А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences — Отделение технических наук
Section of Technical Mechanics — Группа технической механики

ЗАМЕТКИ

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ТЕПЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

(По поводу статьи Н. Н. Лебедева — „Тепловые напряжения в теории упругости“)

П. Ф. ПАПКОВИЧ

(Ленинград)

В вып. 1 т. II. пр. серии „Прикладной математики и механики“ помещена статья Н. Лебедева, при чтении которой может показаться, что вопрос о тепловых напряжениях есть вопрос совершенно новый. На самом деле давно уже известны не только основные уравнения этой задачи, но и то их частное решение, прибавлением которого к общему интегралу однородных уравнений Ламе можно составить общий интеграл тепловых напряжений. Решение это принимает особенно простой и наглядный вид, если в нем механические свойства рассматриваемого изотропного тела характеризовать не постоянными Ламе, а модулем Юнга E, модулем сдвига G и пуассоновым отношением σ. В этих обозначениях система основных уравнений для нахождения тепловых напряжений имеет вид:

$$\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma}\operatorname{grad}(\alpha t), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
X_x &= G\left[2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\operatorname{div}\mathbf{V} - \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma}\alpha t\right], & X_y &= G\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
Y_y &= G\left[2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\operatorname{div}\mathbf{V} - \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma}\alpha t\right], & Y_z &= G\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right],\\
Z_z &= G\left[2\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\operatorname{div}\mathbf{V} - \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma}\alpha t\right], & Z_x &= G\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right].
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w$$

есть искомый вектор перемещения, α — коэффициент теплового линейного расширения, t — температура.

Нетрудно видеть, что уравнению (1) можно удовлетворить, полагая

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \operatorname{grad} \omega, \tag{3}$$

где ω есть любое частное достаточно непрерывное решение уравнения:

$$\nabla^2 \omega = \alpha t. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) совместно с (2) дают для компонентов напряжения, удовлетворяющие системе (1), (2), следующее частное решение:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{E}{1-\sigma}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right], & X_y &= +\frac{E}{1-\sigma}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y}, \\ Y_y &= -\frac{E}{1-\sigma}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right], & Y_z &= +\frac{E}{1-\sigma}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y\, \partial z}, \\ Z_z &= -\frac{E}{1-\sigma}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right]; & Z_x &= +\frac{E}{1-\sigma}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z\, \partial x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы от полученного частного решения уравнений (1), (2) перейти к общему их интегралу, достаточно принять:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0, \tag{6}$$

где $\mathbf{V}_0$ есть любая форма общего интеграла однородных уравнений Ламе, и прибавить к правой части выражений (5) составляющие, соответствующие выбранному выражению для $\mathbf{V}_0$.

Решение (3), (4), (5) не ново. В частности, его можно узнать в формулах (15), (16), (17) стр. 70 четвертого тома Enzyclopädie der Math. Wiss. издания 1907—1914 гг., в которых, однако, искомое частное решение уравнения (4) выражено с помощью Ньютонова потенциала величины αt. В приведенном выше частном решении уравнений (1), (2) мы предпочли сохранить за ω значение любого частного решения уравнения (4), так как в некоторых частных задачах уравнение (4) имеет более простые решения, чем даваемое Ньютоновым потенциалом его правой части.

Положив в (1), (2)

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

можно получить для плоской задачи решение, аналогичное решению (3), (4), (5). Оно, очевидно, должно быть тождественно с тем частным решением плоской тепловой задачи теории упругости, которое в формулах (12) статьи Н. Н. Лебедева выражается производными функции T_1.

ALLGEMEINES INTEGRAL DER WÄRMESPANNUNGEN

P. F. PAPKOWITCH

Bemerkung zum Aufsatz von N. Lebedew — „Über die Wärmespannungen in der Elastizitätstheorie.