

Согласно общему методу ищем $\bar{u}(\xi, \eta)$ приближенное значение функции $u(\xi, \eta)$, обращающееся в нуль при $\eta = a$ и $\eta = a - b$ и равное $kf(\xi)$ при $\eta = a - \frac{b}{2}$, где k — постоянный множитель и $f(\xi)$ — произвольная функция. Очевидно,

$$\bar{u}(\xi, \eta) = f(\xi)(\eta - a + b)(\eta - a).$$

Тогда:

$$J(\bar{u}) = - \int_{-\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \alpha} \int_{a-b}^a \left[\frac{1 + \xi^2}{\eta^2} (\eta - a + b)^2 (\eta - a)^2 f'^2(\xi) + \right. \\ \left. + (2\eta - 2a + b)^2 f^2(\xi) - 2(\eta - a)(\eta - a + b)f(\xi) - 2\frac{\xi}{\eta} \right] \eta d\xi d\eta$$

Выполняя интегрирование по η , получим:

$$J = - \int_{-\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \alpha} \left\{ (1 + \xi^2) f'^2(\xi) + c [f^2(\xi) + f(\xi)] \right\} d\xi,$$

где

$$c = \frac{b^3(2a - b)}{-6a^3b + 9a^2b^2 - 2ab^3 - \frac{1}{2}b^4 + 6a^2(a - b)^2 \operatorname{tg} \frac{a}{a - b}}.$$

Функцию $f(\xi)$ находим из условия, чтобы $f(\xi)$ давала минимум для J ; для этого необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера, которое в нашем случае примет вид:

$$(1 + \xi^2) f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) - cf(\xi) - \frac{c}{2} = 0. \quad (1)$$

При интегрировании этого уравнения в искомую функцию $f(\xi)$ войдут две произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий:

$$f(\operatorname{tg} \alpha) = 0, \quad f(-\operatorname{tg} \alpha) = 0.$$

Полученное нами уравнение (1) есть уравнение Гаусса с особыми точками $i, -i, \infty$. Но так как в нашем случае решение выражается сложно через гипергеометрический ряд, мы его приводить не будем. Будем искать решение уравнения

$$(1 + \xi^2) f_1''(\xi) + 2\xi f_1'(\xi) - cf_1(\xi) = 0 \quad (2)$$

в виде ряда:

$$f_1(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu} \xi^{2\nu},$$

исходя из симметрии фигуры.

Подставляя этот ряд в уравнение (2), определим коэффициенты:

$$a_{2\nu} = \frac{[c - 2(\nu - 1)(2\nu - 1)] [c - 2(\nu - 2)(2\nu - 3)] \dots [c - 2 \cdot 1 \cdot 3] c}{(2\nu)!} a_0.$$

Откуда:

$$f_1(\xi) = a_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{2\nu} \xi^{2\nu} = a_0 \Phi(c, \xi),$$

если положить:

$$b_{2\nu} = \frac{a_{2\nu}}{a_0}.$$

Нужное решение уравнения (1) будет:

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} + a_0 \Phi(c, \xi),$$

где a_0 определяется из условия:

$$f(\operatorname{tg} \alpha) = 0,$$

т. е.

$$a_0 = \frac{1}{2\Phi(c, \operatorname{tg} \alpha)}$$

и

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\Phi(c, \operatorname{tg} \alpha)} \Phi(c, \xi).$$

Легко проверить что ряд $\Phi(c, \xi)$ сходится для $|\xi| \leq 1$ и расходится для $|\xi| > 1$.

Пример. Вычислим $f(\xi)$ для случая

$$\alpha = 30^\circ, \quad b = 1, \quad a = 2.$$

Тогда постоянная

$$c = 22.1239, \quad \Phi(c, \operatorname{tg} \alpha) = 4.10$$

с точностью до 0.01 и

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} + 0.51 [1 + 11.06 \xi^2 + 3.71 \xi^4 + 0.26 \xi^6 - 0.09 \xi^8 + 0.05 \xi^{10} - \dots].$$

2. Симметричный уголок

Ищем решение u для $ABCD$ (фиг. 2), а для остальной части будем строить его по симметрии. Точно так же, как в случае трапеции, вводя новые координаты ξ, η

$$x = \eta \xi - a + \frac{b}{2}, \quad y = -\eta + a - \frac{b}{2}$$

и произвольную функцию $f(\xi)$, выразим приближенное значение для u

$$\bar{u}(\xi, \eta) = f(\xi)(\eta - a + b)(\eta - a).$$

Как видно из выражений \bar{u} и замены координат, окончательное выражение J , а отсюда и уравнение для $f(\xi)$ будет таким же, как в случае трапеции, т. е.:

$$(1 + \xi^2) f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) - c f(\xi) - \frac{c}{2} = 0. \quad (1')$$

Граничные условия для $f(\xi)$ будут другие, именно:

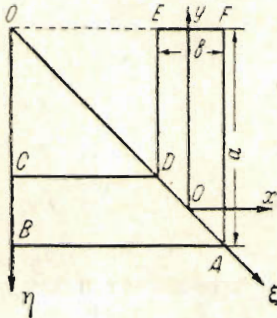
$$f(0) = 0,$$

а при $\xi = 1$ должно быть выполнено естественное граничное условие, т. е. конец кривой

$$u = f(\xi), \quad v = a - \frac{b}{2}$$

при $\xi = 1$ должен свободно перемещаться вдоль прямой

$$\xi = 1, \quad v = a - \frac{b}{2},$$



Фиг. 2.

для чего необходимо, чтобы кривая $hf(\xi)$ с прямой

$$\xi = 1, \quad v = a - \frac{b}{2}$$

пересекалась трансверсально:

$$2(1 + \xi^2)f'(\xi) = 0|_{\xi=1},$$

т. е.

$$f'(1) = 0.$$

Ищем решение уравнения (2) в виде ряда:

$$f_1(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^v,$$

тогда решение уравнения () будет:

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} + f_1(\xi).$$

Производя соответствующие вычисления, мы получим рекуррентную формулу для коэффициентов:

$$(v^2 + v - c)a_v + (v+1)^2 a_{v+1} + \frac{5}{4}(v+2)(v+1)a_{v+2} = 0.$$

Очевидно, что все коэффициенты a_i ($i=2, 3, \dots$) можно выразить через a_0 и a_1 , которые определяются из условий:

$$f(0) = 0, \quad f'(1) = 0.$$

Пример. Проведем вычисления для случая $a=2, b=1$. Здесь $c=22.1239$ с точностью до 0.0001:

$$f(\xi) = -0.4505 - 0.2061\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + 0.5207\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 - 0.8307\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + \\ + 1.0582\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 - 1.1571\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^5 + 0.7457\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^6 + \dots$$

И, в частности,

$$\bar{u}\left(1, \frac{3}{2}\right) = 0.1214, \quad \bar{u}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0.1126.$$

3. Косой симметричный угол

Таким же образом, как в предыдущем случае, ищем решение для части $ABCD$ (фиг. 3). Введем косоугольные координаты ξ, η , связанные с прямоугольными координатами равенствами:

$$x = \xi + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta.$$

Вводя произвольную функцию $f(\xi)$, положим

$$\bar{u} = f(\xi) (b^2 - \eta^2).$$

Выражение для J переписется так:

$$J = \int_{-b}^b \int_{-b}^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 - 2u \right] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-b}^b [(b^2 - \eta^2) f'^2 - 2\sqrt{2} \eta (b^2 - \eta^2) f \cdot f' + 4\eta^2 f^2 - (b^2 - \eta^2) f] d\xi d\eta.$$

Интегрируя по η , получим:

$$J = \frac{1}{2} \int \left(\frac{16}{15} b^5 f'^2 + \frac{8}{3} b^3 f^2 - \frac{4}{3} b^3 f \right) d\xi.$$

Составив уравнение Эйлера: найдем:

$$4b^3 f'' - 10f + \frac{5}{2} = 0$$

с граничными условиями для f :

$$f(a) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

(по аналогии с предыдущим случаем).

Определив решение этого уравнения, удовлетворяющего указанным граничным условиям, и подставив в выражение для \bar{u} , будем иметь:

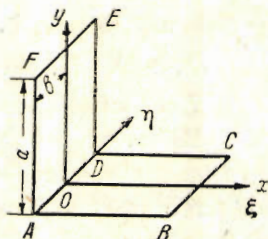
$$\bar{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (b^2 - \eta^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{10}}{2b} \xi}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{10}}{2b} a} \right).$$

Момент кручения M равен:

$$M = G\theta \int \int \bar{u} dx dy = 2G\theta \int_0^a \int_{-b}^b \frac{1}{4} (b^2 - \eta^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{10}}{2b} \xi}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{10}}{2b} a} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} d\xi d\eta$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 \left(a - \frac{2b}{\sqrt{10}} \operatorname{th} \frac{a\sqrt{10}}{2b} \right) G\theta.$$



Фиг. 3.

По функции $\bar{u}(\xi, \eta)$ дифференцированием можно найти компоненты напряжений, которые будут близки к действительным вдали от входящего угла $\angle CDE$. Вблизи этого угла мы не получим правильной картины напряжений.

Пример. Возьмем уголок, ближе всего подходящий к уголку, рассмотренному в предыдущем примере $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \eta^2 \right) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{5} \xi}{\operatorname{ch} \frac{3}{2} \sqrt{5}} \right).$$

Значения \bar{u} , соответствующие значениям \bar{u} в предыдущем примере:

$$1) \bar{u}(0,0) = 0.1118, \quad 2) \bar{u}\left(\frac{3}{4}, 0\right) = 0.1001.$$

Рассмотренное последнее сечение в практике не встречается, но решение для косоуголка можно использовать в случае прямого уголка, достаточно удлиненного. Это видно из сравнения результатов в двух последних примерах. В практике встречаются прямые уголки с отношением размеров $\frac{a}{b} = 4$ или более; в таком случае решение будет еще более близким к решению соответствующего косоуголка, чем в приведенном примере.

Несколько слов о точности.

Вводя одну произвольную функцию, мы получим приближенное значение функции u с точностью порядка 1%, как показывает сравнение точного значения с приближенным в случае прямоугольника, полученное этим методом в цитированной выше статье Л. В. Канторовича. Чтобы получить большую точность, необходимо вводить больше произвольных функций.

SOLUTION APPROCHÉE DU PROBLÈME DE LA TORSION DE CERTAINES TIGES PRISMATIQUES

Т. ЧЕПОВА

(Leningrad)

(Résumé)

Cet article expose d'après la méthode de M. Kantorovitch une solution approchée du problème de la torsion des tiges prismatiques à sections suivantes: un trapèze équilatéral et les angles symétriques (fig. 2) et obliques (fig. 3).

En introduisant un système convenable des coordonnées ξ, η , différent pour chacun des cas, on cherche, suivant la méthode générale, la valeur approchée $\bar{u}(\xi, \eta)$ de la fonction $u(\xi, \eta)$ sous la forme

$$\bar{u}(\xi, \eta) = f(\xi) \varphi(\eta).$$

Ici $\varphi(\gamma)$ est un polynome du deuxième degré choisi de la sorte que

$$\varphi(\gamma) = 0$$

pour les valeurs de γ pris sur le contour de la section.

$f(\xi)$ peut être définie de la condition que la rende de l'intégrale J_1 minimum, ou J_1 est l'intégrale

$$J = \int \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right] dx dy$$

écrite à l'aide des coordonnées ξ, γ .

Pour $f(\xi)$ nous avons l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

Dans les deux premiers cas c'est l'équation de Gauss et dans le dernier — c'est l'équation aux coefficients constants.

Nous avons donné des calculs pour des cas particuliers. La comparaison des deux derniers exemples montre que pour un angle ordinaire suffisamment long on peut employer la solution pour l'angle oblique.