

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ,
СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ДВУХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ**

А. П. ЛУРЬЕ и А. И. ЧЕКМАРЕВ

(Ленинград)

В этой работе дается приближенное решение задачи о колебаниях системы, схематически изображенной на фиг. 1, возникающих под действием синусоидальной возмущающей силы заданной частоты ω . Мы рассматриваем при этом лишь периодические движения, имеющие ту же частоту ω и не сдвинутые по фазе относительно силы („вынужденные колебания“). Другое решение этой задачи, которое для некоторых начальных условий специального вида может быть рассматриваемо как точное, опубликовано в конце 1936 г. Ден-Гартогом и Гельсом.¹

Чтобы довести это решение до численных результатов, представленных в виде графиков нескольких семейств кривых, авторам, повидимому, пришлось провести громадную вычислительную работу. Приводимое ниже приближенное решение уже в первом приближении дает в пределах точности построения графиков полностью все результаты Ден-Гартога и Гельса, причем для получения четырех графиков фиг. 3—6 потребовалась затрата двух рабочих дней. Прекрасное совпадение точного и приближенного решений в простейшем случае одной степени свободы позволяет предположить, что применяемый нами метод должен принести хорошие результаты для более сложных систем с несколькими степенями свободы при наличии нелинейной характеристики сил упругости того же типа между двумя массами, входящими в систему. Этой задаче посвящен § 2 настоящей работы. Точное решение методом

¹ J. P. Den Hartog and R. M. Heiles. Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs. Journ. of Appl. Mech., vol. 3, № 4, p 126—130, December 1936.

Ден-Гартога и Гельса было бы в этом случае чрезвычайно громоздким. Наконец, в § 3 мы возвращаемся снова к случаю одной степени свободы, но даем решение задачи о вынужденных колебаниях уже с учетом силы сопротивления, линейно зависящей от скорости.

Метод, который мы применяем ниже для приближенного решения задач о нелинейных колебаниях, представляет не что иное, как метод акад. Б. Г. Галеркина, нашедший столь плодотворные и многочисленные применения в ряде задач теории упругости и теории колебаний. Сущность этого метода состоит в следующем: пусть требуется разыскать решения уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

удовлетворяющие условиям:

$$q_i(t_0) = q_i\left(t_0 + \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i\left(t_0 + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

К этим уравнениям можно прийти, потребовав, чтобы интеграл

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i dt \quad (2)$$

обращался в нуль при любых δq_i , удовлетворяющих условиям периодичности

$$\delta q_i(t) = \delta q_i\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad \delta \dot{q}_i(t) = \delta \dot{q}_i\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

Это требование, как легко показать, эквивалентно принципу Гамильтона:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \left(\delta T + \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \right) dt = 0$$

с тем видоизменением, что за движения, сравниваемые с искомым периодическим движением, принимаются также периодические движения того же периода.

Чтобы приближенно удовлетворить условию (2), полагаем

$$q_i = \sum_{k=1}^r a_i^{(k)} \varphi_{i,k}(t), \quad \left[\varphi_{i,k}(t) = \varphi_{i,k}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \right], \quad (3)$$

т. е. ищем решение в виде линейной комбинации конечного числа периодических функций, имеющих период $\frac{2\pi}{\omega}$, с неопределенными коэффициентами $a_i^{(k)}$.

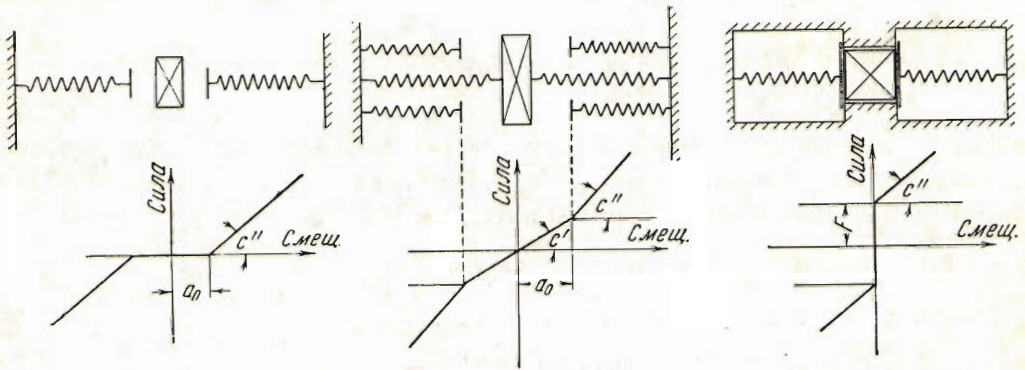
В первом приближении удержим в ряду (7) только первый член, т. е. положим

$$x = a \sin \omega t. \quad (8)$$

Для определения амплитуды a получим уравнение

$$m\omega^2 a + H = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \sin \omega t dt. \quad (9)$$

Конечно, мы взяли весьма грубое приближение. Однако для нелинейной характеристики того типа, который мы здесь рассматриваем (фиг. 1), уже это



Фиг. 1.

приближение, как указано выше, дает, поскольку дело касается определения максимального отклонения системы из равновесного положения, результаты, практически не отличающиеся от точного решения Ден-Гартога и Гельса. Мы имеем в этом случае:

$$f(x) = \begin{cases} c' x & \text{при } -a_0 \leq x \leq a_0, \\ c'' x + (c' - c'') a_0 & \text{„ } a_0 \leq x \leq \infty, \\ c'' x - (c' - c'') a_0 & \text{„ } -\infty \leq x \leq -a_0. \end{cases}$$

Пусть $|a| > a_0$ и $a > 0$; назовем через t_1 наименьший корень уравнения

$$a_0 = a \sin \omega t.$$

Имеем, как нетрудно проверить:

$$f(a \sin \omega t) = \begin{cases} c' a \sin \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ c'' a \sin \omega t + (c' - c'') a_0 & \text{„ } t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} - t_1, \\ c' a \sin \omega t & \text{„ } \frac{\pi}{\omega} - t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} + t_1, \\ c'' a \sin \omega t - (c' - c'') a_0 & \text{„ } \frac{\pi}{\omega} + t_1 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} - t_1, \\ c' a \sin \omega t & \text{„ } \frac{2\pi}{\omega} - t_1 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Разбивая промежуток интегрирования на эти пять частей, после элементарных вычислений и подстановки вместо t_1 его значения получим

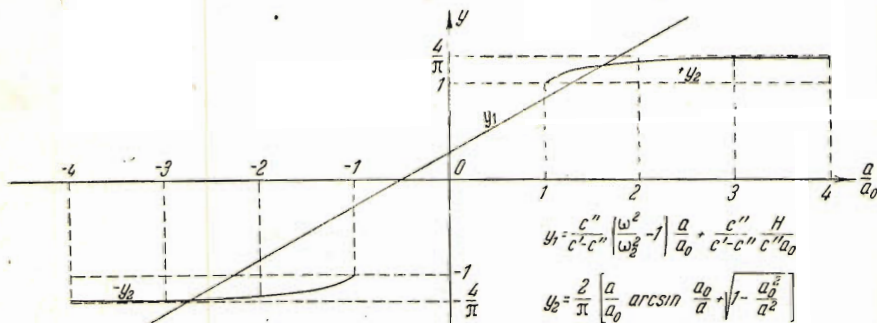
$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \sin \omega t dt = c'' a + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[a \arcsin \frac{a_0}{a} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right].$$

При $|a| > a_0$ и $a < 0$, после тех же вычислений, получим

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \sin \omega t dt = c'' a - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[a \arcsin \frac{a_0}{a} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right].$$

Уравнение (9) при $|a| > a_0$ будет поэтому иметь вид

$$(m\omega^2 - c'') a + H = \pm \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[a \arcsin \frac{a_0}{a} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right], \quad (10)$$



Фиг. 2.

или

$$\frac{c''}{c' - c''} \left(\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1 \right) \frac{a}{a_0} + \frac{c''}{c' - c''} \frac{H}{c'' a_0} = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right], \quad (11)$$

где введено обозначение:

$$\omega_2^2 = \frac{c''}{m}.$$

При $|a| < a_0$

$$f(a \sin \omega t) = c' a \sin \omega t$$

и из уравнения (9) находим:

$$a = \frac{H}{c' - m\omega^2}, \quad (11a)$$

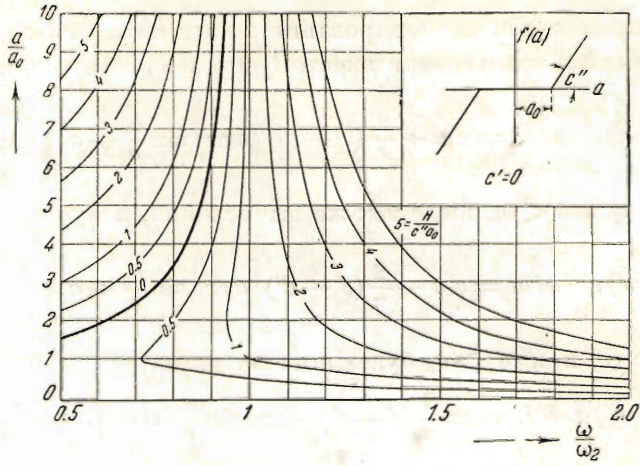
что, конечно, соответствует случаю линейной системы.

Решение уравнения (11) очень просто осуществляется графически (фиг. 2) путем определения точек пересечения прямой (за независимое переменное принято $\frac{a}{a_0}$):

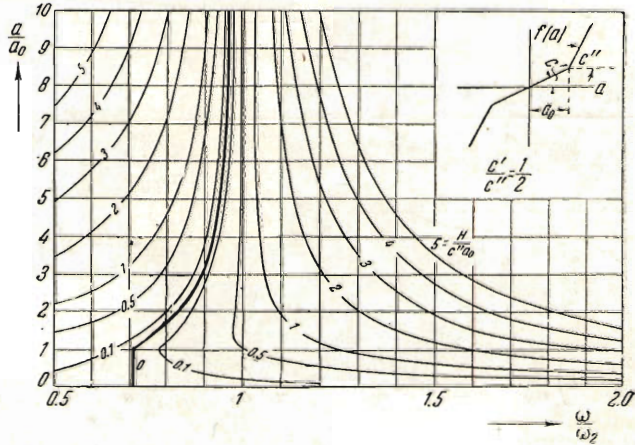
$$y_1 = \frac{c''}{c' - c''} \left(\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1 \right) \frac{a}{a_0} + \frac{c''}{c' - c''} \frac{H}{c'' a_0}$$

с один раз построенными кривыми

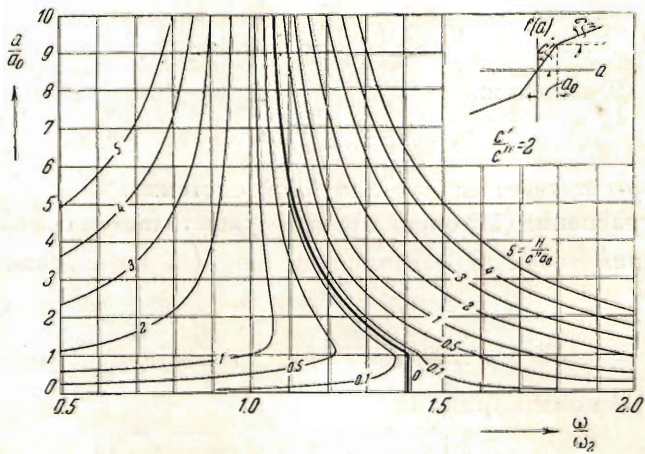
$$y_2 = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right].$$



Фиг. 3.

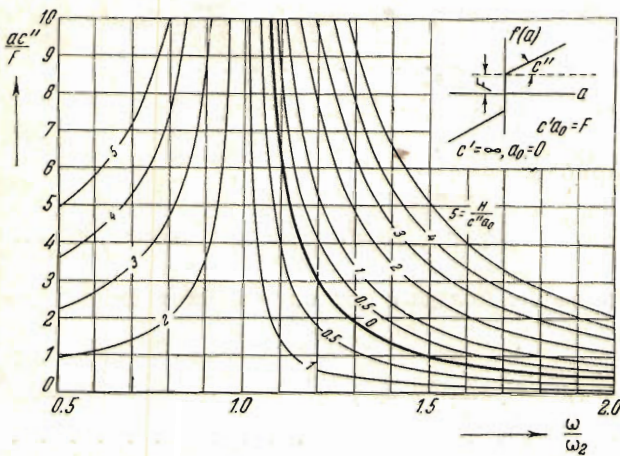


Фиг. 4.

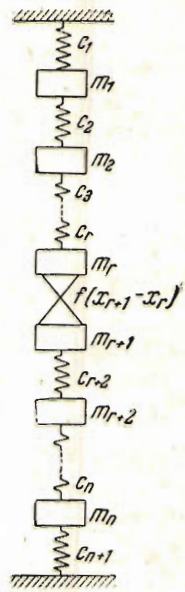


Фиг. 5.

Результаты решения показаны на графиках (фиг. 3—5). Каждому из рисунков соответствует определенное значение параметра $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ (через ω_1 обозначена частота свободных колебаний при $|a| < a_0$, т. е. $\omega_1^2 = \frac{c'}{m}$), а отдельным кривым — определенное значение параметра $\frac{H}{c'' a_0}$. По оси абсцисс отложено отношение $\frac{\omega}{\omega_2}$ (начиная со значения 0.5) по оси ординат $|a|:a_0$. При $|a| \leq a_0$ построение производилось по формуле (11a). Начерченные жирно кривые, для которых $\frac{H}{c'' a_0} = 0$, дают в первом приближении зависимость частоты свободных колебаний системы от амплитуды. Случаю (фиг. 3) $c' = 0$ соответствует наличие зазора в линейной системе.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Особый случай имеем на фиг. 6, соответствующей системе с первоначальным натягом. Здесь $c' = \infty$, $a_0 = 0$, но так, что $c' a_0 = F$ представляет конечную величину. Из уравнения (10) получаем

$$(m\omega^2 - c'')a + H = \pm \frac{4}{\pi} F$$

и, следовательно,

$$\frac{ac''}{F} = \frac{\frac{H}{F} \mp \frac{4}{\pi}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \tag{12}$$

Заметим, что при $\frac{|a|}{a_0} > 4$ y_2 отличается от $\pm \frac{4}{\pi}$ не более чем на $\sim 1\%$. Поэтому для столь больших амплитуд можно принять в пределах точности графических построений:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\pm \frac{4}{\pi} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right) - \frac{H}{c'' a_0}}{\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1} \tag{13}$$

§ 2. Рассмотрим теперь случай системы, состоящей из нескольких масс, схема которой изображена на фиг. 7. Реакции всех пружин, кроме пружины,

Используя эти соотношения для $i=r-1$ и $i=r+2$, можем теперь переписать уравнения, относящиеся к r -й, $(r+1)$ -й массам в виде

$$C_r a_r + L_r = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[(a_r - a_{r+1}) \sin \omega t] \sin \omega t dt, \quad (18)$$

$$C_{r+1} a_{r+1} + L_{r+1} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[(a_{r+1} - a_r) \sin \omega t] \sin \omega t dt.$$

Путем сложения, в силу нечетности $f(x)$, получим отсюда:

$$C_r a_r + C_{r+1} a_{r+1} + L_r + L_{r+1} = 0. \quad (19)$$

Далее найдем

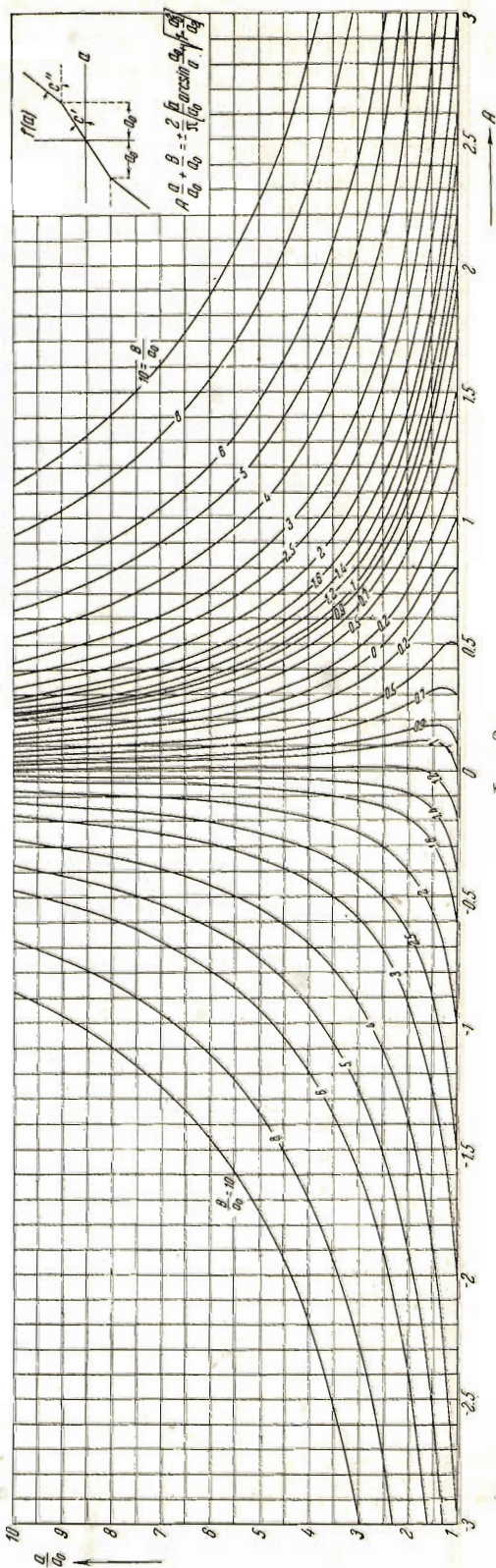
$$a_r - a_{r+1} + \frac{L_r}{C_r} - \frac{L_{r+1}}{C_{r+1}} = \left(\frac{1}{C_r} + \frac{1}{C_{r+1}} \right) \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[(a_r - a_{r+1}) \sin \omega t] \sin \omega t dt. \quad (20)$$

Все дело сводится, таким образом, к определению разности $a_r - a_{r+1}$ из этого нелинейного уравнения. Если эта разность будет найдена, то из (19) найдем по отдельности a_r и a_{r+1} , а из (17) и (17') — все прочие a_i ($i=1, 2, \dots, r-1, r+2, \dots, n$).

Согласно § 1, для рассматриваемого нами случая нелинейной зависимости уравнение (20) будет иметь вид (обозначаем $a_r - a_{r+1}$ через a):

$$A \frac{a}{a_0} + \frac{B}{a_0} = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2} \right], \quad (21)$$

где A и B зависят от постоянных системы, частоты и амплитуд возмущаю-

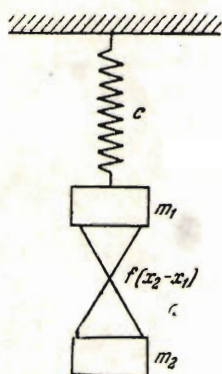


Фиг. 8.

щих сил. Результаты решения этого уравнения (уравнение решалось графически, как описано в § 1) приведены на графиках фиг. 8. По оси абсцисс откладывались значения A , по оси ординат $\left| \frac{a}{a_0} \right| > 1$ (если $|a| < a_0$, то задача линейна и решается общеизвестными приемами). Каждой кривой графика соответствует некоторое фиксированное значение параметра B . В частности, $B=0$ соответствуют свободные колебания системы в первом приближении; это следует из того, что B линейно зависит от амплитуд H_1, H_2, \dots, H_n возмущающих сил (наоборот, A от них не зависит) и обращается в 0, когда все H_i ($i=1, 2, \dots, n$) обращается в 0.

В качестве примера рассмотрим случай схемы фиг. 9, где нелинейная связь между первой и второй массой имеет характеристику фиг. 1. Уравнения движения будут:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + cx_1 + f(x_1 - x_2) - H_1 \sin \omega t &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + f(x_2 - x_1) - H_2 \sin \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$



Фиг. 9.

Пологая

$$x_i = a_i \sin \omega t \quad (i=1, 2)$$

и обозначая для краткости

$$M = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[(a_1 - a_2) \sin \omega t] \sin \omega t dt, \quad (23)$$

получим:

$$\begin{aligned} (m_1 \omega^2 - c) a_1 + H_1 &= M, \\ m_2 \omega^2 a_2 + H_2 &= -M. \end{aligned} \quad (24)$$

Откуда найдем:

$$(m_1 \omega^2 - c) a_1 + m_2 \omega^2 a_2 + H_1 + H_2 = 0, \quad (25)$$

$$(a_1 - a_2) + \frac{H_1}{m_1 \omega^2 - c} - \frac{H_2}{m_2 \omega^2} = \left(\frac{1}{m_1 \omega^2 - c} + \frac{1}{m_2 \omega^2} \right) M.$$

Подставляя вместо M его значение (см. § 1), найдем ($a = a_1 - a_2$):

$$\begin{aligned} \frac{c''}{c' - c''} \left[\frac{\frac{m_2 \omega^2}{c'} \left(\frac{m_1 \omega^2}{c} - 1 \right)}{\frac{(m_1 + m_2) \omega^2}{c} - 1} - 1 \right] \frac{a}{a_0} + \frac{(H_1 m_2 - H_2 m_1) \omega^2 + H_2 c}{(c' - c'') [(m_1 + m_2) \omega^2 - c] a_0} = \\ = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Это уравнение имеет место при $|a| > a_0$. Для $|a| < a_0$ обычными методами линейной теории находим:

$$c' \left[\frac{\frac{m_2 \omega^2}{c'} \left(\frac{m_1 \omega^2}{c} - 1 \right)}{\frac{(m_1 + m_2) \omega^2}{c} - 1} - 1 \right] \frac{a}{a_0} + \frac{(H_1 m_2 - H_2 m_1) \omega^2 + H_2 c}{[(m_1 + m_2) \omega^2 - c] a_0} = 0, \quad (27)$$

причем уравнение (25) также, конечно, сохраняет свою силу.

В дальнейшем расчете принято:

$$m_1 = m_2 = m, H_1 = -H_2 = H, c' = c$$

и введены обозначения

$$\frac{c}{m} = \lambda^2 \quad \text{и} \quad \frac{c}{c''} = \zeta.$$

Вместо (25)—(27) получаем:

$$\frac{\omega^2}{\lambda^2} a_2 + \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1 \right) a_1 = 0, \tag{25'}$$

$$\frac{1}{\zeta - 1} \left[\frac{\frac{\zeta \omega^2}{\lambda^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1 \right)}{\frac{2\omega^2}{\lambda^2} - 1} - 1 \right] \frac{a}{a_0} + \frac{1}{\zeta - 1} \frac{H}{c'' a_0} = \tag{26'}$$

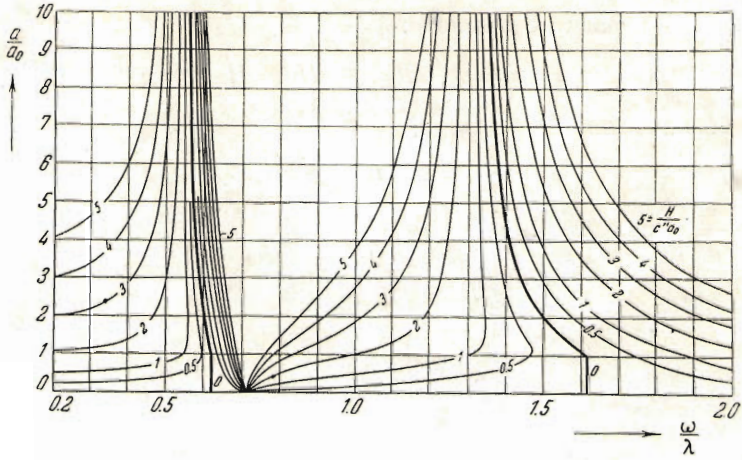
$$= \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2} \right],$$

$$\left[\frac{\frac{\omega^2}{\lambda^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1 \right)}{\frac{2\omega^2}{\lambda^2} - 1} - 1 \right] \frac{a}{a_0} + \frac{1}{\zeta} \frac{H}{c'' a_0} = 0. \tag{27'}$$

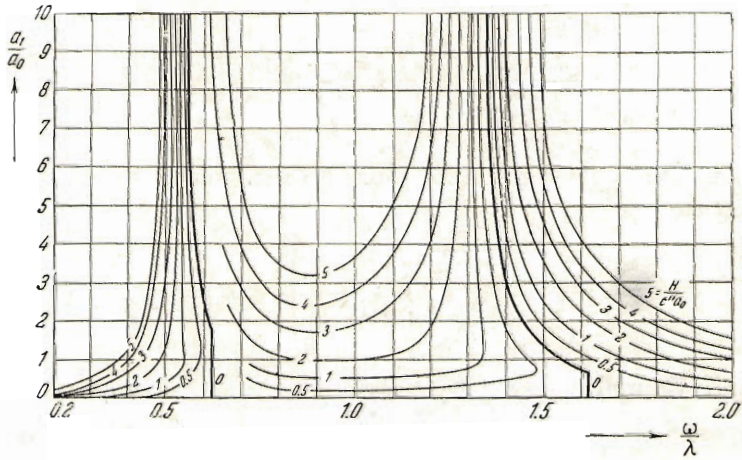
Для решения уравнения (26') может быть использован график фиг. 8. В данном случае

$$A = \frac{1}{\zeta - 1} \left[\frac{\frac{\zeta \omega^2}{\lambda^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1 \right)}{\frac{2\omega^2}{\lambda^2} - 1} - 1 \right], \quad B = \frac{1}{\zeta - 1} \frac{H}{c''}.$$

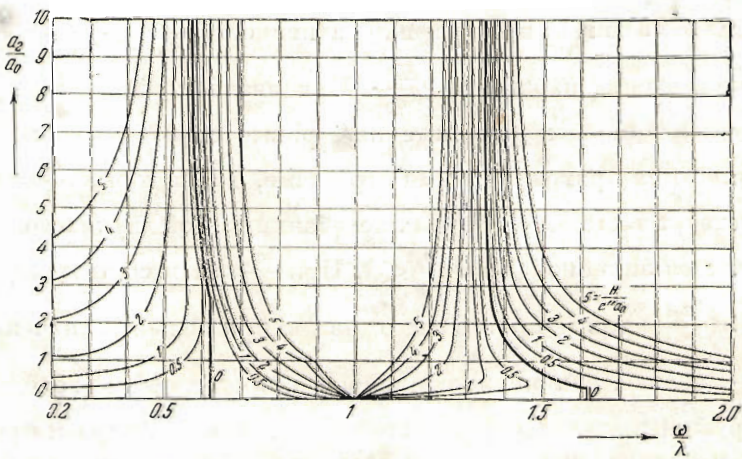
На фиг. 10 приведены результаты решения для случая $\zeta = 2$ и для нескольких значений величины $\frac{H}{c'' a_0}$ [конечно, для $\frac{|a|}{a_0} < 1$ было применено уравнение (27')]. Пользуясь этими результатами и уравнением (25'), мы построили далее на фиг. 11 и 12 графики зависимости $\frac{|a_1|}{a_0}$ и $\frac{|a_2|}{a_0}$ от $\frac{\omega}{\lambda}$ при $\zeta = 2$ и для тех же значений параметра $\frac{H}{c'' a_0}$. При значении этого параметра, равном 0, получаем в первом приближении кривые свободных колебаний. Эти кривые начинаются прямолинейными отрезками, для которых $\frac{\omega}{\lambda} = 0.62$ и 1.62 , что соответствует частотам свободных колебаний взятой двухмассовой системы, которая является линейной пока $\frac{|a|}{a_0} < 1$. При $\frac{|a|}{a_0} = 1$ и соответствующих значениях $\frac{|a_1|}{a_0}$ и $\frac{|a_2|}{a_0}$ кривые претерпевают излом; при больших значениях амплитуд, когда $\frac{|a|}{a_0}$ велико, влиянием нелинейности, происходящей вследствие наличия двух пружин различных жесткостей c' и c'' , можно в первом приближении пренебречь и считать, что мы имеем линейную двухмассовую систему с пружинами



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

жинами, имеющими жесткости c' и c'' . Этим объясняется то обстоятельство, что рассматриваемые кривые (соответствующие $\frac{H}{a_0 c''} = 0$) асимптотически приближаются к прямым, для которых $\frac{\omega}{\lambda} = 0.54$ и 1.31 , что как раз соответствует частотам свободных колебаний указанной линейной системы.

Полученные результаты дают, во всяком случае, качественно совпадающую с действительностью картину процесса вынужденных колебаний в нелинейной системе. Некоторого количественного несовпадения следует ожидать в области весьма малых частот возмущающей силы и при больших $\frac{|a|}{a_0}$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай $\omega = 0$, т. е. случай статического действия сил: пусть на первую массу действует сила H , а на вторую — та же сила, но в противоположную сторону. Из условия равновесия второй массы найдем:

$$H = a_0 c' + c''(a - a_0) \quad \text{или} \quad \frac{H}{a_0 c''} = \frac{a}{a_0} + \left(\frac{c'}{c''} - 1\right),$$

что при $\frac{c'}{c''} = \zeta = 2$ дает:

$$\frac{H}{a_0 c''} = \frac{a}{a_0} + 1. \quad (28)$$

Из уравнения же (26') при тех же условиях и $\omega = 0$ находим:

$$\frac{H}{a_0 c''} = \frac{a}{a_0} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right]. \quad (29)$$

При $\frac{a}{a_0} = 1$ оба выражения совпадают; при больших же значениях $\frac{a}{a_0}$ второе слагаемое асимптотически приближается к значению $\frac{4}{\pi} = 1.27$, и, следовательно, максимальная погрешность „статического“ значения $\frac{a}{a_0}$, вычисленного из (29), не превышает 0.27. В процентном отношении эта погрешность невелика, так как $\frac{a}{a_0}$ мы считаем большим. Для грубой оценки примем, что второе слагаемое в правой части (29) принимает значение $\frac{4}{\pi}$ практически уже при $\frac{a}{a_0} = 4$. Тогда погрешность формулы (29) надо будет оценить в 6%, и это для рассматриваемого метода наихудший случай.

§ 3. Рассмотрим теперь случай вынужденных колебаний нелинейной системы при наличии сопротивления пропорционального скорости. Уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + f(x) - H \sin \omega t = 0. \quad (30)$$

Вынужденные колебания в первом приближении будем искать в виде синусоидальной функции, имеющей ту же частоту, что и возмущающая сила, но сдвинутой относительно силы по фазе:

$$x = a \sin(\omega t - \gamma). \quad (31)$$

Константы a и γ должны быть подобраны так, чтобы

$$\int_0^{2\pi/\omega} [m\ddot{x} + \beta\dot{x} + f(x) - H \sin \omega t] \delta x dt,$$

где

$$\delta x = \delta a \sin(\omega t - \gamma) - a \cos(\omega t - \gamma) \delta \gamma$$

обращался в 0 при произвольных вариациях δa и $\delta \gamma$. Это приводит к системе двух уравнений:

$$m\omega^2 a + H \cos \gamma = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[a \sin(\omega t - \gamma)] \sin(\omega t - \gamma) dt, \quad (32)$$

$$m\beta a - H \sin \gamma = -\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[a \sin(\omega t - \gamma)] \cos(\omega t - \gamma) dt.$$

Заметим теперь, что поскольку $f(x)$ является нечетной функцией x , то $f[a \sin(\omega t - \gamma)]$ будет нечетной периодической функцией t и поэтому может быть представлена рядом по синусам:

$$f[a \sin(\omega t - \gamma)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu \omega t;$$

отсюда следует, что

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[a \sin(\omega t - \gamma)] \sin(\omega t - \gamma) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} f(a \sin z) \sin z dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin z) \sin z dz$$

и далее

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f[a \sin(\omega t - \gamma)] \cos(\omega t - \gamma) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} f(a \sin z) \cos z dz = 0.$$

Уравнения (32) приобретают вид:

$$m\omega^2 a + H \cos \gamma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin z) \sin z dz, \quad (33)$$

$$\omega\beta a - H \sin \gamma = 0.$$

Считая, что a в формуле (31) может принимать положительные и отрицательные значения, можно принять $|\gamma| \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos \gamma > 0$. Поэтому из (33) найдем $\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{\beta^2 \omega^2 a^2}{H^2}}$, и подстановка дает

$$m\omega^2 a + \sqrt{H^2 - \beta^2 \omega^2 a^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin z) \sin z dz. \quad (34)$$

Это уравнение определяет амплитуды a , как абсциссы точек пересечения кривых:

$$y_1 = m\omega^2 a + \sqrt{H^2 - \beta^2 \omega^2 a^2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin z) \cdot \sin z dz.$$

Первая из этих кривых представляет кривую второго порядка:

$$(\beta^2 \omega^2 + m^2 \omega^4) a^2 - 2m\omega^2 a y_1 + y_1^2 = H^2,$$

дискриминант которой

$$\beta^2 \omega^2 + m^2 \omega^4 - m^2 \omega^4 = \beta^2 \omega^2 > 0;$$

кривая (34) поэтому представляет эллипс; центр его лежит в начале координат. Отсюда следует, что амплитуды вынужденных колебаний будут при всех значениях ω ограниченными, что и должно быть при $\beta \neq 0$.

Из второго уравнения (33) следует, что абсолютное значение величины a будет иметь максимальное значение при $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$; получаем:

$$|a|_{\max} = \frac{H}{\beta \omega}. \quad (35)$$

Из первого уравнения (33) получаем, при $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$m\omega^2 |a|_{\max} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(|a|_{\max} \sin z) \sin z dz$$

и, подставив сюда вместо ω его значение, найдем

$$\frac{mH^2}{\beta^2} = \frac{1}{\pi} |a|_{\max} \int_0^{2\pi} f(|a|_{\max} \sin z) \sin z dz. \quad (36)$$

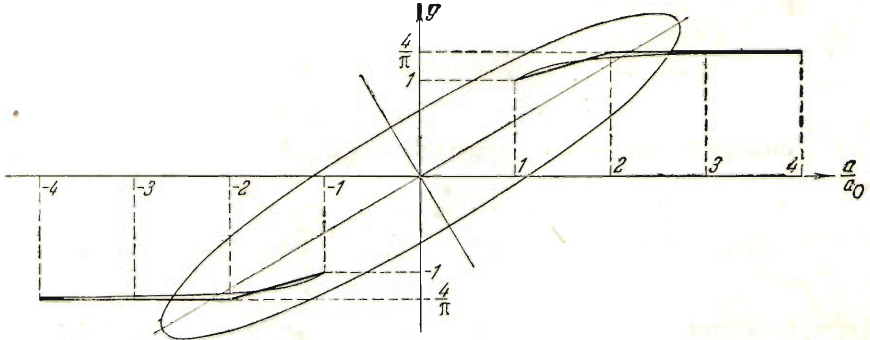
Задавая $|a|_{\max}$ ряд значений, найдем отсюда значения параметра $\frac{mH^2}{\beta^2}$, после чего получим также из (35) соответствующие значения ω .

Для интересующего нас сейчас случая характеристики фиг. 1 имеем согласно § 1:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin z) \sin z dz = c'' a \pm (c' - c'') \frac{2}{\pi} \left[a \arcsin \frac{a_0}{a} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \right].$$

Если ввести обозначения

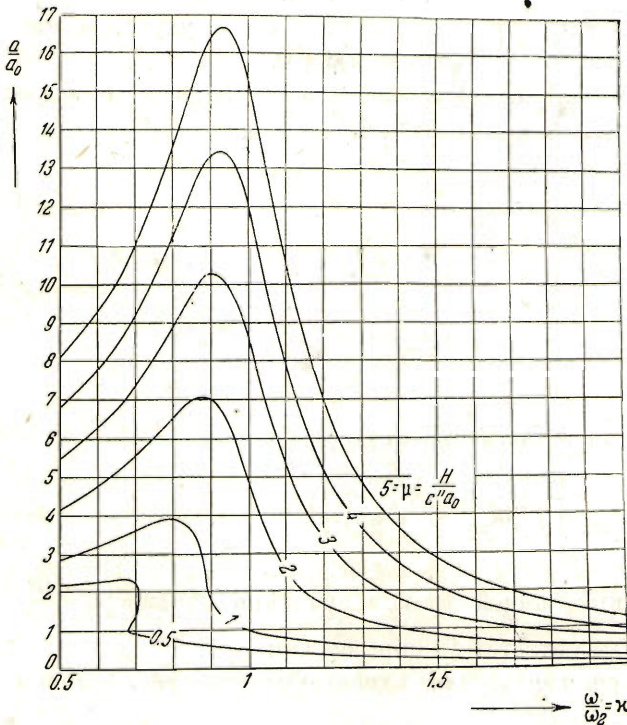
$$\frac{c'}{c''} = \zeta, \quad \frac{c''}{m} = \omega_2^2, \quad \frac{\omega}{\omega_2} = \chi, \quad \frac{H}{c'' a_0} = \mu, \quad \frac{\beta}{m \omega_2} = r,$$



Фиг. 13.

то уравнение (34) получит вид

$$\frac{\chi^2 - 1}{\zeta - 1} \frac{a}{a_0} + \frac{1}{\zeta - 1} \sqrt{\mu^2 - r^2 \chi^2 \frac{a^2}{a_0^2}} = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \arcsin \frac{a_0}{a} + \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}} \right], \quad (37)$$



Фиг. 14.

отрезками прямых линий, как указано на фиг. 13. Тогда расчет сводится к решению квадратных уравнений.

причем в правой части нужно взять верхний или нижний знак согласно тому, будет ли $a > 0$ или $a < 0$; уравнение (37) имеет место при $|a| > a_0$; при $|a| < a_0$ мы имеем линейный случай. Корни (37) находим как абсциссы точек пересечения эллипса (см. выше) и кривой, изображенной на фиг. 2. Так как величина и положение этого эллипса меняются с изменением параметров системы, а многократное вычерчивание эллипсов должно было бы потребовать затраты большого времени, то для практического решения уравнения (37) мы заменили кривую, представленную правой частью уравнения (37), двумя

Примерный расчет был произведен при $r^2 = 0.1$ для случая $\zeta = 0$, что соответствует системе с зазором (фиг. 3). Для этого случая построены (на фиг. 14) кривые, дающие зависимость $\frac{a}{a_0}$ от x для ряда значений параметра μ . Соответствующие кривые в случае отсутствия сопротивления ($r = 0$) были приведены ранее (фиг. 3). Для $|a| < a_0$ уравнение движения в системе с зазором будет

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = H \sin \omega t.$$

Решение этого уравнения, имеющее частоту возмущающей силы, будет

$$x = \frac{H}{\omega \sqrt{m^2 \omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t - \gamma). \quad (38)$$

Графики (фиг. 14) для $|a| < a_0$ построены согласно этому уравнению.

На фиг. 15 построен график зависимости $|a|_{\max}$ от $\frac{\mu^2}{r^2}$. Построение произведено согласно уравнению (37), которое в нашем случае (система с зазорами) будет

$$\frac{\mu^2}{r^2} = x_m \left\{ x_m \pm \frac{2}{\pi} \left[x_m \arcsin \frac{1}{x_m} + \sqrt{1 - \frac{1}{x_m^2}} \right] \right\}, \quad (39)$$

где

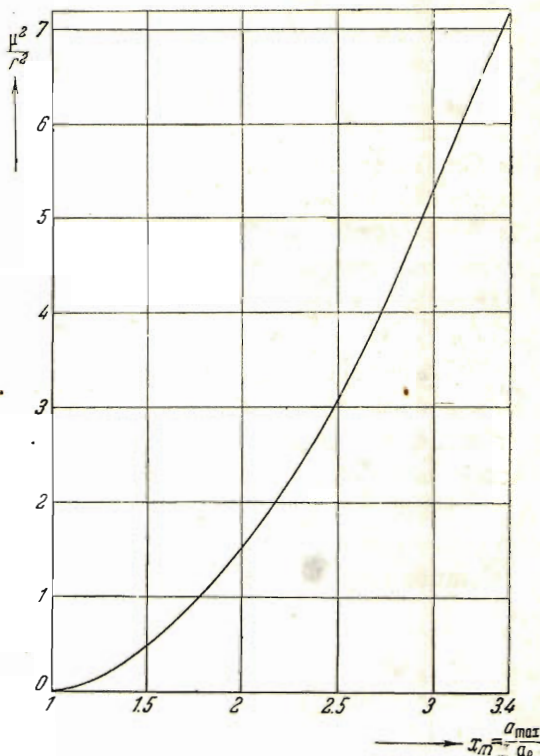
$$x_m = \frac{|a|_{\max}}{a_0}.$$

Верхний знак в этом уравнении берется при $x_m > 0$ и нижний при $x_m < 0$, поэтому первая часть уравнения представляет четную функцию x_m , и при построении кривой можно ограничиться положительными x_m . При больших x_m

$$\frac{2}{\pi} \left[x_m \arcsin \frac{1}{x_m} + \sqrt{1 - \frac{1}{x_m^2}} \right] \cong \frac{4}{\pi}$$

и (39) может быть заменено приближенным соотношением

$$\frac{\mu^2}{r^2} \cong x_m^2 + \frac{4}{\pi} x_m. \quad (40)$$



Фиг. 15.

**SUR LA SOLUTION APPROXIMATIVE
DE QUELQUES PROBLÈMES NONLINÉAIRES
DE VIBRATIONS FORCÉES**

A. LOURIÉ et A. TCHEKMAREV

(Leningrad)

(Résumé)

Dans cette note nous donnons la solution approximative par la méthode de Galerkin du problème des vibrations provoquées par la force sinusoïdale excitante et possédantes la fréquence de cette force. Dans le cas du système avec un degré de la liberté privé de la résistance la solution reçue conduit aux mêmes résultats quantitatifs que la solution exacte publiée récemment par Den-Hartog and Heiles (Journal of Applied Mechanics, vol. 3, № 4, p. 126—130, 1936).

La méthode de la solution du problème mentionnée ci-dessus est appliquée au § 2 aussi à la solution du problème des vibrations forcées du système avec deux degrés de la liberté dans le cas quand le caractère d'une liaison élastique nonlinéaire entre deux masses du système a la même forme du dess. 1.

Dans le § 3 est examiné de nouveau le même problème du système avec un seul degré de la liberté que dans le § 1, mais en escomptant la force de la résistance proportionnelle à la vitesse.
