные координаты ρ и θ, положив для верхней полуплоскости (фиг. 1):

$$w=\rho e^{\theta i}, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$
$$w-w_0=\rho' e^{\theta' i}, \qquad 0\leqslant\theta'\leqslant\pi.$$

Для точек рассматриваемой ветви линии тока L:

$$\theta=\theta'=0, \quad w=\rho=\varphi, \quad w-w_0=\varphi-w_0.$$

Подстановка в формулу для $f(w)$ и отдаление вещественной и мнимой части дают прежнее параметрическое уравнение правой ветви линии тока L.

2-й случай — эллиптический контур.

Пусть данный эллиптический контур расположен произвольно относительно потока жидкости. Поместив начало координат в одной из точек контура и проведя ось абсцисс через центр эллипса, мы получаем возможность написать его уравнение в следующей параметрической форме:

$$x=\Phi(p)=g_1\sin^2 p+g_2\sin p\cos p, \quad y=\Psi(p)=g_3\sin p\cos p,$$

где

$$0\leqslant p\leqslant\pi$$

при обходе всего эллипса в положительном направлении.

Выражение для функции $f(w)$ принимает вид:[1]

$$z=c_1 w+c_2 w^{\frac{1}{2}}(w-w_0)^{\frac{1}{2}},$$

где коэффициент c_1 имеет вещественное, а коэффициент c_2 мнимое значение:

$$c_1=a_1, \; c_2=a_2+ib_2.$$

Значения a_1, a_2, b_2, w_0, v_∞ определяются системой пяти уравнений:

$$a_1+a_2=\frac{v_{x\infty}}{v^2_\infty}, \quad b_2=\frac{v_{y\infty}}{v^2_\infty},$$

$$a_1 w_0=g_1, \quad -b_2 w_0=g_2, \quad a_2 w_0=g_3,$$

если считать известными коэффициентами g_1, g_2, g_3, а также направление скорости жидкости в бесконечно удаленных точках.

Рассуждение можно вести несколько иначе. Поскольку эллиптический контур дан, то известны длины его большой и малой осей. Поэтому коэффициенты g_1, g_2, g_3 нужно рассматривать как известные функции некоторого параметра ν. Написанная выше система пяти уравнений позволяет определить a_1, a_2, b_2, w_0, ν.

[1] Comptes Rendus, l. c.

Коэффициенты γ_1 и γ_0 оказываются следующими:

$$\gamma_1 = c_1 + c_2, \quad \gamma_0 = -\frac{c_2 w_0}{2}.$$

Точки $a(z=0)$ и $b(z=g_1)$ расположены на оси абсцисс.

Функция $\sigma(p)$ имеет тот же вид, что и в предыдущем примере, т. е.

$$\sigma(p) = w_0 \sin^2 p, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{\pi}{2}, \quad p_3 = \pi.$$

SUR LA RÉDUCTION D'UN PROBLÈME PLAN D'HYDRODYNAMIQUE À LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

N. NERONOFF

(Leningrad)

(Résumé)

Examinons un mouvement irrotationnel à deux dimensions d'un liquide indéfini en présence d'un solide cylindrique fixe. Supposons que le liquide est parfait et incompressible. A l'infini, sa vitesse est constante en valeur et en direction. Nous nous bornons au cas du mouvement permanent.

Le problème dont nous nous occupons dans cette note peut être résolu en supposant l'existence dans le liquide de quelques surfaces de discontinuité, la vitesse étant discontinue à travers l'une de ces surfaces. D'autre part, on peut se restreindre à l'étude des mouvements continus du liquide.

Les mouvements du premier genre ont été considérés par M. Levi-Civita dans son mémoire[1] „Scie e leggi di resistenza", où le problème est réduit à la résolution d'un système de deux équations intégro-différentielles à deux fonctions inconnues. Ensuite M. Villat l'a ramené à une équation unique.

Dans le présent article, nous nous bornons à l'examen des mouvements du liquide du second genre (mouvements continus). Ce problème, dans sa forme générale a été l'object des recherches de M. Mouskhelichvili.[3] Le point de départ de cet auteur est la relation $z = \omega(\zeta)$, à l'aide de laquelle on effectue la transformation conforme et biunivoque de la région z du mouvement du liquide sur un cercle dans le plan ζ (théorème de Riemann). Soit $F(z)$ la fonction dont la partie réelle représente le potentiel des vitesses. Les fonctions $\omega(\zeta)$ et $F(z)$ étant liées par une équation fonctionnelle, M. Mouskhelichvili admet que $\omega(z)$ est une fonction rationnelle, et trouve le contour correspondant du solide cylindrique pour quelques cas particuliers intéressants.

[1] Circolo Matematico di Palermo, t. I, p. 1, 1907.

[2] Annales de l'École normale supérieure, p. 284, 1911.

[3] Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei, vol. VII, p. 995, 1928.

Dans le présent article nous proposons une autre méthode de résolution du problème en question. Notamment nous le réduisons à la résolution du système (35) de deux équations fonctionnelles du genre intégro-différentiel ou à la résolution du système (43) d'equations intégrales équivalant au premier. Pour quelques contours ces équations prennent la forme (38) et (41).

On peut montrer la solution des équations (35) pour un nombre illimité de cas particuliers correspondants au contour algébrique du cylindre d'ordre n arbitrairement grand. Cela devient possible parce que ces cas ont été étudiés par moi dans les travails antérieurs à l'aide d'une transformation conforme spéciale.[1] Il faut remarquer que la courbe algébrique ci dessus dépend pour $n > 2$ de paramètres arbitraires d'un nombre moindre en comparaison d'une courbe algébrique d'ordre n dans le cas général.

Enfin nous examinons deux exemples: les contours circulaire et elliptique.

---

[1] Comptes rendus, t. 188, № 8, p. 544, 1929; R. Accademia Naz. dei Lincei, Memorie, ser. VI, vol. V, Fasc. VII; Bulletin de l'Institut Hydrologique, № 29, 1930 (en russe).