

## АРКИ НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

(Основы расчета)<sup>1</sup>

Д. В. ВАЙНБЕРГ

(Киев)

В настоящее время существует богатая литература, посвященная все-стороннему изучению балок, лежащих на упругом основании.

Однако во всех исследованиях авторы ограничиваются исключительно рассмотрением балок с прямолинейной осью. Только в сочинении проф. Кеити Хаяси „Теория расчета балок на упругом основании“ приведены некоторые данные, относящиеся к расчету обратных сводов, очерченных по дуге окружности.

В основу исследования положено известное дифференциальное уравнение

$$EJ \left( \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{r^2} \right) = -M,$$

где принята во внимание только радиальная составляющая упругого перемещения.<sup>2</sup> Вопрос не получил дальнейшего развития.

<sup>1</sup> Настоящая статья является первой главой работы, посвященной расчету кривых брусьев на упругом основании.

<sup>2</sup> См. статьи проф. И. Я. Штаермана: „Основные идеи современной теории куполов и сводов“ (Тр. Всес. конф. по бет. и железобет., М. 1932); „Расчет купола как арки на упругом основании“ („Проект и стандарт“, № 9, 1933); „Устойчивость оболочек“ (Тр. Киевск. авиацион. инст., № 2, 1934).

В последней статье проведена также аналогия между теорией полых куполов и плит на упругом основании.

Другой весьма важный практический прием расчета куполов, содержащий аналогию между работой купола и балки на упругом основании, имеется в статьях проф. Пастернака: „Практический расчет на изгиб цилиндрических, сферических и конических оболочек и круглой плиты на упругом основании во взаимной монолитной связи“ (Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1926); „Практический расчет на изгиб круглых резервуаров со сводчатыми днищами и перекрытиями и линейно-переменной толщиной в стенках днищ и перекрытий“ (Schweiz. Bauzeitung, 1927).

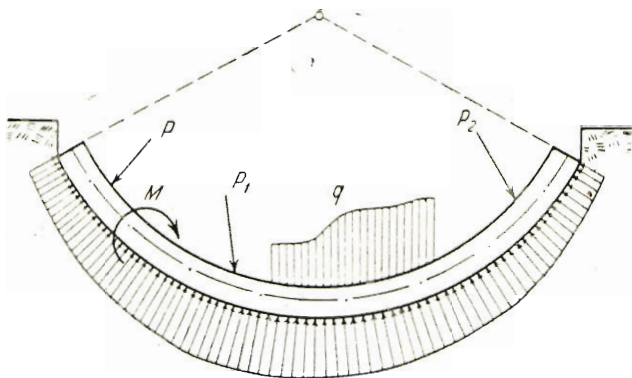
Между тем, с некоторых пор возникла настоятельная необходимость в изучении работы кривых брусев, лежащих на упругом основании. Это связано, с одной стороны, с возможностью применения результатов к расчету некоторых типов сооружений: например, трубы, уложенной в грунт, тоннелей, обратных сводов и т. п., и с другой, — с новым методом расчета куполов и оболочек, выдвинутым проф. И. Я. Штаерманом.

Сущность этого метода заключается в том, что вместо того, чтобы рассчитывать оболочки вращения, пользуясь общими уравнениями теории упругости, автор сопоставляет оболочку с аркой на упругом основании и получает, таким образом, теорию этих оболочек, пользуясь исключительно методом строительной механики.<sup>1</sup>

### 1. Основные предпосылки и уравнения равновесия

Рассмотрим кривой брус, покоящийся на упругом основании (фиг. 1). Будем исходить из следующих допущений:

1. Реакция основания перпендикулярна в каждой точке к срединной поверхности бруса и пропорциональна нормальной составляющей упругого перемещения.



Фиг. 1.

2. Линейные элементы, перпендикулярные к срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и располагаются нормально к деформированной срединной поверхности.

Будем также предполагать, что продольные волокна при изгибе не оказывают друг на друга давления; следовательно, можно пренебречь напряжениями, нормальными к срединной поверхности.

Перейдем к составлению уравнений равновесия. На фиг. 2 представлен выделенный двумя нормальными сечениями элемент арки. Обозначим через  $R$

<sup>1</sup> Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность руководителю секции прикладной теории упругости Математического института УАН И. Я. Штаерману за ценные указания и совет в выборе темы.

радиус кривизны срединной поверхности, через  $\varphi$  — угол между нормалью к оси элемента и начальным направлением  $OO$ .

Ориентация естественных координатных осей показана на фиг. 2. К грани  $A$  выделенного элемента приложены усилия  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . При переходе к грани  $B$  момент, перерезывающая и нормальная силы получают приращение и будут соответственно равны:  $M + dM$ ,  $Q + dQ$ ,  $N + dN$ .

На элемент действует, кроме того, упругая реакция основания  $p$  кг/см. Будем считать, что на данном отрезке внешние воздействия отсутствуют.

Напишем уравнения равновесия выделенного элемента

$$1) \sum x = 0,$$

$$Q \sin \frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\varphi}{2} + dN = 0;$$

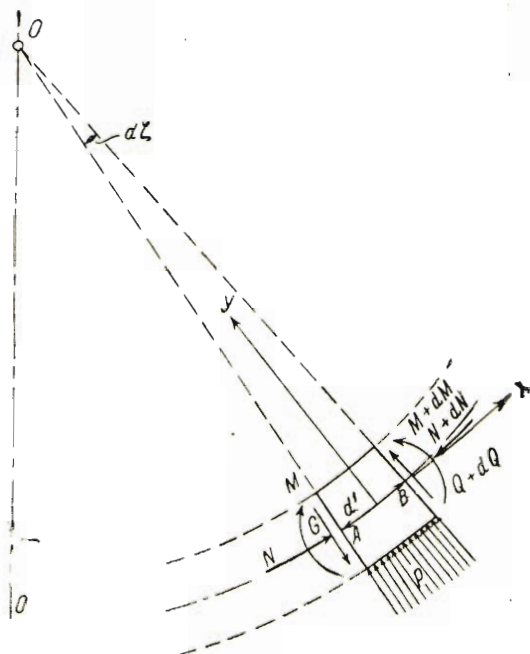
$$2) \sum y = 0,$$

$$-p ds + N \sin \frac{d\varphi}{2} +$$

$$+ (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - dQ = 0;$$

$$3) \sum M_B = 0,$$

$$dM - Q ds - p ds \frac{ds}{2} - N d\varphi \frac{ds}{2} = 0.$$



Фиг. 2.

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, получим дифференциальные уравнения равновесия в таком виде:

$$-\frac{dN}{d\varphi} = Q,$$

$$-\frac{dQ}{d\varphi} = p \cdot R - N, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = Q.$$

## 2. Уравнения упругости

Перейдем к составлению уравнений упругости. Для этого рассмотрим деформацию арки и величины, связанные с ней.

Примем следующие обозначения:

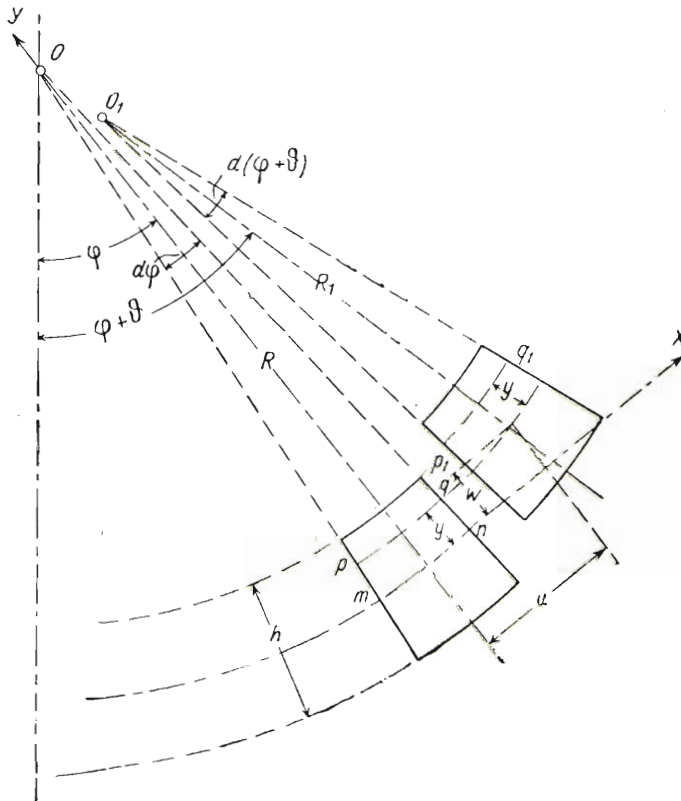
$\epsilon$  — относительное удлинение слоя, совпадающего с срединной поверхностью;

$\vartheta$  — величина, характеризующая приращение угла  $\varphi$  вследствие деформации, или, что то же, угол поворота элемента;

$u$  — составляющая упругого перемещения точек срединной поверхности в направлении касательной (оси  $x$ ), будем считать его положительным в сторону возрастания угла  $\varphi$ ;

$w$  — то же в направлении оси  $y$ , положительно в направлении внутренней нормали.

Пользуясь новыми величинами, составим добавочные уравнения. На фиг. 3 изображен элемент арки до и после деформации.



Фиг. 3.

Начнем с определения  $\varepsilon$ . Относительное удлинение оси элемента  $AB$  арки складывается из двух величин: из удлинения, происходящего вследствие перемещения элемента по касательной, и из удлинения, зависящего от перемещения по направлению внутренней нормали. Элемент  $AB$  арки вследствие перемещения вдоль оси  $x$  займет положение  $A_1B_1$ , причем перемещение точки  $B$ , равное  $BB_1 = u$ , а перемещение точки  $A$ , равное  $AA_1 = u + du$  (фиг. 4а). Следовательно, абсолютное удлинение элемента составляет  $du$ , а так как его первоначальная длина была  $AB = R d\varphi$ , то относительное удлинение вследствие перемещения вдоль оси  $x$  будет:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{du}{d\varphi}.$$

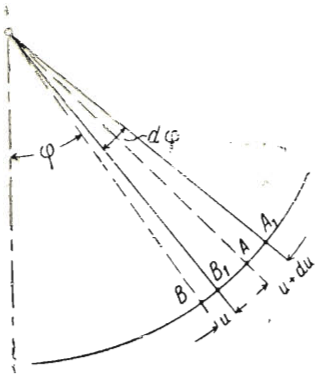
Перемещаясь вдоль внутренней нормали, элемент  $AB$  займет положение  $A_2 B_2$  (фиг. 4b), причем перемещение точки  $A$  равно  $w$ , а перемещение точки  $B$ , равное  $BB_3 = w + dw$ .

Пренебрегая поворотом элемента на бесконечно малый угол  $B_2 A_2 B_3$  (совершаемая при этом ошибка является бесконечно малой высшего порядка), мы можем положить:

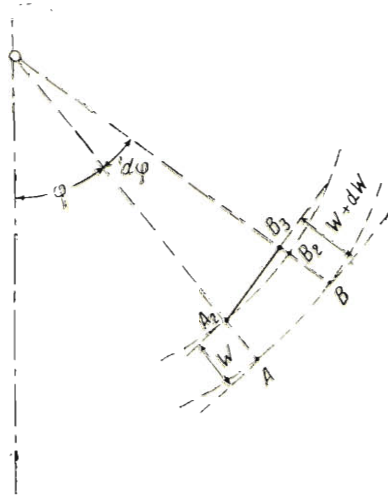
$$A_2 B_2 = A_2 B_3 = OA \cdot d\varphi = (R - w) d\varphi.$$

Тогда:

$$\varepsilon_2 = \frac{A_2 B_2 - AB}{AB} = \frac{(R - w) d\varphi - R d\varphi}{R d\varphi} = -\frac{w}{R}.$$



Фиг. 4а.



Фиг. 4б.

Складывая величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , найдем полное относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right). \quad (2)$$

Полученное выражение относительного удлинения относится к точкам срединной поверхности и соответствует действию нормальных сил.

Следуя закону Гука и пользуясь (2), можно выразить нормальную силу через компоненты перемещения, а именно:

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right). \quad (3)$$

Рассмотрим еще следующий случай деформации. Пусть отрезок арки деформируется так, что первоначальная длина соответствующего элемента срединной поверхности остается неизменной и равной  $ds = R d\varphi$ . Деформация определяется только тем, что сечения, оставаясь плоскими, лишь поворачиваются относительно линий пересечения их с срединной поверхностью.

Выделим из нашего элемента (фиг. 5) бесконечно тонкий слой  $pq$ , параллельный срединной поверхности и отстоящий от нее на расстоянии  $y$ . Первоначальная длина его равна:

$$(R - y) d\varphi.$$

При повороте это волокно получит приращение:

$$qq' = y d\vartheta,$$

и относительное удлинение представится формулой:

$$\varepsilon_y = \frac{y d\vartheta}{(R - y) d\varphi} = \frac{y}{R} \frac{d\vartheta}{\left(1 - \frac{y}{R}\right) d\varphi}. \quad (4)$$

Если поперечные размеры бруска малы по сравнению с радиусом кривизны, то величиной  $\frac{y}{R}$  можно пренебречь по сравнению с единицей.<sup>1</sup>

Тогда:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{R} \frac{d\vartheta}{d\varphi}. \quad (4a)$$

Заметим, что относительному удлинению, выраженному формулой (4), соответствует гиперболический закон распределения напряжения по сечению (фиг. 6).

Заменяя выражение (4) формулой (4a), мы принимаем линейное распределение напряжений.

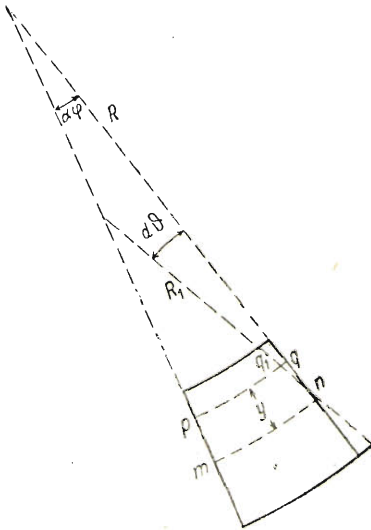
Совершаемая при этом ошибка весьма незначительна. Как показывают подробные исследования,<sup>2</sup> с возрастанием  $\frac{R}{h}$  разность между распределениями напряжений для кривого и призматического бруска падает: при  $\frac{R}{h} = 4$  отклонения не превосходят 9%, при  $\frac{R}{h} = 10$  эти отклонения составляют лишь 3%.

Остается еще вывести формулу, связывающую величину  $\vartheta$  с перемещениями  $u$  и  $w$ . Перемещение вдоль оси  $x$  точки срединной поверхности на величину  $u$  вызовет изменение угла  $\varphi$  на величину (фиг. 7a):

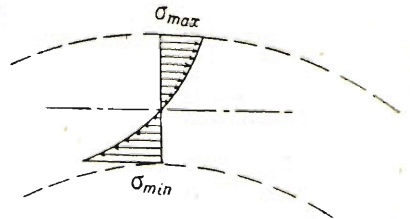
$$\vartheta_1 = \frac{u}{R}.$$

<sup>1</sup> Это в особенности относится к оболочкам, где  $\frac{y}{R}$  весьма малая величина по сравнению с единицей.

<sup>2</sup> С. П. Тимошенко, Курс сопротивления материалов, стр. 389, 1932.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

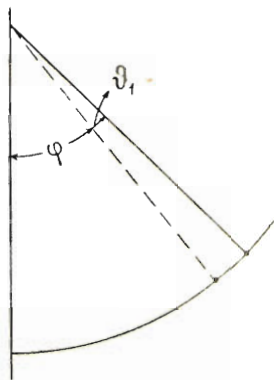
Вследствие перемещения вдоль нормали элемент  $AB$  арки займет положение  $A_2B_3$  (фиг. 7b): перемещение точки  $A$  равно  $AA_2 = w$ , точки  $B$   $BB_3 = w + dw$ . При этом элемент повернется на некоторый угол  $B_2A_2B_3$ , который и будет равен углу поворота нормали к срединной поверхности арки в точке  $A$ , т. е. приращение угла будет:

$$\vartheta_2 = \frac{B_2B_3}{A_2B_2} = \frac{dw}{(R-w)d\varphi} \approx \frac{1}{R} \frac{dw}{d\varphi}.$$

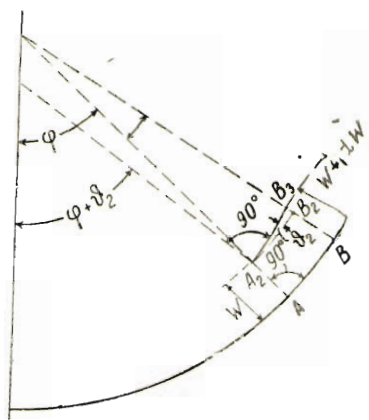
Следовательно, полное изменение угла  $\varphi$  вследствие деформации будет равно:

$$\vartheta = \frac{1}{R} \left( u + \frac{dw}{d\varphi} \right). \quad (5)$$

Это так называемое уравнение совместности.



Фиг. 7а.



Фиг. 7б.

Обращаясь к основным уравнениям упругости и пользуясь формулами (4а) и (5), нетрудно выразить изгибающий момент через составляющие перемещения:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{1}{R} \frac{d \left[ \frac{1}{R} \left( u + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right]}{d\varphi}. \quad (6)$$

Таким образом в результате учета упругих деформаций мы располагаем шестью уравнениями: три уравнения равновесия (1), два — упругости (3) и (6), одно — совместности (5), достаточными для определения шести неизвестных  $u$ ,  $w$ ,  $\vartheta$ ,  $M$ ,  $N$  и  $Q$ , характеризующих напряжения и деформации.

### 3. Основные дифференциальные уравнения

(Круговая арка постоянного сечения)

Пусть  $R = \text{const}$ ;  $EJ = \text{const}$ . Будем также предполагать, что жесткость основания  $k = k_0 b$  постоянная величина, причем, как известно,  $b$  — ширина подошвы арки,  $k_0 \frac{кг}{см^3}$  — коэффициент жесткости основания при осадке.

Перейдем к решению уравнений. Для этого преобразуем их следующим образом.

Продифференцируем уравнение (1a) и подставим значение  $\frac{dQ}{d\varphi}$  в уравнение (1b).

Получим:

$$pR - N = \frac{d^2N}{d\varphi^2}.$$

Заменяя в последнем уравнении  $N$  и его вторую производную значениями из (3), а также имея в виду, что  $p = kw$ , приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^3u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2} - aw = 0, \quad (8)$$

где для сокращения принято:

$$a = \frac{kR^2}{EF} + 1. \quad (8a)$$

Затем из (1a) и (1c) будем иметь:

$$\frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{dN}{d\varphi}.$$

Выразив на основании формул (3) и (6)  $N$  и  $M$  через перемещения, получим второе уравнение:

$$\frac{d^3w}{d\varphi^3} - b \frac{dw}{d\varphi} + c \frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0, \quad (9)$$

при этом принято:

$$b = \frac{FR^2}{J}, \quad c = b + 1. \quad (9a)$$

Из найденной системы уравнений (8), (9) нетрудно получить дифференциальное уравнение шестого порядка относительно одной переменной.

Продифференцировав уравнение (8) и вычтя из него (9), найдем

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{1}{a+b} \frac{d^4u}{d\varphi^4} + \frac{1+c}{a+b} \frac{d^2u}{d\varphi^2}. \quad (10)$$

Если теперь заменить в уравнении (9)  $w$  и его производные значениями из формулы (10) и произвести необходимые преобразования, то приходим к следующему основному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно  $u$ :

$$\frac{d^6u}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4u}{d\varphi^4} + \mu^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0, \quad (11)$$

где принято:

$$\mu^2 = ac - b = 1 + \frac{kR^2}{EJF} (FR^2 + J). \quad (11a)$$



## 4. Определение усилий и деформаций

Найдем интеграл уравнения (11). Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$r^6 + 2r^4 + \mu^2 r^2 = 0,$$

с шестью решениями:

$$r_1 = r_2 = 0,$$

$$r_{3,4,5,6} = \pm(\alpha \mp \beta i),$$

если положить

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu-1}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu+1}{2}}.$$

Принимая во внимание, что  $\mu > 1$ , можно общее решение уравнения (11) записать в следующем виде:

$$u = B_1 + B_2 \varphi + (B_3 \operatorname{ch} \alpha \varphi + B_4 \operatorname{sh} \alpha \varphi) \cos \beta \varphi + \\ + (B_5 \operatorname{ch} \alpha \varphi + B_6 \operatorname{sh} \alpha \varphi) \sin \beta \varphi, \quad (12)$$

где  $B_1, B_2, \dots, B_6$  представляют собой постоянные интегрирования.

Для определения функции  $w$  мы выберем следующий путь. Будем исходить из уравнения (10); проинтегрировав его, мы выразим  $w$  через производные найденной функции  $u$ .

Обратимся к (12) и будем искать:

$$\frac{du}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2}, \quad \frac{d^3 u}{d\varphi^3}.$$

Имеем:

$$\frac{du}{d\varphi} = B_2 + B_3 (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) + \\ + B_4 (\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) + \\ + B_5 (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) + \\ + B_6 (\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi). \quad (13)$$

Дифференцируя это уравнение и подставляя

$$\alpha^2 - \beta^2 = -1, \quad 2\alpha\beta = \sqrt{\mu^2 - 1},$$

получим выражение:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = B_1 + B_2 \varphi - u - \sqrt{\mu^2 - 1} [(B_3 \operatorname{sh} \alpha \varphi + \\ + B_4 \operatorname{ch} \alpha \varphi) \sin \beta \varphi - (B_5 \operatorname{sh} \alpha \varphi + B_6 \operatorname{ch} \alpha \varphi) \cos \beta \varphi]. \quad (14)$$

Наконец, найдем:

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} = B_2 - \frac{du}{d\varphi} - \sqrt{\mu^2 - 1} [B_3 (\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) + \\ + B_4 (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) - \\ - B_5 (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) - \\ - B_6 (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi)]. \quad (15)$$

Подставив полученные значения производных из (13), (14) и (15) в (10) и проделав надлежащие преобразования, получим выражение для  $w$ :

$$w = \frac{1}{\alpha} B_2 + (mB_4 + nB_5) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + (mB_3 + nB_6) \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \\ + (mB_6 - nB_3) \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + (mB_5 - nB_4) \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi, \quad (16)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\frac{\alpha c - \beta \sqrt{\mu^2 - 1}}{a + b} = m, \\ \frac{\beta c + \alpha \sqrt{\mu^2 - 1}}{a + b} = n. \quad (16a)$$

Функция  $w$  содержит те же постоянные интегрирования, что и  $u$ . Для дальнейшего нам понадобятся производные от  $w$ .

Из (16) получим:

$$\frac{dw}{d\varphi} = (mB_4 + nB_5)(\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) + \\ + (mB_3 + nB_6)(\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) + \\ + (mB_6 - nB_3)(\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) + \\ + (mB_2 - nB_4)(\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi). \quad (17)$$

Вторая производная представится после некоторых преобразований в таком виде:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = [\sqrt{\mu^2 - 1}(mB_5 - nB_4) - (mB_4 + nB_5)] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \\ + [\sqrt{\mu^2 - 1}(mB_6 - nB_3) - (mB_3 + nB_6)] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \\ - [\sqrt{\mu^2 - 1}(mB_3 + nB_6) + (mB_6 - nB_3)] \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi - \\ - [\sqrt{\mu^2 - 1}(mB_4 + nB_5) + (mB_5 - nB_4)] \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi. \quad (18)$$

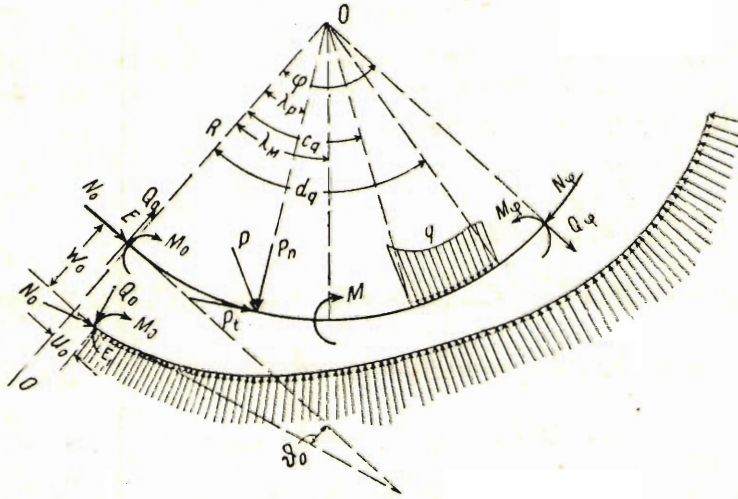
Имея величины  $u$ ,  $\frac{du}{d\varphi}$ ,  $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ ,  $w$ ,  $\frac{dw}{d\varphi}$ ,  $\frac{d^2w}{d\varphi^2}$ , нетрудно найти из формул (6), (3) значения  $M$  и  $N$ . Напишем окончательные результаты.

Выражение для изгибающего момента в любом сечении арки будет иметь следующий вид:

$$-\frac{R^2}{EJ} M = -B_2 + [(n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha)B_4 - (m\sqrt{\mu^2 - 1} - \\ - n + \beta)B_5] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + [(n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha)B_3 - \\ - (m\sqrt{\mu^2 - 1} + n + \beta)B_6] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \\ + [(m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta)B_3 + (n\sqrt{\mu^2 - 1} + \\ + m - \alpha)B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + [(m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta)B_4 + \\ + (n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha)B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi. \quad (19)$$

Нормальная сила будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} N = & \frac{\alpha-1}{\alpha} B_2 + [(\alpha-m) B_4 + (\beta-n) B_5] \operatorname{ch} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ & + [(\alpha-m) B_3 + (\beta-n) B_6] \operatorname{sh} \alpha\varphi \cos \beta\varphi - \\ & - [(\beta-n) B_3 - (\alpha-m) B_6] \operatorname{ch} \alpha\varphi \sin \beta\varphi - \\ & - [(\beta-n) B_4 - (\alpha-m) B_5] \operatorname{sh} \alpha\varphi \sin \beta\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$



Фиг. 8.

Перерезывающую силу найдем из условия  $Q = \frac{dN}{d\varphi}$ . Ее выражение может быть представлено в окончательном виде так:

$$\begin{aligned} -\frac{R}{EF} Q = & [(\mu - \alpha m - \beta n) B_3 + (\beta m - \alpha n) B_6] \operatorname{ch} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ & + [(\mu - \alpha m - \beta n) B_4 + (\beta m - \alpha n) B_5] \operatorname{sh} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ & + [(\beta m - \alpha n) B_4 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_5] \operatorname{ch} \alpha\varphi \sin \beta\varphi + \\ & + [(\beta m - \alpha n) B_3 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_6] \operatorname{sh} \alpha\varphi \sin \beta\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Наконец, из уравнения

$$\vartheta = \frac{1}{R} \left( u + \frac{dw}{d\varphi} \right)$$

получим выражение для угла поворота:

$$\begin{aligned} R\vartheta = & B_1 + B_2 \varphi + [(1 + \alpha m - \beta n) B_3 + (\alpha n + \beta m) B_6] \operatorname{ch} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_4 + (\alpha n + \beta m) B_5] \operatorname{sh} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_3 - (\alpha n + \beta m) B_6] \operatorname{ch} \alpha\varphi \sin \beta\varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_4 - (\alpha n + \beta m) B_5] \operatorname{sh} \alpha\varphi \sin \beta\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Напомним, что приведенное решение является общим интегралом однородного дифференциального уравнения, составленного в предположении отсутствия внешних воздействий на рассматриваемом участке.

Преобразуем полученные нами результаты, пользуясь методом начальных параметров.<sup>1</sup>

Для этого поместим начало отсчета углов  $\varphi$  на левом конце арки (фиг. 8).

Пусть

$$\begin{aligned} M_{\varphi=0} &= M_0, & N_{\varphi=0} &= N_0, & Q_{\varphi=0} &= Q_0, \\ \mathfrak{D}_{\varphi=0} &= \mathfrak{D}_0, & u_{\varphi=0} &= u_0, & w_{\varphi=0} &= w_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив эти значения соответственно в уравнения (12), (16), (19), (20), (21) и (22) и положив  $\varphi=0$ , получим следующую систему уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} 1) \quad u_0 &= B_1 + B_3, \\ 2) \quad w_0 &= \frac{1}{a} B_2 + mB_4 + nB_5, \\ 3) \quad \frac{R^2}{EJ} M_0 &= + B_2 + (n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_4 + (m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_5, \\ 4) \quad \frac{R}{EF} N_0 &= \frac{a-1}{a} B_2 + (\alpha - m) B_4 + (\beta - n) B_5, \\ 5) \quad -\frac{R}{EF} Q_0 &= (\mu - \alpha m - \beta n) B_2 + (\xi m - \eta n) B_6, \\ 6) \quad R\mathfrak{D}_0 &= B_1 + (1 + \alpha m - \beta n) B_3 + (\alpha n + \beta m) B_6, \end{aligned} \quad (24)$$

из которой постоянные интегрирования  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  и  $B_6$  определяются через линейные комбинации начальных параметров  $u_0, w_0, \mathfrak{D}_0, M_0, N_0$  и  $Q_0$ .

Наконец, заменим в уравнениях (12), (16), (20), (21) и (22) величины  $B_1, B_2, \dots, B_6$  их выражениями через начальные параметры.

После упрощений получим значение перемещений в зависимости от начальных условий и перемещений:

$$\begin{aligned} u &= \left( \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) u_0 + \\ &+ (A_1 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_4 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) w_0 + \\ &+ \left( 1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) R\mathfrak{D}_0 + \\ &+ \left( -\frac{a}{\mu^2} \varphi + A_2 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_5 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\ &+ \left( \frac{ab}{\mu^2} \varphi - A_3 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_6 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{R}{EF} N_0 + \\ &+ \left( b(1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{R}{\mu EF} Q_0; \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>1</sup> Мы следуем обобщенному методу в том виде, в каком он дан в работах проф. А. А. Уманского. См. „Специальный курс строительной механики“, ч. I, ОНТИ, 1935.

радиальное упругое перемещение:

$$\begin{aligned}
 w = & (A_7 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_8 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) u_0 + \\
 & + (\operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) w_0 - \\
 & - (A_7 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_8 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) R \vartheta_0 + \\
 & + (-1 + \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R^2}{\mu^2 EJ} M_0 + \\
 & + \left( b(1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{R}{\mu^2 EF} N_0 - \\
 & - (A_9 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{10} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R}{EF} Q_0; \tag{26}
 \end{aligned}$$

изгибающий момент:

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{EJ} M = & (A_{11} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{12} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) u_0 + \\
 & + \left( \frac{(a-1)b}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) w_0 - \\
 & - (A_{11} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{12} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) R \vartheta_0 + \\
 & + \left( \frac{a}{\mu^2} + \left( 1 - \frac{a}{\mu^2} \right) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left( a(-1 + \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{bR}{\mu^2 EF} N_0 + \\
 & + (A_{13} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_{14} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R}{EF} Q_0; \tag{27}
 \end{aligned}$$

нормальная сила:

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} N = & (A_{15} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_{16} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) u_0 + \\
 & + \left( \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) w_0 - \\
 & - (A_{15} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_{16} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) R \vartheta_0 + \\
 & + \left( -1 + \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{(a-1)R^2}{\mu^2 EJ} M_0 - \\
 & - \left[ -1 + \left( 1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right] \frac{b(a-1)}{\mu^2 EF} N_0 + \\
 & + (-A_{17} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{18} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R}{EF} Q_0; \tag{28}
 \end{aligned}$$

перерезывающая сила:

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} Q = & (A_{19} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) u_0 + \\
 & + (A_{20} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{21} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) w_0 - \\
 & - (A_{19} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) R \vartheta_0 + \\
 & + (A_{22} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_{23} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\
 & - (A_{24} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{25} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + (\operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{R}{FE} Q_0;
 \end{aligned} \tag{29}$$

угол поворота:

$$\begin{aligned}
 R \vartheta = & \left( \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) u_0 - \\
 & - (A_{20} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{21} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{b}{\mu} w_0 + \\
 & + \left( 1 + \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) R \vartheta_0 - \\
 & - \left( \frac{a}{\mu} \varphi + b (A_{22} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{23} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \right) \frac{R^2}{\mu EJ} M_0 + \\
 & + \left( \frac{a}{\mu} \varphi + A_{24} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - A_{25} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right) \frac{bR^2}{\mu EF} N_0 + \\
 & + (1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + \sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \frac{bEF}{R} Q_0;
 \end{aligned} \tag{30}$$

где приняты следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} [(a-1)m \sqrt{\mu^2 - 1} + n - \beta], \\
 A_2 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} (an - \beta), \\
 A_3 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} [m \sqrt{\mu^2 - 1} + \beta - (a+1)n], \\
 A_4 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} [m - \alpha - n(a-1) \sqrt{\mu^2 - 1}], \\
 A_5 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} (\alpha - am), \\
 A_6 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2 - 1}} [\alpha - n \sqrt{\mu^2 - 1} - (a+1)m], \\
 A_7 &= m + n \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \\
 A_8 &= n - m \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}},
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
A_9 &= \frac{1}{\mu} \left( bm + \frac{acn}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \right), \\
A_{10} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{acm}{\sqrt{\mu^2 - 1}} - bn \right), \\
A_{11} &= (n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta), \\
A_{12} &= (m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) + \frac{a+1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha), \\
A_{13} &= \left[ \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) - b(n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) \right] \frac{1}{\mu}, \\
A_{14} &= \left[ \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (n\sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) + b(m\sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) \right] \frac{1}{\mu}, \\
A_{15} &= (\alpha - m) + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (\beta - n), \\
A_{16} &= (\beta - n) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (\alpha - m), \\
A_{17} &= \frac{1}{\mu} \left[ b(\alpha - m) + \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (\beta - n) \right], \\
A_{18} &= \frac{1}{\mu} \left[ b(\beta - n) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} (\alpha - m) \right], \\
A_{19} &= -\frac{\mu}{a+b} \frac{(\mu^2 - 1)(a-1)^2}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \\
A_{20} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_1 + \sqrt{\mu^2 - 1}A_4], \\
A_{21} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_4 - \sqrt{\mu^2 - 1}A_1], \\
A_{22} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_2 - \sqrt{\mu^2 - 1}A_5], \\
A_{23} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_5 + \sqrt{\mu^2 - 1}A_2], \\
A_{24} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_3 + \sqrt{\mu^2 - 1}A_6], \\
A_{25} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_6 - \sqrt{\mu^2 - 1}A_3],
\end{aligned} \tag{31}$$

Коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_{25}$ , как видно из предыдущего, выражаются через величины  $F, J, R, k, E$ .

В случае прямоугольного сечения арки можно вести расчет на единицу ширины. Если обозначить

$$\frac{R}{h} = s; \quad \frac{k}{E} = t^1$$

то коэффициенты  $A$  всегда могут быть выражены через  $s, t$  и  $R$ .

<sup>1</sup>  $h$  — высота сечения арки.

Нетрудно составить таблицы с величинами коэффициентов  $A$  для встречающихся на практике значений  $s$  и  $t$ . Это значительно облегчит пользование выведенными формулами при расчете.

Полученные формулы дают возможность определять усилия и перемещения в любом сечении арки в зависимости от факторов, соответствующих другому („начальному“) сечению. Как видно из формул, влияние этих отдельных причин следует принципу независимости действия сил и малых деформаций.

При постоянных значениях величин, характеризующих упругие свойства основания и арки, а также геометрическую конфигурацию последней, это влияние определяется коэффициентами

$$\operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi, \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi, \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi,$$

при соответствующем значении  $\varphi$ , т. е. угла, образованного нормальными через сечение, в котором приложен данный фактор, и через рассматриваемое сечение. Учтем теперь действие местной нагрузки.

Допустим, что на арку действуют (фиг. 8):

а) сосредоточенные силы  $P$  (с угловыми координатами  $\lambda_p$ ), причем будем обозначать нормальные составляющие сил  $P_n$ , касательные составляющие  $P_t$ ;

б) сосредоточенные моменты  $M$  в сечении  $\lambda_m$ ;

в) распределенная нагрузка интенсивностью  $q = f(\varphi)$  (кг/м) на участке от  $\lambda = c_q$  до  $\lambda = d_q$ .

Обозначим нормальную составляющую нагрузки  $q_n$  касательную составляющую  $q_t$ .

Очевидно, эти последние могут быть приняты за новые начальные параметры, но при этом за начало отсчета углов надобно принимать не  $OO$ , а, соответственно положению каждого фактора, сечения с угловыми координатами  $\lambda_p$ ,  $\lambda_m$  и т. д.

Для учета действия сосредоточенной местной нагрузки можно воспользоваться готовыми формулами (25), (26), (27), (28), (29) и (30), но при этом нужно иметь в виду, что аргументами функций

$$\operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi, \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi, \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi, \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi$$

будут углы исследуемого сечения от новых начал, т. е.

$$\varphi - \lambda_p, \quad \varphi - \lambda_m$$

и т. д.

Действие распределенной нагрузки может быть выражено интегралами от элементарных факторов  $q_n d\lambda$ ,  $q_t d\lambda$ .

При нескольких сосредоточенных силовых факторах или нескольких участках распределенных воздействий будем иметь суммы интегралов.

Напишем для  $u_\varphi$ ,  $w_\varphi$ ,  $\vartheta_\varphi$ ,  $M_\varphi$ ,  $N_\varphi$  и  $Q_\varphi$  развернутые формулы, учитывающие совместное действие всех факторов.

Для сокращения записи обозначим:

$$\operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi = \bar{C}_\varphi, \quad \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi = \bar{S}_\varphi, \quad \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi = \bar{C}'_\varphi, \quad \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi = \bar{S}'_\varphi;$$



касательное упругое перемещение:

$$\begin{aligned}
u_{\varphi} = & \left( \bar{C}_{\varphi} + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} \right) u_0 + (A_1 \bar{S}_{\varphi} - A_4 \bar{C}_{\varphi}) w_0 + \\
& + \left( 1 - \bar{C}_{\varphi} - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} \right) R \vartheta_0 + \left( -\frac{a}{\mu^2} \varphi + A_2 \bar{S}_{\varphi} + A_5 \bar{C}_{\varphi} \right) \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
& + \left( \frac{ab}{\mu^2} \varphi - A_3 \bar{S}_{\varphi} + A_6 \bar{C}_{\varphi} \right) \frac{R}{EF} N_0 + \left[ b(1 - \bar{C}_{\varphi}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} \right] \frac{R}{\mu EF} Q_0 + \\
& + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} \left[ -\frac{a}{\mu^2} (\varphi - \lambda) + A_2 \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_5 \bar{C}_{\varphi-\lambda} \right] \dot{M} + \\
& + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \left[ \frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda) - A_3 \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_6 \bar{C}_{\varphi-\lambda} \right] P_n + \\
& + \frac{R}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} \left[ b(1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_t + \\
& + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[ \frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda) - A_3 \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_6 \bar{C}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda + \\
& + \frac{R}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[ b(1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_t d\lambda; \tag{32}
\end{aligned}$$

радиальное упругое перемещение:

$$\begin{aligned}
w_{\varphi} = & [A_7 \bar{S}_{\varphi} - A_8 \bar{C}_{\varphi}] u_0 + \bar{C}_{\varphi} w_0 - [A_7 \bar{S}_{\varphi} - A_8 \bar{C}_{\varphi}] R \vartheta_0 + \\
& + [-1 + \bar{C}_{\varphi} + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi}] \frac{R^2}{\mu^2 EJ} M_0 + \\
& + \left[ \frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi}) - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} \right] \frac{R}{EF} N_0 - [A_9 \bar{S}_{\varphi} + A_{10} \bar{C}_{\varphi}] \frac{R}{EF} Q_0 + \\
& + \frac{R^2}{\mu^2 EJ} \sum_0^{\varphi} [-1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda}] \dot{M} + \\
& + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \left[ \frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_n - \\
& - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [A_9 \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{10} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
& + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[ \frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda - \\
& - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [A_9 \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{10} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda; \tag{33}
\end{aligned}$$

изгибающий момент:

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{EJ} M_\varphi = & [A_{11} \bar{S}_\varphi + A_{12} \bar{C}_\varphi] u_0 + \left[ \frac{(a-1)b}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] w_0 - [A_{11} \bar{S}_\varphi + A_{12} \bar{C}_\varphi] R \vartheta_0 + \\
 & + \left[ \frac{a}{\mu^2} + \left( 1 - \frac{a}{\mu^2} \right) \bar{C}_\varphi + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left[ a(-1 + \bar{C}_\varphi) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] \frac{bR}{\mu^2 EF} N_0 + \\
 & + [A_{13} \bar{S}_\varphi - A_{14} \bar{C}_\varphi] \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^\varphi \left[ \frac{a}{\mu^2} + \left( 1 - \frac{a}{\mu^2} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] \dot{M} + \\
 & + \frac{bR}{\mu^2 EF} \sum_0^\varphi \left[ a(-1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^\varphi [A_{13} \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{14} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
 & + \frac{bR}{\mu^2 EF} \sum_0^\varphi \int_a^d \left[ a(-1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^\varphi \int_c^d [A_{13} \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{14} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda;
 \end{aligned} \tag{34}$$

нормальная сила:

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} N_\varphi = & [A_{15} \bar{S}_\varphi - A_{16} \bar{C}_\varphi] u_0 + \left[ \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] w_0 - [A_{15} \bar{S}_\varphi - A_{16} \bar{C}_\varphi] R \vartheta_0 + \\
 & + \left[ -1 + \left( 1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] \frac{(a-1)R^2}{\mu^2 EJ} M_0 - \\
 & - \left[ -1 + \left( 1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] \frac{b(a-1)R}{\mu^2 EF} N_0 + \\
 & + [-A_{17} \bar{S}_\varphi + A_{18} \bar{C}_\varphi] \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{(a-1)R^2}{\mu^2 EJ} \sum_0^\varphi \left[ -1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] \dot{M} - \\
 & - \frac{b(a-1)R}{\mu^2 EF} \sum_0^\varphi \left[ -1 + \left( 1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^\varphi [-A_{17} \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{18} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_t - \\
 & - \frac{b(a-1)R}{\mu^2 EF} \sum_0^\varphi \int_a^d \left[ -1 + \left( 1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^\varphi \int_c^d [-A_{17} \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{18} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda;
 \end{aligned} \tag{35}$$

перерезывающая сила:

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} Q_{\varphi} = & [A_{19} \bar{S}_{\varphi}] u_0 + [A_{20} \bar{S}_{\varphi} + A_{21} \bar{C}_{\varphi}] w_0 - \\
 & - [A_{19} \bar{S}_{\varphi}] R\vartheta_0 + [A_{22} \bar{S}_{\varphi} - A_{23} \bar{C}_{\varphi}] \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\
 & - [A_{24} \bar{S}_{\varphi} + A_{25} \bar{C}_{\varphi}] \frac{R}{EF} N_0 + [\bar{C}_{\varphi} + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi}] \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} [A_{22} \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{23} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] \dot{M} - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [A_{24} \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{25} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [\bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi-\lambda}] P_t - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [A_{24} \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{25} \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [\bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda;
 \end{aligned} \tag{36}$$

угол поворота:

$$\begin{aligned}
 R\vartheta_{\varphi} = & \left[ \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} \right] u_0 + [-A_{20} \bar{S}_{\varphi} + A_{21} \bar{C}_{\varphi}] \frac{b}{\mu} w_0 + \\
 & + \left[ 1 + \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} \right] R\vartheta_0 - \left[ \frac{a}{\mu} \varphi + b(A_{22} \bar{S}_{\varphi} + A_{23} \bar{C}_{\varphi}) \right] \frac{R^2}{\mu EJ} M_0 + \\
 & + \left[ \frac{a}{\mu} \varphi + A_{24} \bar{S}_{\varphi} - A_{25} \bar{C}_{\varphi} \right] \frac{bR}{\mu EF} N_0 + [1 - \bar{C}_{\varphi} + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi}] \frac{b \cdot R}{\mu EF} Q_0 - \\
 & - \frac{R^2}{\mu EJ} \sum_0^{\varphi} \left[ \frac{a}{\mu} (\varphi - \lambda) + b(A_{22} \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{23} \bar{C}_{\varphi-\lambda}) \right] \dot{M} + \\
 & + \frac{bR}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} \left[ \frac{a}{\mu} (\varphi - \lambda) + A_{24} \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{25} \bar{C}_{\varphi-\lambda} \right] P_n + \\
 & + \frac{bR}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} [1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
 & + \frac{bR}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[ \frac{a}{\mu} (\varphi - \lambda) + A_{24} \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{25} \bar{C}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{bR}{\mu EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[ \frac{b}{\mu} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) + \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_t d\lambda.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Правило знаков соответствует условиям, принятым при выводе уравнений равновесий, и обозначениям упругих перемещений. Для простоты записи в выражении  $\varphi - \lambda$  опущены индексы при  $\lambda$ , соответствующие различным силовым факторам.

Исключительное достоинство метода начальных параметров заключается в том, что полученные формулы позволяют при расчете арки на упругом основании с любой нагрузкой ограничиться решением системы не более трех уравнений.

### 5. Численный пример

Рассчитаем, пользуясь полученными результатами, арку, лежащую на упругом основании и нагруженную по свободным концам одинаковыми моментами.

Будем исходить из следующих данных:

$$F = 24 \cdot 40 \text{ см}^2,$$

$$J = \frac{24 \cdot 40^3}{12} \text{ см}^4,$$

$$E = 14 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$k_0 = 14 \text{ кг/см}^3,$$

$$R = 5 \text{ м},$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ (центральный угол).}$$

(38)

Концы арки свободны.

За начало отсчета углов  $\varphi$  примем ось симметрии  $00$ .

Учитывая характер нагрузки и условия на концах, можно пользоваться расчетными формулами в первоначальной редакции — (12), (16), (19), (20), (21) и (22).

Для определения постоянных интегрирования  $B_1, B_2, \dots, B_6$  имеем следующие условия:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \varphi = 0 & 1) \ u = 0, \\ & 2) \ \vartheta = 0, \\ & 3) \ Q = 0, \\ & 4) \ N = 0, \\ \text{„ } \varphi = \frac{\pi}{6} & 5) \ Q = 0, \\ & 6) \ M = \dot{M}. \end{array} \quad (39)$$

Подставив эти значения последовательно в формулы (12), (22), (21), (20), (21) и (19), получим систему уравнений относительно постоянных  $B$ .

Из первых трех уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & B_1 + B_3 = u_{\varphi=0} = 0, \\ 2) \quad & B_1 + (1 + \alpha m - \beta n) B_3 + (\alpha n + \beta m) B_6 = \vartheta_{\varphi=0} = 0, \\ 3) \quad & (\mu - \alpha m - \beta n) B_3 + (\beta m - \alpha n) B_6 = Q_{\varphi=0} = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

найдем, что

$$B_1 = B_3 = B_6 = 0.$$

Остальные три уравнения запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} 4) \quad & \frac{a-1}{a} B_2 + [(\alpha - m) B_4 + (\beta - n) B_5] \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6} - \\ & - [(\beta - n) B_4 - (\alpha - m) B_5] \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6} = 0, \\ 5) \quad & [(\mu - \alpha m - \beta n) B_4 + (\beta m - \alpha n) B_5] \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6} + \\ & + [(\beta m - \alpha n) B_4 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_5] \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6} = Q_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 0, \\ 6) \quad & -B_2 + [(n\sqrt{\mu^2-1} + m - \alpha) B_4 - \\ & - (m\sqrt{\mu^2-1} - n + \beta) B_5] \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6} + \\ & + [(m\sqrt{\mu^2-1} - n + \beta) B_4 + \\ & + (n\sqrt{\mu^2-1} + m - \alpha) B_5] \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6} = \frac{R^3}{EJ} \dot{M}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подсчитаем сперва величины коэффициентов, стоящих при  $B$  и зависящих от упругих свойств основания и арки, а также от геометрических размеров. Ниже в таблице 1 помещены рядом с точными значениями также приближенные, вычисленные в предположении, что

$$\begin{aligned} c = b + 1 &\simeq b, \\ \sqrt{\mu^2 - 1} &\simeq \mu. \end{aligned}$$

Такое допущение весьма мало отражается на результатах, но позволяет значительно упростить все формулы.

Решив последние три уравнения системы, найдем:

$$\begin{aligned} B_2 &= 1.91417 \cdot 10^{-8} \dot{M}, \\ B_4 &= 0.98365 \cdot 10^{-8} \dot{M}, \\ B_5 &= 1.5535 \cdot 10^{-8} \dot{M}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См. (9а) и (11а).

Таблица 1

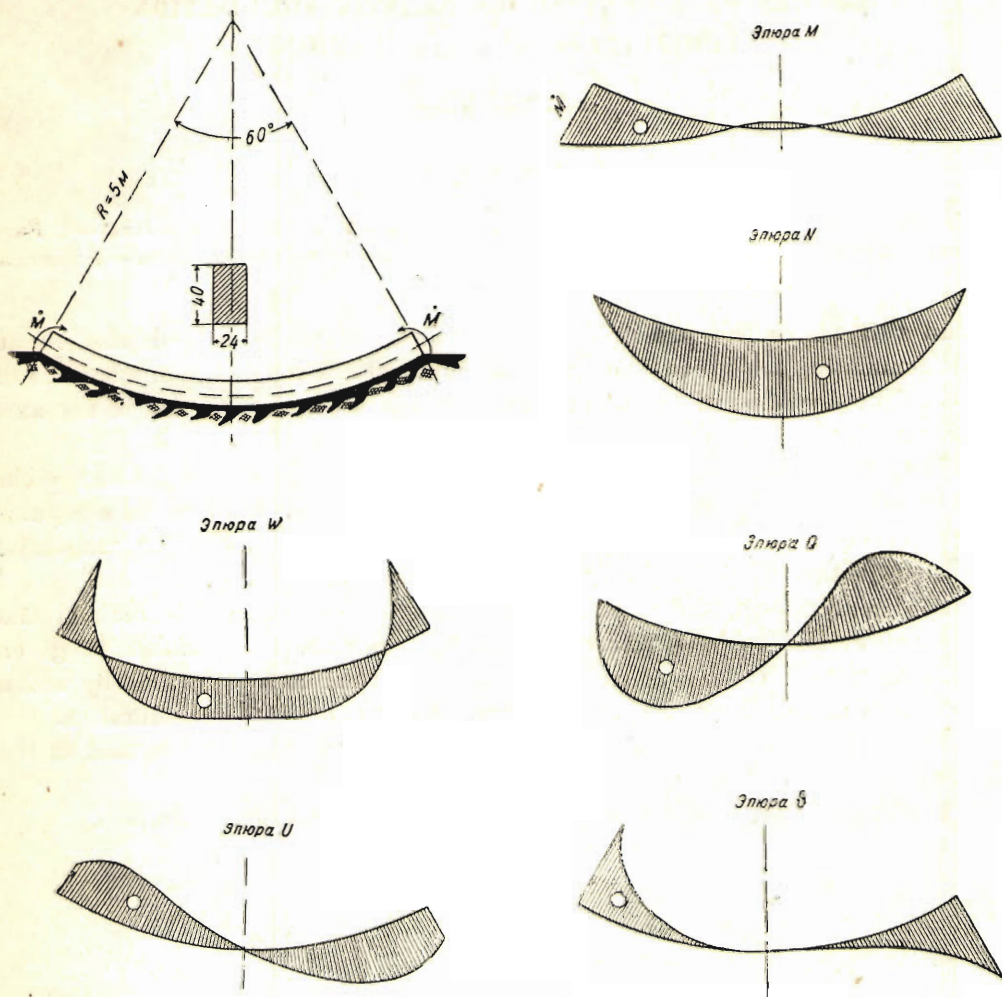
Величина коэффициентов

| Коэффициенты  | Точная величина | Приближенное значение |
|---|-----------------|-----------------------|
| $a$   | 1.625           | —                     |
| $b$   | 1875            | —                     |
| $c$   | 1876            | 1875                  |
| $\mu$   | 34.2532         | 34.2326               |
| $\sqrt{\mu^2 - 1}$  | 34.242          | 34.233                |
| $\alpha$  | 4.077           | 4.076                 |
| $\beta$   | 4.198           | 4.197                 |
| $\mu$   | 3.99905         | 3.99589               |
| $n$   | 4.2678          | 4.26772               |
| $\alpha - m$  | 0.0802          | 0.08011               |
| $\beta - n$   | -0.0707         | -0.06972              |
| $\mu - \alpha m - \beta n$  | 0.0192          | 0.0190                |
| $\beta m - \alpha n$  | -0.62477        | -0.62448              |
| $1 + \alpha m - \beta n$  | -0.62545        | -0.62437              |
| $\alpha n + \beta m$  | 34.2008         | 34.16598              |
| $n \sqrt{\mu^2 - 1}$  | 146.2469        | 146.09686             |
| $m \sqrt{\mu^2 - 1}$  | 136.93547       | 136.79130             |
| $n \sqrt{\mu^2 - 1} - (\alpha - m)$                               | 146.17165       | 146.01675             |
| $m \sqrt{\mu^2 - 1} + (\beta - n)$                                | 136.86249       | 136.72158             |
| $\operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6}$ | -2.51624        | —                     |
| $\operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6}$ | 3.37843         | —                     |
| $\operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6}$ | 3.47437         | —                     |
| $\operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6}$ | -2.44676        | —                     |

Имея значения постоянных интегрирования, можно на основании формул (12), (16), (19), (20), (21) и (22) составить выражения для  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $u$  и т. д. в любом сечении.

$$\begin{aligned}
 u &= \dot{M} \cdot 10^{-8} (-1.91417 \varphi + 0.98365 \bar{S}_\varphi + 1.5535 \bar{C}_\varphi), \\
 w &= \dot{M} \cdot 10^{-8} (1.17795 + 10.56079 C_\varphi + 2.00992 \bar{S}_\varphi), \\
 M &= \dot{M} \cdot 10^{-3} (1.37208 - 49.27615 \bar{C}_\varphi + 258.89096 \bar{S}_\varphi), \\
 N &= \dot{M} \cdot 10^{-3} (-1.979 - 0.08317 \bar{C}_\varphi + 0.52182 \bar{S}_\varphi), \\
 Q &= \dot{M} \cdot 10^{-3} (2.52788 \bar{S}_\varphi + 1.78021 \bar{C}_\varphi), \\
 \mathfrak{z} &= \dot{M} \cdot 10^{-9} (-0.03828 \varphi + 1.04937 \bar{S}_\varphi - 0.69156 \bar{C}_\varphi).
 \end{aligned}$$

По этим выражениям построены эпюры, изображенные на фиг. 9—15.



Фиг. 9—15.

Таблица 2

Значения ординат эпюр

| $\varphi$ | $u$                             | $w$                             | $M$                              | $N$                | $Q$                             | $S$                              |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|--------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 0         | 0                               | $11.7387 \cdot 10^{-8} \dot{M}$ | $-47.9041 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-2.14932 \dot{M}$ | 0                               | 0                                |
| 6°        | $0.8992 \cdot 10^{-8} \dot{M}$  | $11.9693 \cdot 10^{-8} \dot{M}$ | $0.1136 \cdot 10^{-3} \dot{M}$   | $-1.85609 \dot{M}$ | $-1.8098 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-0.08922 \cdot 10^{-9} \dot{M}$ |
| 12°       | $1.8605 \cdot 10^{-8} \dot{M}$  | $12.0096 \cdot 10^{-8} \dot{M}$ | $149.0891 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-1.52395 \dot{M}$ | $-3.4491 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-0.10263 \cdot 10^{-9} \dot{M}$ |
| 18°       | $2.720 \cdot 10^{-8} \dot{M}$   | $9.5173 \cdot 10^{-8} \dot{M}$  | $393.3013 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-1.5042 \dot{M}$  | $-4.3870 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-0.8732 \cdot 10^{-9} \dot{M}$  |
| 24°       | $3.01515 \cdot 10^{-8} \dot{M}$ | $0.8412 \cdot 10^{-8} \dot{M}$  | $703.6624 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-1.95553 \dot{M}$ | $-3.7226 \cdot 10^{-3} \dot{M}$ | $-2.4677 \cdot 10^{-9} \dot{M}$  |
| 30°       | $1.9809 \cdot 10^{-8} \dot{M}$  | $-18.523 \cdot 10^{-8} \dot{M}$ | $1.000 \dot{M}$                  | 0                  | 0                               | $-4.98026 \cdot 10^{-9} \dot{M}$ |

## ARCHES ON A CONTINUOUS ELASTIC FOUNDATION (PRINCIPLES OF CALCULATION)

D. V. WEINBERG

(Summary)

1. Principal assumptions and the equations of equilibrium. — 2. Elasticity equations. — 3. Fundamental differential equations. — 4. Determination of stresses and deformations. — Numerical example.

In this paper the principles of calculation of plane curved bars on an elastic foundation are given; the plane of curvature is normal to the surface of support. The direction of the foundation is taken along the normal to the axis of the bar.

The basic differential equation is developed in which the length of the bar is taken into account. For the case of a circular arc it has the form of a regular differential equation of the sixth order with respect to the radial or tangential component of the elastic displacement of the bar along its axis.

The general solution of this equation in a closed form is obtained and offered as formulas for the stresses and displacements. The solution is given both in the usual form and according to the initial parameters method by which the action of an arbitrary load can be very simply taken into consideration.

The results can be applied to the calculation of tunnel pipes laid in the soil, bottoms of docks, etc.

The application of this theory is illustrated by numerical examples.

---