АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ТЕОРИЯ МАГНИТНО-СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЗАИМОИНДУКЦИИ

А. М. ЭФРОС

(Харьков)

Рассмотрим контуры, представленные на фиг. 1.

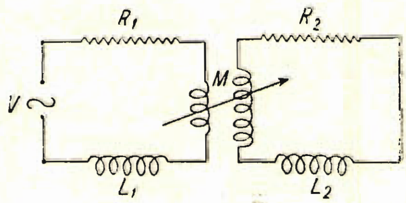
К первичным клеммам схемы подведено переменное напряжение:

$$V = V_0 \sin(\omega t + \varepsilon). \tag{1}$$

Коэффициент взаимоиндукции положим равным

$$M = M_0 \cos \omega t, \tag{2}$$

откуда видно, что частота изменения взаимоиндукции равна частоте изменения подведенной эдс. Этот случай реализуется в целом ряде схем (синхронная однофазная машина с неявными полюсами, радио-контуры и т. д.). Поставим себе задачу определить установившиеся значения токов в первичном и вторичном контурах. Параметры первого контура обозначим R_1 (сопротивление), L_1 (самоиндукция), соответственно параметры второго контура R_2, L_2. Дифференциальные уравнения связанных контуров имеют вид:



Фиг. 1.

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + M_0 \frac{d}{dt}(I_2 \cos \omega t) = V_0 \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{3_1}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + M_0 \frac{d}{dt}(I_1 \cos \omega t) = 0. \tag{3_2}$$

Из этой системы уравнений нам нужно определить токи первичного и вторичного контуров I_1 и I_2.

Будем искать решение в форме:

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t-\varphi_n), \tag{4_1}$$

$$I_2=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t-\psi_n), \tag{4_2}$$

в которой коэффициенты A_n, B_n, φ_n и ψ_n подлежат определению.

Подставляя (4_1) и (4_2) в (3_1), получим:

$$\omega L_1 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos(n\omega t-\varphi_n)+R_1\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t-\varphi_n)+$$

$$+\frac{1}{2}\omega M_0\left[\sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}\cos(n\omega t-\psi_{n-1})+\sum_{n=1}^{\infty} nB_{n+1}\cos(n\omega t-\psi_{n+1})\right]=$$

$$=V_0\sin(\omega t+\varepsilon). \tag{5}$$

Умножим обе части выражения (5) на $\cos n\omega t$ и интегрируем от $\omega t=-\pi$ до $\omega t=+\pi$. Мы получим тогда:

$$\omega n L_1 A_n\cos\varphi_n-R_1 A_n\sin\varphi_n+$$

$$+\frac{1}{2}\omega n M_0[B_{n-1}\cos\psi_{n-1}+B_{n+1}\cos\psi_{n+1}]=0 \qquad (\text{при } n\neq 1) \tag{6_1}$$

и

$$\omega L_1 A_1\cos\varphi_1-R_1 A_1\sin\varphi_1+\frac{1}{2}\omega M_0 B_2\cos\psi_2=V_0\sin\varepsilon \qquad (\text{при } n=1). \tag{6_2}$$

Теперь умножим обе части (5) на $\sin\omega t$ и интегрируем от $\omega t=-\pi$ до $\omega t=+\pi$, получим тогда:

$$\omega n L_1 A_n\sin\varphi_n+R_1 A_n\cos\varphi_n+$$

$$+\frac{1}{2}\omega n M_0[B_{n-1}\sin\psi_{n-1}+B_{n+1}\sin\psi_{n+1}]=0 \qquad (\text{при } n\neq 1) \tag{7_1}$$

и

$$\omega L_1 A_1\sin\varphi_1+R_1 A_1\cos\varphi_1+\frac{1}{2}\omega M_0 B_2\sin\psi_2=V_0\cos\varepsilon \qquad (\text{при } n=1). \tag{7_2}$$

Умножим уравнение (7_1) на $i=\sqrt{-1}$ и сложим его с (6_1). Мы получим после деления на $\frac{1}{2}\omega n M_0$ следующее выражение:

$$\frac{2L_1}{M_0}A_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)+i\frac{2R_1}{\omega n M_0}A_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)+$$

$$+B_{n-1}(\cos\psi_{n-1}+i\sin\psi_{n-1})+B_{n+1}(\cos\psi_{n+1}+i\sin\psi_{n+1})=0, \tag{8}$$

или

$$\frac{2L_1}{M_0}A_n e^{i\varphi_n}+i\frac{2R_1}{\omega n M_0}A_n e^{i\varphi_n}+B_{n-1}e^{i\psi_{n-1}}+B_{n+1}e^{i\psi_{n+1}}=0. \tag{8_1}$$

Аналогично из (6_2) и (7_2):

$$\frac{2L_1}{M_0} A_1 e^{i\varphi_1} + i \frac{2R_1}{\omega M_0} A_1 e^{i\varphi_1} + B_2 e^{i\psi_2} = i \frac{2V_0}{\omega M_0} e^{-i\varepsilon}. \tag{8_2}$$

Точно так же получим:

$$\frac{2L_2}{M_0} B_n e^{i\psi_n} + i \frac{2R_2}{\omega n M_0} B_n e^{i\psi_n} + A_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}} + A_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}} = 0 \tag{9_1}$$

и

$$\frac{2L_2}{M_0} B_1 e^{i\psi_1} + i \frac{2R_2}{\omega M_0} B_1 e^{i\psi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = 0. \tag{9_2}$$

Обозначим:

$$\frac{2L_1}{M_0} + i \frac{2R_1}{\omega n M_0} = u_n, \quad \frac{2L_2}{M_0} + i \frac{2R_2}{\omega n M_0} = v_n;$$

$$A_n e^{i\varphi_n} = \alpha_n, \quad B_n e^{i\psi_n} = \beta_n;$$

$$i \frac{2V_0}{\omega M_0} e^{-i\varepsilon} = Q.$$

Тогда уравнения (8_1)—(9_2) можно записать в виде систем, при помощи которых найдем коэффициенты $A_1, B_1, \ldots, B_n$ и т. д.:

$$\begin{aligned} u_1 \alpha_1 + \beta_2 &= Q, \\ \beta_1 + u_2 \alpha_2 + \beta_3 &= 0, \\ \beta_2 + u_3 \alpha_3 + \beta_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned} v_1 \beta_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 + v_2 \beta_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + v_3 \beta_3 + \alpha_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Группируем уравнения (10), (11) в виде:

$$\begin{aligned} u_1 \alpha_1 + \beta_2 &= Q, \\ \alpha_1 + v_2 \beta_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \beta_2 + u_3 \alpha_3 + \beta_4 &= 0, \\ \alpha_3 + v_3 \beta_4 + \alpha_5 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} v_1 \beta_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 + u_2 \alpha_2 + \beta_3 &= 0, \\ \alpha_2 + v_3 \beta_3 + \alpha_4 &= 0, \\ \beta_3 + u_4 \alpha_4 + \beta_5 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{13}$$

после чего их можно записать в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
u_1+\frac{\beta_2}{\alpha_1}&=\frac{Q}{\alpha_1},\\
\frac{\alpha_1}{\beta_2}+v_2+\frac{\alpha_3}{\beta_2}&=0,\\
\frac{\beta_2}{\alpha_3}+u_3+\frac{\beta_4}{\alpha_3}&=0,\\
\frac{\alpha_3}{\beta_4}+v_4+\frac{\alpha_5}{\beta_4}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{12_1}
$$

и

$$
\begin{aligned}
v_1+\frac{\alpha_2}{\beta_1}&=0,\\
\frac{\beta_1}{\alpha_2}+u_2+\frac{\beta_3}{\alpha_2}&=0,\\
\frac{\alpha_2}{\beta_3}+v_3+\frac{\alpha_4}{\beta_3}&=0,\\
\frac{\beta_3}{\alpha_4}+u_4+\frac{\beta_5}{\alpha_4}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{13_1}
$$

Если обратиться к уравнениям (12_1), то из первого найдем:

$$\frac{Q}{\alpha_1}=u_1+\frac{\beta_2}{\alpha_1},$$

из второго:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1}=\frac{1}{-v_2-\dfrac{\alpha_3}{\beta_2}},$$

из третьего:

$$\frac{\alpha_3}{\beta_2}=\frac{1}{-u_3-\dfrac{\beta_4}{\alpha_3}}.$$

Ясно, что

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1}=\frac{1}{-v_2-\dfrac{1}{-u_3-\dfrac{\beta_4}{\alpha_3}}}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим:

$$\frac{Q}{\alpha_1}=\gamma_1=u_1-\frac{1}{v_2-}\,\frac{1}{u_3-}\,\frac{1}{v_4-}\,\frac{1}{u_5}-\ldots \tag{14}$$

Далее, обозначив

$$-\frac{\alpha_1}{\beta_2}=\gamma_2,\qquad -\frac{\beta_2}{\alpha_3}=\gamma_3$$

и т. д., получим:

$$\gamma_2 = v_2 - \frac{1}{u_3 -} \frac{1}{v_4 -} \frac{1}{u_5 -} \frac{1}{v_6 -} \cdots \qquad (14_1)$$

$$\gamma_3 = u_3 - \frac{1}{v_4 -} \frac{1}{u_5 -} \frac{1}{v_6 -} \frac{1}{u_7 -} \cdots \qquad (14_2)$$

. . . .

Тем же путем, обозначив

$$\frac{Q}{\beta_1} = \delta_1, \qquad -\frac{\beta_1}{\alpha_2} = \delta_2, \qquad -\frac{\alpha_2}{\beta_3} = \delta_3, \ldots,$$

получим:

$$\delta_1 = v_1 - \frac{1}{u_2 -} \frac{1}{v_3 -} \frac{1}{u_4 -} \frac{1}{v_5 -} \cdots \qquad (15)$$

$$\delta_2 = u_2 - \frac{1}{v_3 -} \frac{1}{u_4 -} \frac{1}{v_5 -} \frac{1}{u_6 -} \cdots \qquad (15_1)$$

$$\delta_3 = v_3 - \frac{1}{u_4 -} \frac{1}{v_5 -} \frac{1}{u_6 -} \frac{1}{v_7 -} \cdots \qquad (15_2)$$

. . . .

Из формул (15), (15_1), (15_2) и т. д. имеем:

$$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \alpha_4 = \ldots = 0. \qquad (16)$$

Из формул (14), (14_1), (14_2) и т. д. следует:

$$\alpha_1 = \frac{Q}{\gamma_1}, \qquad \beta_2 = -\frac{Q}{\gamma_1 \gamma_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{Q}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}; \ldots \qquad (17)$$

Из уравнений (7) получаем:

$$\begin{aligned}
&A_1 (\sin\varphi_1 - i\cos\varphi_1) = \frac{2V_0}{\omega M_0} \frac{1}{\gamma_1} e^{-i\varepsilon}, && A_2 = 0;\\
&B_2 (\sin\psi_2 - i\cos\psi_2) = -\frac{2V_0}{\omega M_0} \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} e^{-i\varepsilon}, && B_1 = 0;\\
&A_3 (\sin\varphi_3 - i\cos\varphi_3) = \frac{2V_0}{\omega M_0} \frac{1}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} e^{-i\varepsilon}, && A_4 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_{2n+1} = 0, && A_{2n} = 0.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Отсюда видно, что I_1 (ток первичного контура) содержит только нечетные гармоники, а I_2 (ток вторичного контура) содержит только четные гармоники.

Выражения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ равны:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \left(\frac{2L_1}{M_0} + i\frac{2R_1}{\omega M_0}\right) - \frac{1}{\left(\frac{2L_2}{M_0} + i\frac{2R_2}{2\omega M_0}\right) -} \frac{1}{\left(\frac{2L_1}{M_0} + i\frac{2R_1}{3\omega M_0}\right) -} \cdots\\
\gamma_2 &= \left(\frac{2L_2}{M_0} + i\frac{2R_2}{2\omega M_0}\right) - \frac{1}{\left(\frac{2L_1}{M_0} + i\frac{2R_1}{3\omega M_0}\right) -} \frac{1}{\left(\frac{2L_2}{M_0} + i\frac{2R_1}{4\omega M_0}\right) -} \cdots
\end{aligned} \qquad (19)$$

и т. д.

Пользуясь уравнениями (18), (19), мы найдем величины:

$$A_1,\ \varphi_1,\ A_3,\ \varphi_3,\ \ldots,\ A_{2n+1},\ \varphi_{2n+1},\ \ldots$$

и

$$B_2,\ \varphi_2,\ B_4,\ \varphi_4,\ \ldots,\ B_{2n},\ \varphi_{2n},\ \ldots$$

Для приближенных подсчетов достаточно взять первые два-три члена для γ_1, γ_2 и т. д.

Полученные выше непрерывные дроби сходятся, как это легко показать пользуясь, например, признаком сходимости Vleck-Iensen (Oskar Perron,— ...Kettenbrüche.., стр. 264. 1929).

2 VII 1935.

THEORIE MAGNETISCH GEKOPPELTER SCHWINGUNGSKREISE MIT VARIABLEM GEGENSEITIGEN INDUKTIONSKOEFFIZIENTEN

A. M. EFROSS

(Kharkow)

(Zusammenfassung)

Zwei Schwingungskreise (fig. 1) durch die variable gegenseitige Induktion

$$M = M_0 \cos \omega t$$

gekoppelt. Die im primären Kreis variable Spannung ist

$$V = V_0 \sin (\omega t + \varepsilon).$$