АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences — Отделение технических наук
Section of Technical Mechanics — Группа технической механики

О ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ ГИБКОГО ВАЛА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

К. В. МЕЛИКОВ и П. П. ЮШКОВ

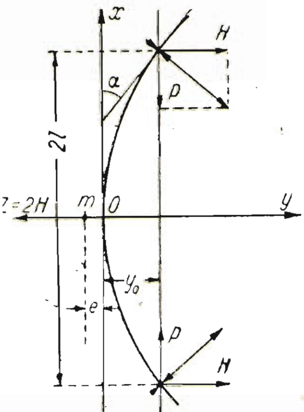
(Ленинград)

Настоящая заметка находится в тесной связи с нашей предыдущей статьей [1] и дает другое решение одной из рассмотренных в ней задач.

В упомянутой статье указывается, что И. Малкин в работе, посвященной устойчивости вращающихся гибких стержней,[2] пользуясь точным уравнением изогнутой оси

$$EIy'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, M(x, y),$$

применяет его для определения формы изгиба стержня при следующих условиях: вертикально расположенный стержень удерживается в двух вращающихся около горизонтальных осей и расположенных на расстоянии $2l$ подшипниках и находится под действием горизонтальной сосредоточенной силы, приложенной в его середине. *При этих условиях реакции подшипников нормальны к изогнутой оси вала.*



Фиг. 1.

Решение этой задачи автор заимствует у Saalschütz'a.[3] Однако при ближайшем рассмотрении можно убедиться, что задача, решенная Saalschütz, и задача, рассматриваемая Малкиным, различны. Первый рассматривает стержень, *к концу* которого приложена сила (фиг. 1), горизонтальную и вертикальную составляющие H и P которой можно подобрать так, чтобы она была нор-

---

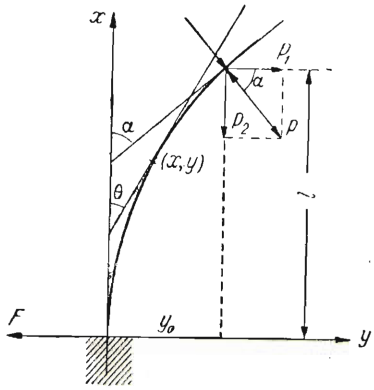
[1] К. В. Меликов, О изгибе стержня сосредоточенной силой в двух частных случаях. Прик. мат. и мех., нов. сер , т. I, вып. 1.

[2] J. Malkin, Zur Stabilitätsfrage rotierender elastischer Stäbe, Math. Ann. **101**, S. 1—60, 1929.

[3] L. Saalschütz, Der belastete Stab., B. G. Teubner, 1880.

мальна к стержню; второй же предполагает скольжение стержня в подшипнике и свободный поворот последнего *при условии неизменности расстояния между точками опор.*

Решение Saalschütz в общем случае приводит к эллиптическим интегралам Лежандра первого и второго рода и дается формулами:



Фиг. 2.

$$ax = \cos^{\frac{3}{2}} 2\xi\,[(\varphi,\ \varphi_0) + 2\,\mathrm{tg}\,2\xi \sin\vartheta\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)],$$

$$ay = \cos^{\frac{3}{2}} 2\xi\,[(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,2\sin\vartheta - (\varphi,\ \varphi_0)\,\mathrm{tg}\,2\xi],$$

$$\left(a = \sqrt{\frac{P}{EI}}\right),$$

причем

$$\sin\varphi_0 \sin\vartheta = \sin\xi,$$

$$\left[F\left(\vartheta,\ \frac{\pi}{2}\right) - F(\vartheta,\ \varphi_0)\right] \cos^{\frac{1}{2}} 2\xi = as,$$

и

$$(\varphi,\ \varphi_0) = 2\,[E(\vartheta,\ \varphi) - E(\vartheta,\ \varphi_0)] - [F(\vartheta,\ \varphi) - F(\vartheta,\ \varphi_0)]$$

В предположении нормальности силы стержню вводятся некоторые добавочные соотношения, именно:

$$H : P = \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,2\xi,$$

$$\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2} - 2\xi,$$

и так как для конца стержня

$$\alpha = 2(\vartheta - \xi),^1$$

то для этой точки

$$\alpha = 2\vartheta - \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4},$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi_0 = \sqrt{2}\sin\xi,$$

$$\sin\alpha = \cos^2\varphi_0.$$

Переходим к выводу уравнения упругой линии в том случае, который соответствует предположениям Малкина (фиг. 2).

Из условия равновесия имеем:

$$P_1 = \frac{F}{2},$$

а тогда:

$$P = \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$P_2 = P\sin\alpha = \frac{F}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

[1] Saalschütz, стр. 47, форм. (25).

Дифференциальное уравнение упругой линии будет:

$$EI\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=P_2(y_0-y)+P_1(l-x)=\frac{F}{2}[(y_0-y)\operatorname{tg}\alpha+(l-x)].$$

Для сокращения письма положим

$$\frac{F}{2EI}=a^2;$$

замечая далее, что

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds},$$

мы получим:

$$\frac{d\theta}{ds}=a^2[l-x+\operatorname{tg}\alpha(y_0-y)],$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=l\\ y=y_0}}.$$

Беря в качестве независимой переменной x, пишем:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{d\theta}{dx}\cos\theta=\frac{d\sin\theta}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sin\theta}{dx}=a^2[l-x+\operatorname{tg}\alpha(y_0-y)],$$

или, дифференцируя:

$$\frac{d^2\sin\theta}{dx^2}=-a^2[1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta].$$

Полагая $\sin\theta=z$ и заменяя $\operatorname{tg}\theta$ через $\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, получим:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-a^2\left(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right),$$

при условиях на границах:

$$\begin{aligned}&\text{при } x=0 \quad z=0,\\ &\text{"} \quad x=l \quad z=\sin\alpha,\\ &\qquad\qquad \frac{dz}{dx}=0.\end{aligned}$$

Полученное уравнение интегрируется в квадратурах:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=a^2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{1-z^2}-a^2z+C.$$

Положив $z=l$, находим, что $C=0$. Интегрируя еще раз и замечая, что z обращается в нуль одновременно с x, имеем:

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}}=a\sqrt{2}\,x. \qquad \text{(I)}$$

Угол α наклона касательной в точке опоры определится из уравнения:

$$\int_0^{\sin\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}} = a\sqrt{2}\,l. \tag{II}$$

Для вычисления несобственного интеграла

$$J(\sin\alpha) = \int_0^{\sin\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}},$$

в котором подинтегральная функция претерпевает разрыв непрерывности на верхнем пределе, применим следующий прием.

Рассмотрим сперва интеграл

$$K = \int_0^{\sin\alpha} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz,$$

который после подстановки $z = \sin\theta$ примет вид:

$$K = \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta - \sin\theta}\,d\theta.$$

Замечая, что

$$K = \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta - \sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin(\alpha-\theta)}\,d\theta,$$

положим

$$\alpha - \theta = \lambda;$$

тогда:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \int_{\alpha}^{0} \sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda.$$

Продифференцируем теперь обе части равенства

$$\int_0^{\sin\alpha} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda$$

по параметру α. Тогда получим равенство для определения искомого интеграла $J(\sin\alpha)$:

$$\frac{1}{2\cos^2\alpha} \int_0^{\sin\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{1}$$

Возможность применения правила Лейбница дифференцирования по параметру интеграла K нужно доказать, так как дифференцирование под знаком интеграла K приводит к несобственному интегралу:

$$J(\sin\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}}=\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta-\sin\theta}}.$$

Покажем, что этот последний интеграл сходится равномерно. Нетрудно видеть, что вблизи точки $\theta=\alpha$ выполняется неравенство

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta-\sin\theta}}<\frac{M}{(\alpha-\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

где M — постоянное положительное число, а следовательно, для любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$ можно определить число h так, чтобы

$$\left|\int_{\alpha-h}^{\alpha}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta-\sin\theta}}\right|<\varepsilon,$$

причем h не зависит от α.

Из равномерной сходимости интеграла $J(\sin\alpha)$ следует законность дифференцирования интеграла K по параметру α.

Покажем теперь, что интеграл

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda,$$

входящий в формулу (1), сводится к эллиптическим интегралам первого и второго рода. В самом деле, полагая

$$\sin\lambda=\cos^2\varphi$$

и обозначая для краткости

$$\omega=\arccos\sqrt{\sin\alpha},$$

получим:

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\cos\varphi\cdot\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^4\varphi}}\,d\varphi=2\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=2\sqrt{2}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi-\sqrt{2}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Вводя обычные обозначения для эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{и} \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

мы получим значение интеграла

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{\sin \lambda}\, d\lambda = 2\sqrt{2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] - \\ - \sqrt{2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

которое подставим в (1).

Таким образом интеграл $J(\sin\alpha)$ находится из уравнения:

$$\frac{1}{2\cos^2\alpha} \cdot J(\sin\alpha) = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}} \left\{ 2\sqrt{2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] - \right. \\ \left. - \sqrt{2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \right\} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Замечая, что согласно условиям задачи

$$J(\sin\alpha) = a\sqrt{2}\, l,$$

получим окончательное уравнение, связывающее α и l:

$$al = \cos\alpha\sqrt{\sin 2\alpha} + \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} \left[2E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \right. \\ \left. - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F\left(\omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]. \tag{A}$$

При практическом использовании формулы (A) можно составить заранее таблицу значений произведения al при данном α (изменяющемся, например, через $30'$), а затем пользоваться этой таблицей для определения α по заданным значениям a и l.

Тот же прием дифференцирования определенного интеграла по параметру применим к вычислению интеграла

$$J(z) = \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2} - z}}$$

с переменным верхним пределом (z изменяется от 0 до $\sin\alpha$).

Аналогично предыдущему мы рассматриваем сперва интеграл

$$\int_0^{z} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\cdot\sqrt{1-z^2} - z}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz,$$

который двумя последовательными подстановками $z = \sin\theta$ и $\alpha - \theta = \lambda$ преобразуется следующим образом:

$$\int_0^z \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\int_{\alpha-\arcsin z}^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по α, получим:

$$\frac{1}{2\cos^2\alpha}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-z^2}-z}} =$$
$$= \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}}\int_{\alpha-\arcsin z}^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\left[\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin(\alpha-\arcsin z)}\right]. \qquad (2)$$

Применяя затем к интегралу

$$\int_{\alpha-\arcsin z}^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda$$

подстановку

$$\sin\lambda = \cos^2\varphi,$$

получим:

$$\int_{\alpha-\arcsin z}^{\alpha}\sqrt{\sin\lambda}\,d\lambda = 2\sqrt{2}\left[E\left(\gamma,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-E\left(\omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] -$$
$$-\sqrt{2}\left[F\left(\gamma,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad (3)$$

где

$$\gamma = \arccos\sqrt{\sin(\alpha-\arcsin z)}.$$

Замечая, что согласно условиям задачи

$$J(z) = a\sqrt{2}\cdot x,$$

и подставляя значение интеграла (3) в формулу (2), окончательно получаем аналитическую зависимость между x и z:

$$ax = \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}\left\{2E\left(\gamma,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2E\left(\omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\gamma,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+F\left(\omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}+$$
$$+\cos\alpha\sqrt{2\cos\alpha}\left[\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin(\alpha-\arcsin z)}\right]. \qquad (B)$$

Совершенно очевидно, что при $z = \sin\alpha$ из формулы (B) получается формула (A).

ÜBER DIE GLEICHGEWICHTSFORM EINER BIEGSAMEN WELLE IN EINEM SPEZIELLEN FALLE

K. V. MELIKOW UND P. P. JUŠKOW

(Zusammenfassung)

Die Arbeit ist der exakten Lösung der Aufgabe von der Biegung eines Stabes unter dem Einfluss einer in seiner Mitte angreifenden Einzelkraft (Fliehkraft der an der Welle befestigten Masse) gewidmet.

Als Veränderliche werden genommen: Die Koordinate x, misst die Länge des nicht verbogenen Stabes, und der Winkel θ, welcher durch die zur gebogenen Achse gezogene Tangente und die Richtung der nicht gebogenen Achse gebildet wird.

Die Aufgabe wird auf die Berechnung des uneigentlichen Integrals (B) reduziert, in dem die obere Grenze eine Unendlichkeitstelle des Integranden ist

Die Lösung wird vermittels elliptischer Integrale in Legendre-Jacobischer Normalform 1. und 2. Gattung ausgedrückt.