АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ, ПОДКРЕПЛЕННЫЕ УПРУГИМИ РЕБРАМИ И ТОЧЕЧНЫМИ УПРУГИМИ ОПОРАМИ

А. П. ФИЛИППОВ

(Харьков)

В настоящей работе рассматривается изгиб, колебание и устойчивость прямоугольной пластинки, подкрепленной упругими ребрами, а также упругими опорами в ряде отдельных точек.

В дальнейшем будем предполагать, что прямоугольная пластинка ограничена контуром

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,$$

причем края пластинки

$$x=0,\ x=a$$

предполагаются опертыми, края

$$y=0,\ y=b$$

закрепленными любым образом.

В дальнейшем введены обозначения:

a, b — длины сторон, $\mu=\frac{b}{a}$,

h — толщина пластинки,

ν — коэффициент Пуассона,

$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки,

$B=EJ$ — жесткость ребра,

A — площадь поперечного сечения ребра,

w — прогиб пластинки,

c — коэффициент упругости опоры, т. е. та сила, которая получается при осадке опоры, равной единице.

В дальнейшем при составлении общих решений, чтобы избежать условий сопряжения, будет везде применен метод акад. А. Н. Крылова.

1. Изгиб прямоугольной пластинки

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} F(x, y), \tag{1}$$

где $F(x, y)$ — нагрузка, отнесенная к единице поверхности пластинки.

Вводя безразмерные координаты

$$x = a\xi, \quad y = a\eta,$$

перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{a^4}{D} f(\xi, \eta). \tag{2}$$

Так как по условию пластинка оперта по краям $x = 0$, $x = a$, т. е. должны быть выполнены условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0,\ x = a,$$

то решение уравнения (2) ищем в виде:

$$w = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi. \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение (2), умножая затем обе части на $\sin n\pi\xi$ и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим:

$$V_n^{\text{IV}} - 2n^2\pi^2 V_n'' + n^4\pi^4 V_n = \varphi(\eta), \tag{4}$$

где

$$\varphi(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^1 f(\xi, \eta) \sin n\pi\xi \, d\xi. \tag{5}$$

Решение уравнения (4) будет:

$$V_n(\eta) = Y_n(\eta) + \Phi_n(\eta), \tag{6}$$

где $Y_n(\eta)$ — решение уравнения (4) без правой части

$$Y_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} n\pi\eta + B_n \operatorname{ch} n\pi\eta + C_n \eta \operatorname{sh} n\pi\eta + D_n \eta \operatorname{ch} n\pi\eta, \tag{7}$$

$\Phi_n(\eta)$ — частное решение с правой частью, которое можно вычислить, пользуясь обычными правилами символического интегрирования уравнений.[1]

Значение $\Phi_n(\eta)$

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^\eta \varphi(t)\, \psi_n(\eta - t)\, dt, \tag{8}$$

[1] См. нашу работу в „Изв. Акад. Наук“, № 7, 1933 г., также № 4.

где

$$\psi_n(\eta - t) = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[(\eta - t)\operatorname{ch} n\pi(\eta - t) - \frac{1}{n\pi}\operatorname{sh} n\pi(\eta - t)\right],$$

причем

$$\Phi_n(0) = 0, \quad \Phi_n'(0) = 0, \quad \Phi_n''(0) = 0, \quad \Phi_n'''(0) = 0. \tag{9}$$

Пользуясь формулой (8), можно получить частное решение для любого распределения нагрузки.

Принимая во внимание значение $\varphi(t)$ (5), имеем:

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^1 \sin n\pi\xi\, d\xi \int_0^\eta f(\xi, t)\,\psi_n(\eta - t)\, dt. \tag{10}$$

В частности, если нагрузка везде равна нулю, за исключением интервала

$$\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_1 + \sigma_1,$$

то $\Phi_n(\eta)$ равна нулю для $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$, а для $\eta_1 + \sigma_1 \leqslant \eta \leqslant \mu$

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^1 \sin n\pi\xi\, d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_1+\sigma_1} p_1\,\psi_n(\eta - t)\, dt.$$

В пределе, когда

$$\sigma \to 0, \; p_1\sigma \to p \quad \text{или} \quad p_1\sigma_1 a \to p,$$

где p — интенсивность нагрузки, распределенной по прямой

$$y = d_1 \quad (\eta = \eta_1),$$

приходящаяся на единицу длины.

Таким образом

$$\Phi_n(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1, \\ \dfrac{2a^3}{D}\displaystyle\int_0^1 p(\xi)\,\psi_n(\eta - \eta_1)\sin n\pi\xi\, d\xi & \;\;\text{"} \quad \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \mu. \end{cases} \tag{11}$$

С помощью формулы (11) и можно получить частное решение для любого распределения нагрузки вдоль прямой $\eta = \eta_1$.

В частности, если нагрузка P_1 сосредоточена в одной точке

$$x = c_1, \; y = d_1 \quad (\xi = \xi_1, \; \eta = \eta_1),$$

то, рассматривая ее как предельное положение нагрузки, распределенной по закону прямоугольника в пределах от $x = c_1$ до $x = c_1 + \sigma_2$ (от $\xi = \xi_1$ до $\xi = \xi_1 + \sigma_2'$), в предположении, что

$$p\sigma_2 \to P \quad (p\sigma_2' a \to P),$$

когда

$$\sigma_2 \to 0,$$

получим:

$$\Phi_n(\eta)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad 0\leqslant\eta\leqslant\eta_1, \\ \frac{2a^2}{D} P_1 \sin n\pi\xi_1\,\psi_n(\eta-\eta_1) & \quad\text{»} \quad \eta_1\leqslant\eta\leqslant\mu. \end{cases} \tag{12}$$

Если пластинка подперта ребром жесткостью B_1, то

$$p=-EJ_1\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_{y=d_1}$$

и из (11) имеем ($\alpha_n=n\pi$):

$$\Phi_n(\eta)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad 0\leqslant\eta\leqslant\eta_1, \\ -\frac{B_1\alpha_n^4}{aD} V_n(\eta_1)\,\psi_n(\eta-\eta_1) & \quad\text{»} \quad \eta_1\leqslant\eta\leqslant\mu. \end{cases} \tag{13}$$

Когда пластинка по прямым

$$\eta=\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_j,\ \ldots,\ \eta_k$$

подперта ребрами жесткостью $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_k$ и, кроме того, пластинка подперта упругими опорами c_{ij} и нагружена сосредоточенными силами P_{ij}, причем опоры и силы предполагаем расположенными на пересечении прямых

$$\eta=\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_j,\ \ldots,\ \eta_k$$

с прямыми

$$\xi=\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_i,\ \ldots,\ \xi_l$$

(некоторые B_i, c_{ij} или P_{ij} можно принять равными нулю), то общее решение уравнения (2) для интервала

$$\eta_k\leqslant\eta\leqslant\eta_{k+1}$$

может быть написано в виде:

$$w(\xi,\eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi=\sum_n\left\{Y_n(\eta)+\Phi_{1n}-\sum_j^{1,k}\left[\frac{EJj\alpha_n^4}{aD}V_n(\eta_j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_i^{1,l}\frac{2a^2}{D}\sin n\pi\xi_i\,(c_{ij}\,w(\xi_i,\eta_j)-P_i)\right]\psi_n(\eta-\eta_j)\right\}\sin n\pi\xi. \tag{14}$$

Здесь Φ_{1n} — частное решение уравнения, соответствующее внешней нагрузке, которое без затруднений вычисляется по общей формуле (8).

В частности, для случая равномерно распределенной нагрузки Φ_{1n} для n четного обращается в нуль, а нечетного

$$\Phi_{1n}(\eta)=\frac{2a^4q}{n^4\pi^4D}\left[\eta\,\mathrm{sh}\,n\pi\eta+\frac{2}{n\pi}(1-\mathrm{ch}\,n\pi\eta)\right] \qquad (n=1,3,5,\ldots). \tag{15}$$

Частное решение $Y_n(\eta)$ (7), после удовлетворения условий для $\eta=0$, будет зависеть от двух произвольных постоянных. Подставляя последовательные значения $w(\xi_i,\eta_j)$ и $Y(\eta_j)$ и удовлетворяя условиям при

$$\eta=\mu \quad (y=b)$$

для каждого n, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных.

Для случая сравнительно небольшого числа опор можно выражение для перемещений найти следующим образом.

Удовлетворяя для каждого значения n условиям заделки для

$$y=b \quad (\eta=\mu),$$

мы получим значения двух постоянных, входящих в $Y_n(\eta)$ и $V_n(\eta)$, в зависимости от $w(\xi_i, \eta_j)$, входящих в (14), а также от $w(\xi_i, \eta_j)$, получаемых от последовательных подстановок значений $V_n(\eta_2)$, $V_n(\eta_3)$.

Полагая затем значения ξ, η равными значениям координат для точечных опор, получим систему уравнений для определения неизвестных значений прогибов $w(\xi_i, \eta_j)$ в этих точках.[1]

Возьмем прямоугольную пластинку, находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки q, опертую по контуру и подпертую по середине ребром жесткостью EJ и упругими опорами жесткостью c в точках

$$\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right) \text{ и } \left(1-\xi_1, \frac{\mu}{2}\right),$$

симметрично относительно середины.

Из условий симметрии деформаций имеем:

$$w\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right)=w\left(1-\xi_1, \frac{\mu}{2}\right).$$

Значения

$$Y_n(\eta)=A_n \operatorname{sh} n\pi\eta + B_n \eta \operatorname{ch} n\pi\eta \qquad \text{для } 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{\mu}{2},$$

$$V_n\left(\frac{\mu}{2}\right)=Y_n\left(\frac{\mu}{2}\right)+\Phi_{1n}\left(\frac{\mu}{2}\right) \qquad \text{„} \quad n=1, 3, 5, \ldots$$

Подчиняя $w(\xi, \eta)$ условиями

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}=0, \qquad \text{для } \eta=\mu,$$

получим для коэффициентов A_n, B_n следующие значения $\left(\gamma=\frac{B}{aD}\right)$:

$$A_n=\frac{2qa^4}{n^4\pi^4 D\delta_n}\left\{16 \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2}-\frac{4n\pi\mu}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\mu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\gamma\left[2n\pi \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2}\left(2 \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{4}-\frac{n\pi\mu}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}\right)+\frac{n^3\pi^3\mu^2}{2\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\mu}{2}}\right]\right\}-$$

$$-\frac{4ca^2}{n\pi D\delta_n}\sin n\pi\xi_1\, w\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right)\frac{\frac{2}{n\pi}+\mu \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}, \tag{16}$$

[1] См. также: С. Гершгорин, Колебание пластинок... Прикладная математика и механика, т. I, 1933.

$$B_n = -\frac{2qa^4}{n^4\pi^4 D\delta_n}\left\{8n\pi \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2} + 2n^2\pi^2\gamma\left(2 - \operatorname{th}^2\frac{n\pi\mu}{2} - \frac{2}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}\right)\right\} + \\ + \frac{4ca^2}{n\pi D\delta_n}\frac{2}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}\sin n\pi\xi_1\, w\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right), \tag{16}$$

где

$$\delta_n = 8n\pi + 2\gamma n^2\pi^2 \operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2} - \frac{n^3\pi^3\mu\gamma}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\mu}{2}},$$

$$w\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right) = \sum_n^{1, 3, 5\ldots}\frac{2qa^4}{n^4\pi^4\delta_n\,\delta D}\left\{16\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}\right) - 4n\pi\mu\,\frac{\operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi\mu}{2}}\right\}\sin n\pi\xi_1,$$

причем

$$\delta = 1 + \sum_n \frac{4ca^2}{\delta_n D}\sin^2 n\pi\xi_1\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\operatorname{th}\frac{n\pi\mu}{2} - \frac{\mu}{n\pi\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\mu}{2}}\right].$$

Выражение для изогнутой поверхности в интервале от 0 до $\frac{\mu}{2}$ будет:

$$w(\xi, \eta) = \sum_n^{1, 3, 5,}\left\{A_n \operatorname{sh} n\pi\eta + B_n\eta \operatorname{ch} n\pi\eta + \right. \\ \left. + \frac{2a^4 q}{n^4\pi^4 D}\left[\eta \operatorname{sh} n\pi\eta + \frac{2}{n\pi}(1 - \operatorname{ch} n\pi\eta)\right]\right\}\sin n\pi\xi. \tag{17}$$

Как видно, ряд для $w(\xi, \eta)$ получается быстро сходящийся.

Аналогичным образом можно произвести вычисления и для других случаев опирания.

В частности, для случая симметричного расположения ребер относительно середины, симметричной нагрузки и одинаковой заделки сторон

$$y = 0, \quad y = b$$

для упрощения вместо условий для $\eta = \mu$ можно удовлетворить условия для $\eta = \frac{\mu}{2}$.

При отсутствии подкрепления по середине эти условия будут:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} = 0, \qquad \text{для } \eta = \frac{\mu}{2}.$$

2. Колебания прямоугольной пластинки[1]

Перемещение $u(x, y, t)$ в направлении оси, перпендикулярной плоскости пластинки, должно удовлетворять в безразмерных координатах

$$\xi, \eta \quad (x = a\xi, \ y = a\eta)$$

[1] Колебание пластинки с сосредоточенными массами рассмотрено в нашей работе (Изв. Акад. Наук, № 4, 1933); другой метод дан С. Гершгориным (l. c.).

дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} + \frac{q a^4}{g D}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^4}{D} F(\xi, \eta, t), \tag{18}$$

где q — вес пластинки, $F(\xi, \eta, t)$ — внешняя сила, отнесенные к единице поверхности.

Предполагая, что внешняя нагрузка — периодическая функция времени

$$F(\xi, \eta, t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) f(\xi, \eta),$$

и разыскивая решение (18) в форме:

$$u = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\, w(\xi, \eta),$$

получим для определения $w(\xi, \eta)$ уравнение:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \beta^2 w = \frac{a^4}{D} f(\xi, \eta), \tag{19}$$

где

$$\beta^2 = \frac{a^4 q \omega^2}{g D}.$$

Решение уравнения (19) ищем в форме:

$$w(\xi, \eta) = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi.$$

После подстановки w в уравнение (19) получим, умножая обе части его на $\sin n\pi\xi$ и интегрируя от 0 до 1:

$$V_n^{IV} - 2n^2\pi^2 V_n'' + (n^4\pi^4 - \beta^2) V_n = f(\eta), \tag{20}$$

где

$$f(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^1 f(\xi, \eta) \sin n\pi\xi \, d\xi.$$

Решение уравнения (20) будет:

$$V_n(\eta) = Y_n(\eta) + \Phi_n(\eta),$$

где $Y_n(\eta)$ — решение уравнения без правой части, $\Phi_n(\eta)$ — частное решение уравнения с правой частью.

Решение уравнения без правой части:

$$Y_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} s_{1n}\eta + B_n \operatorname{ch} s_{1n}\eta + C_n \operatorname{sh} s_{2n}\eta + D_n \operatorname{ch} s_{2n}\eta, \tag{21}$$

где s_{1n}, s_{2n} — корни характеристического уравнения:

$$s_{1n} = -s_{3n} = \sqrt{n^2\pi^2 - \beta}, \quad s_{2n} = -s_{4n} = \sqrt{n^2\pi^2 + \beta}.$$

Пользуясь символическим методом Cauchy или Heaviside, частное решение (21) может быть представлено в виде:

$$Y_n = A_n Y_{0n} + B_n Y_{1n} + C_n Y_{2n} + D_n Y_{3n}, \tag{22}$$

где каждое из частных решений Y_{in} ($i=0, 1, 2, 3$), вместе с производными $Y_{in}^{(r)}$ ($r=0, 1, 2, 3$), удовлетворяет условиям ($Y_{in}^{(0)}=Y_{in}$)

$$Y_{in}^{(r)}=\begin{cases}0, & \text{для } r\neq i\\ 1, & \text{,, } r=i,\end{cases} \qquad (r=0, 1, 2, 3).$$

Значения $Y_{in}^{(r)}$ будут:

$$Y_{0n}=\frac{1}{2\beta}\left(s_{2n}^2\operatorname{ch} s_{1n}\eta - s_{1n}^2\operatorname{ch} s_{2n}\eta\right),$$

$$Y_{1n}=\frac{1}{2\beta}\left(\frac{s_{2n}^2}{s_{1n}}\operatorname{sh} s_{1n}\eta - \frac{s_{1n}^2}{s_{2n}}\operatorname{sh} s_{2n}\eta\right),$$

$$Y_{2n}=\frac{1}{2\beta}(\operatorname{ch} s_{2n}\eta - \operatorname{ch} s_{1n}\eta),$$

$$Y_{3n}=\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{sh} s_{2n}\eta - \frac{1}{s_{1n}}\operatorname{sh} s_{1n}\eta\right).$$

Частное решение уравнения (20) с правой частью

$$\Phi_n(\eta)=\int_0^\eta \varphi(t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt,$$

или согласно значению $\varphi(t)$

$$\Phi_n(\eta)=\frac{2a^4}{D}\int_0^1 \sin n\pi\xi\, d\xi \int_0^\eta f(\xi, t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt.$$

Пользуясь этим выражением, можно аналогично предыдущему получить решение для любого распределения нагрузки вдоль прямой $y=d_1$.

В частности для груза, сосредоточенного в одной точке ($\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$),

$$\Phi_n(\eta)=\begin{cases}0, & \text{для } 0\leqslant\eta\leqslant\eta_1,\\ \dfrac{2a^2}{D}P_1\sin n\pi\xi_1\, Y_{3n}(\eta-\eta_1) & \text{,, } \eta_1\leqslant\eta\leqslant\mu.\end{cases} \tag{12'}$$

Если пластинка подперта в точке и, кроме того, в этой точке имеется масса $\frac{P}{g}$, то давление на пластинку будет

$$-\frac{P}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - cu = \left(\frac{P}{g}\omega^2 - c\right)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\, w(\xi_1, \eta_1)$$

а следовательно, согласно (12') получим:

$$\Phi_n(\eta)=\begin{cases}0 & \text{для } 0\leqslant\eta\leqslant\eta_1\\ \dfrac{2a^2}{D}\left(\dfrac{P}{g}\omega^2 - c\right)w(\xi_1, \eta_1)\sin n\pi\xi_1\, Y_{3n}(\eta-\eta_1) & \text{,, } \eta_1\leqslant\eta\leqslant\mu.\end{cases} \tag{23}$$

Если пластинка подперта ребром, то давление на пластинку будет:

$$-\left(\frac{EJ}{a^4}\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\sum_n\left(\frac{\gamma A}{g}\omega^2-\frac{\alpha_n^4 EJ}{a^4}\right)V_n(\eta_1)\sin n\pi\xi,$$

а следовательно,

$$\Phi_n(\eta)=\begin{cases} 0, & \text{для } 0\leqslant\eta\leqslant\eta_1,\\ \left[\frac{\beta^2 Q}{a^2 q}-\frac{\alpha_n^4 EJ}{aD}\right]V_n(\eta)\,Y_{3n}(\eta-\eta_1) & \text{,, } \eta_1\leqslant\eta\leqslant\mu,\end{cases}\tag{24}$$

где Q — вес ребра.

Когда пластинка по прямым

$$\eta=\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_j,\ \ldots,\ \eta_k$$

подперта ребрами жесткостью

$$EJ_1,\ EJ_2,\ \ldots,\ EJ_j,\ \ldots,\ EJ_k$$

и весом

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_j,\ \ldots,\ Q_k$$

и, кроме того, по этим прямым на пересечении с прямыми

$$\xi=\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_j,\ \ldots,\ \xi_k$$

пластинка подперта опорами c_{ij} и нагружена массами $\frac{P_{ij}}{g}$ (некоторые c_{ij}, P_{ij} или B_i, Q_i могут быть равны нулю), то общее решение для интервала

$$\eta_k\leqslant\eta\leqslant\eta_{k+1}$$

может быть написано в виде:

$$w(\xi,\eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi=$$

$$=\sum_n\left\{Y_n(\eta)+\sum_j^{i,k}\left[\frac{\beta^2 Q_j}{a^2 q}V_n(\eta_j)-\frac{a_n^4 EJ_j}{aD}V_n(\eta_j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_i^{1,l}\frac{2\beta^2}{a^2 q}\left(P_{ij}-\frac{gc_{ij}}{\omega^2}\right)\sin n\pi\xi_i\,w(\xi_i,\eta_j)\right]V_{3n}(\eta-\eta_j)\right\}\sin n\pi\xi.\tag{25}$$

Частное решение этого уравнения $Y_n(\eta)$ необходимо взять в зависимости от условий закрепления в виде:

$$\begin{array}{ll}\text{для опертого края,} & B_n Y_{2n}+D_n Y_{3n}\\ \text{для закрепленного края,} & C_n Y_{2n}+D_n Y_{3n}\\ \text{для свободного края,} & A_n(Y_{0n}+\nu n^2\pi^2 Y_{2n})+B_n(Y_{1n}+(2-\nu)n^2\pi^2 Y_{3n}).\end{array}\tag{26}$$

Уравнение частоты для взятого значения n может быть получено аналогично рассуждениям, приведенным выше (1). Так как для определения значения амплитуд $w(\xi_i, \eta_j)$ получаем систему однородных уравнений, то определитель, составленный из коэффициентов при них, и дает уравнение частоты.

Для примера возьмем квадратную пластинку, опертую по контуру и подпертую ребром по середине и двумя упругими опорами одинаковой жесткости на расстоянии

$$\xi_1=\frac{1}{4}, \quad \xi_2=\frac{3}{4} \quad \left(\eta_1=\frac{1}{2}\right).$$

Для случая опертой пластинки удобно взять решение уравнения в первом интервале $0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{2}$:

$$V_n(\eta)=Y_n(\eta)=A_n \operatorname{sh} s_{1n}\eta+B_n \operatorname{sh} s_{2n}\eta.$$

Для колебаний, симметричных относительно прямой $\xi=\frac{1}{2}$ для $\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1$,

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta)=\sum_n^{1,3,5}\Big\{&A_n\left[\operatorname{sh} s_{1n}\eta+\left(\frac{\beta^2 Q}{a^2 D}-\frac{EJ}{aD}a^4\right)\operatorname{sh} s_{1n}\eta_1\, Y_{3n}(\eta-\eta_1)\right]+\\ &+B_n\left[\operatorname{sh} s_{2n}\eta+\left(\frac{\beta^2 Q}{a^2 D}-\frac{EJ}{aD}\alpha_n^4\right)\operatorname{sh} s_{2n}\eta_1\, Y_{3n}(\eta-\eta_1)\right]+\\ &+\frac{4\beta^2}{a^2 q}\left(P_1-\frac{gc}{\omega^2}\right)\sin\frac{n\pi}{4}\, w\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) Y_{3n}(\eta-\eta_1)\Big\}\sin n\pi\xi. \end{aligned}$$

Определяя значения A_n, B_n из условий для $\eta=\frac{1}{2}$ и полагая затем в (27)

$$\xi=\frac{1}{2}, \quad \eta=\frac{1}{2},$$

получим уравнение частоты, которое можно привести к виду:

$$\frac{2qa^2}{\pi\left(P_1-\frac{gc}{\omega^2}\right)}=\frac{\beta}{\pi}\sum_n^{1,3,5,\ldots}\frac{\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{th}\frac{s_{1n}}{2}-\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{th}\frac{s_{2n}}{2}}{1+\frac{\beta}{4}\left(\alpha-\gamma\frac{\alpha_n^4}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{th}\frac{s_{2n}}{2}-\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{th}\frac{s_{1n}}{2}\right)}, \tag{28}$$

где

$$\alpha=\frac{Q}{a^2 q}, \quad \gamma=\frac{B}{aD}, \quad \alpha_n=\pi n$$

В случае, если

$$\alpha=0, \quad \gamma=0,$$

придем к формуле, полученной С. Гершгориным.

Произведя вычисления для симметрично-симметричных колебаний квадратной пластинки, подпертой двумя ребрами, при

$$\eta_1=\frac{1}{4}, \quad \eta_2=\frac{3}{4}$$

и в четырех точках с координатами

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

получим тоже уравнение частоты, т. е. тот результат, который получен С. Гершгориным для $\alpha=0$, $\gamma=0$, при отсутствии ребра.

Таким образом частоты колебаний, симметричных относительно

$$\xi=\frac{1}{2},$$

для пластинки, подпертой одним ребром, при $\eta=\frac{1}{2}$ и в двух точках $\left(\text{или в одной } \xi=\frac{1}{2}, \eta=\frac{1}{2}\right)$, совпадают с частотами симметрично-симметричных колебаний $\left(\text{относительно } \xi=\frac{1}{2} \text{ и } \eta=\frac{1}{2}\right)$ пластинки, подпертой двумя ребрами при $\eta_1=\frac{1}{4}$, $\eta_2=\frac{3}{4}$ и в четырех точках

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Значения корней β уравнения частоты соответствуют тем значениям β, для которых правая и левая части (28) совпадают.

Корни уравнения частоты (28) можно отделить графически, если нанести на график для заданных α и γ значения правой и левой частей уравнения в зависимости от β и найти точки пересечения их.

3. Устойчивость прямоугольной пластинки

Продольные подкрепления пластинки.[1] Пластинка сжимается силами интенсивностью p на единицу длины, распределенными по краям

$$x=0, \quad x=a \qquad (\xi=0, \quad \xi=1)$$

и направленными параллельно оси x-ов, и подперта ребрами в том же направлении и точечными упругими опорами. Стороны $x=0$, $x=a$ оперты, стороны $y=0$, $y=b$ закреплены любым образом.

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности в безразмерных координатах ξ, η $(x=a\xi,\ y=a\eta)$:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}+\frac{pa^2}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=\frac{a^4}{D}F(\xi, \eta). \tag{29}$$

Решение уравнения попрежнему берем в виде:

$$w=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi.$$

[1] Вопрос об устойчивости прямоугольной пластинки, подпертой ребрами, рассматривался С. Тимошенко (Теория упругости, т. II) В случае одинаковой жесткости ребер и расстояний между ними решение с помощью уравнений в конечных разностях дано А. Локшиным (Прикладная математика и механика, т. II, 1935).

В этом случае V_n определяется из уравнения:

$$V_n^{\mathrm{IV}} - 2n^2\pi^2 V_n'' + n^2\pi^2(n^2\pi^2 - \delta^2)V_n = \varphi(\eta), \tag{30}$$

где

$$\varphi(\eta) = \frac{2a^4}{D}\int_0^1 F(\xi, \eta)\sin n\pi\xi\, d\xi,$$

причем

$$\delta^2 = \frac{pa^2}{D}.$$

Значение

$$V_n(\eta) = Z_n(\eta) + \Phi_n(\eta).$$

Таким образом уравнение для V_n имеет вид, аналогичный полученному для колеблющейся пластинки.

Предполагая, что $\delta^2 > n^2\pi^2$, частное решение уравнения (30) без правой части берем в виде:

$$Z_n = A_n \sin s_{1n}\eta + B_n\cos s_{1n}\eta + C_n \operatorname{sh} s_{2n}\eta + D_n \operatorname{ch} s_{2n}\eta, \tag{31}$$

где

$$s_{1n} = \sqrt{n\pi\delta - n^2\pi^2}, \quad s_{2n} = \sqrt{n\pi\delta + n^2\pi^2}.$$

Решение (31) можно попрежнему представить в виде:

$$Z_n = A_n Z_{0n} + B_n Z_{1n} + C_n Z_{2n} + D_n Z_{3n}, \tag{32}$$

где

$$Z_{in}^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{для } r \neq i, \\ 1 & \text{„} \ \ r = i \end{cases} \qquad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Значения Z_{in} будут:

$$Z_{0n} = \frac{1}{2n\pi\delta}\left(s_{2n}^2 \cos s_{1n}\eta + s_{1n}^2 \operatorname{ch} s_{2n}\eta\right),$$

$$Z_{1n} = \frac{1}{2n\pi\delta}\left(\frac{s_{2n}^2}{s_{1n}}\sin s_{1n}\eta + \frac{s_{1n}^2}{s_{2n}}\operatorname{sh} s_{2n}\eta\right),$$

$$Z_{2n} = \frac{1}{2n\pi\delta}\left(\operatorname{ch} s_{2n}\eta - \cos s_{1n}\eta\right),$$

$$Z_{3n} = \frac{1}{2n\pi\delta}\left(\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{sh} s_{2n}\eta - \frac{1}{s_{1n}}\sin s_{1n}\eta\right).$$

Частное решение уравнения (30) с правой частью имеет тот же вид, что и в 2, только вместо Y_{3n} необходимо поставить Z_{3n}.

Если обозначить продольную силу, приходящуюся на j-е ребро, через p_j, то давление на пластинку

$$p_j' = -\left(\frac{EJ_j}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{p_j}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=\eta_j} =$$

$$= -\sum_n \left(\frac{EJ_j}{a^4}\alpha_n{}^4 - \frac{\alpha_n{}^2}{a^2}p_j\right) V_n(\eta_j)\sin n\pi\xi.$$

В таком случае для изогнутой поверхности пластинки, подпертой ребрами жесткостью EJ_1, EJ_2, $\ldots$, EJ_j, $\ldots$, EJ_k, по прямым

$$\eta=\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_k$$

и, кроме того, точечными упругими опорами жесткостью c_{ij}, расположенными на пересечении с прямыми

$$\xi=\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_i,\ \ldots,\ \xi_l$$

(некоторые $B_i=EJ_i$ или c_{ij} могут быть равны нулю), получим общее решение для интервала $\eta_k\leqslant\eta\leqslant\eta_{k+1}$ в виде:

$$w(\xi,\eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi=$$

$$=\sum\left\{Z_n(\eta)-\sum_j^{1,k}\left[\left(\frac{EJ_j}{aD}\alpha_n^4-\alpha_n^2\delta^2k_j\right)V_n(\eta_j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_i^{1,l}\frac{2a^2c_{ij}}{D}\sin n\pi\xi_i\,w(\xi_i,\eta_j)\right]Z_{sn}(\eta-\eta_i)\right\}\sin n\pi\xi, \tag{33}$$

где

$$k_j=\frac{p_j}{ap},\qquad \alpha_n=n\pi.$$

Частное решение $Z_n(\eta)$ в зависимости от условий закрепления для $\eta=0$ может быть взято в виде (26), где только вместо Y_n должно стоять Z_n.

Пользуясь выражением (33), можно аналогично вышеизложенному в 2 получить в каждом частном случае трансцендентное уравнение для определения критических значений δ.

В частности, для квадратной пластинки, подпертой в двух точках

$$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)$$

или в одной

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

опорой жесткостью c и ребром жесткостью B при $\eta=\frac{1}{2}$:

$$\frac{2D}{a^2c}=\sum_n^{1,3,5,\ldots}\frac{\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{th}\frac{s_{2n}}{2}-\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{tg}\frac{s_{1n}}{2}}{n\pi\delta-\frac{\alpha_n^2}{4}\left(\frac{B}{aD}\alpha_n^2-\delta^2k\right)\left(\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{th}\frac{s_{2n}}{2}-\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{tg}\frac{s_{1n}}{2}\right)}. \tag{34}$$

Критическое значение

$$\delta_{кр}\left(p_{кр}=\frac{\delta_{кр}^2D}{a^2}\right)$$

определяется так же, как было указано выше.

Задаваясь значениями δ, можно для вс того B построить график функции в зависимости от δ, соответствующий пра ой части выражения (34); пересечение этой кривой с прямой $\frac{2D}{a^2 c}$ и дает значения $\delta_{\text{кр}}$.

Для квадратной пластинки, подпертой двумя ребрами при

$$\eta = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{3}{4}$$

и в четырех точках

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

для симметрично-симметричной формы относительно

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2},$$

уравнение для определения $\delta_{\text{кр}}$ получает тот же вид.

Поперечные подкрепления пластинки. Стороны

$$x = 0, \quad x = a$$

пластинки предполагаем попрежнему опертыми. Сжимающие силы распределены равномерно по сторонам $y = 0$, $y = b$ и направлены параллельно оси y-ов. Пластинка подкреплена ребрами, направленными параллельно оси x-ов, и точечными опорами. Стороны $y = 0$, $y = b$ могут быть или оперты, или заделаны упруго или жестко таким образом, что могут смещаться в направлении оси y-ов.

Уравнение изогнутой поверхности:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{pa^2}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{a^4}{D} F(\xi, \eta). \tag{35}$$

Решение уравнения (35) попрежнему берем в форме:

$$w = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi.$$

Для определения V_n получаем уравнение $\left(\delta^2 = \frac{pa^2}{D}\right)$:

$$V_n^{\text{IV}} - (2n^2\pi^2 - \delta^2) V_n'' + n^4\pi^4 V_n = \varphi(\eta), \tag{36}$$

причем $V(\eta)$ определяется прежним выражением:

$$V_n(\eta) = U_n(\eta) + \Phi_n(\eta),$$

где частное решение без правой части U_n будет:

$$U_n = A_n \sin s_{1n}\eta + B_n \cos s_{1n}\eta + C_n \sin s_{2n}\eta + D_n \cos s_{2n}\eta, \tag{37}$$

где

$$s_{1n}=\sqrt{\frac{\delta^2}{2}-n^2\pi^2+\sqrt{\frac{\delta^4}{4}-n^2\pi^2\delta^2}},$$

$$s_{2n}=\sqrt{\frac{\delta^2}{2}-n^2\pi^2-\sqrt{\frac{\delta^4}{4}-n^2\pi^2\delta^2}}.$$

Частное решение уравнения (36) имеет вид:

$$\Phi_n(\eta)=\frac{2a^4}{D}\int_0^1 \sin n\pi\xi\, d\xi\int_0^\eta f(\xi,\,t)\,\chi_{3n}(\eta-t_1)\,dt, \tag{38}$$

где

$$\chi_{3n}=\frac{1}{2r_n}\left(\frac{1}{s_{2n}}\sin s_{2n}\eta-\frac{1}{s_{1n}}\sin s_{1n}\eta\right),$$

причем

$$2r_n=s_{1n}^2-s_{2n}^2.$$

Таким образом выражение для изогнутой поверхности при наличии упругих ребер при $\eta=\eta_1,\,\ldots,\,\eta_j,\,\ldots,\,\eta_k$ и упругих опор жесткостью c_{ij}, лежащих на пересечении с прямыми $\xi=\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_i,\,\ldots,\,\xi_l$:

$$w(\xi,\,\eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi=\sum_n\left\{U_n(\eta)-\sum_j^{1,\,k}\left[\frac{EJ_j\,\alpha_n^4}{aD}V_n(\eta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_i^{1,\,l}\frac{2a^2c_{ij}}{D}\sin n\pi\xi_i\,w(\xi_i,\,\eta_j)\right]\chi_{3n}(\eta-\eta_j)\right\}\sin n\pi\xi. \tag{39}$$

Все вычисления и в этом случае производятся аналогично вышеизложенному.

Для случая квадратной пластинки, опертой по контуру и подпертой ребром по середине и в двух точках $\left(\frac{1}{4},\,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4},\,\frac{1}{2}\right)$ или в одной $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, для симметричных деформаций относительно $\xi=\frac{1}{2}$, $\delta_{\text{кр}}$ определяется из уравнения:

$$\frac{2D}{a^2c}=\sum_n^{1,\,3,\,5,\,\ldots}\frac{\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{tg}\frac{s_{2n}}{2}-\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{tg}\frac{s_{1n}}{2}}{r_n-\frac{EJ\alpha_n^4}{4aD}\left[\frac{1}{s_{2n}}\operatorname{tg}\frac{s_{2n}}{2}-\frac{1}{s_{1n}}\operatorname{tg}\frac{s_{1n}}{2}\right]}. \tag{40}$$

Для квадратной пластинки, подпертой двумя ребрами при

$$\eta_1=\frac{1}{4},\quad \eta_2=\frac{3}{4}$$

и в четырех точках

$$\left(\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right),\quad\left(\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}\right),\quad\left(\frac{1}{4},\,\frac{3}{4}\right),\quad\left(\frac{3}{4},\,\frac{3}{4}\right),$$

уравнение имеет попрежнему тот же вид.

4. Изгиб сжатой пластинки, нагруженной нормальной нагрузкой

Продольные подкрепления пластинки. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}+\frac{pa^2}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=\frac{a^4}{D}f(\xi, \eta), \tag{41}$$

где $f(\xi, \eta)$ — интенсивность нормальной нагрузки на поверхность пластинки.

Общее решение (41) имеет прежний вид:

$$w(\xi, \eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi,$$

где

$$V_n(\eta)=Z_n(\eta)+\Phi_n(\eta)+\Phi_{1n}(\eta),$$

причем Φ_{1n} соответствует распределенной нагрузке $q(\xi, \eta)$ и определяется формулой:

$$\Phi_{1n}=\frac{2a^4}{D}\int_0^1 \sin n\pi\xi\, d\xi \int_0^\eta q(\xi, t) Z_{3n}(\eta-t)\, dt. \tag{42}$$

Общее решение для пластинки, подпертой ребрами при

$$\eta=\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_j, \ldots, \eta_k,$$

упругими опорами жесткостью c_{ij} и сосредоточенными силами P_{ij} по прямым

$$\xi=\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_l$$

при наличии нормальной нагрузки определяется для интервала

$$\eta_k \leqslant \eta \leqslant \eta_{k+1}$$

формулой:

$$w(\xi, \eta)=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi=$$

$$=\sum_n \Bigg\{ Z_n(\eta)+\Phi_{1n}(\eta)-\sum_j^{1,k}\Bigg[\left(\frac{EJ_j}{aD}\alpha_n^4-\alpha_n^2\delta^2 k_j\right)V_n(\eta_j)+$$

$$+\sum_i^{1,l}\frac{2a^2}{D}\sin n\pi\xi_i\,(c_{ij}w(\xi_i, \eta_j)-P_i)\Bigg] Z_{3n}(\eta-\eta_j)\Bigg\}\sin n\pi\xi. \tag{43}$$

Частное решение Z_n выбирается в зависимости от условий закрепления согласно (32).

Φ_{1n} определяется для любой нагрузки согласно (42) за исключением сосредоточенных сил, которые уже внесены в (43).

Решение в каждом частном случае может быть получено так же, как указано в **1**.

В случае, если

$$s_{1n} = \sqrt{n\pi\delta - n^2\pi^2}$$

будут получаться комплексными, необходимо, конечно, в формулах для $w(\xi, \eta)$ перейти к гиперболическим функциям.

Поперечные подкрепления пластинки. Пластинка сжимается силами в направлении y-ов.

Дифференциальное уравнение имеет прежний вид (35). Общее решение берем в виде:

$$w(\xi, \eta) = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi,$$

где

$$V_n(\eta) = U_n(\eta) + \Phi_n(\eta) + \Phi_{1n}(\eta),$$

причем Φ_{1n} соответствует нормальной нагрузке $q(\xi, \eta)$ и определяется формулой (38):

$$\Phi_{1n} = \frac{2a^4}{D} \int_0^1 \sin n\pi\xi \, d\xi \int_0^\eta q(\xi, t)\, \chi_{3n}(\eta - t)\, dt. \tag{44}$$

Общее выражение для изогнутой поверхности пластинки, подпертой аналогично предыдущему случаю, при наличии нормальной нагрузки определяется для интервала

$$\eta_k \leqslant \eta \leqslant {}_k\eta_{+1}$$

формулой:

$$w(\xi, \eta) = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi = \sum_n \Bigg\{ U_n(\eta) + \Phi_{1n}(\eta) - \sum_i^{1,k} \Bigg[\frac{EJ_j\, \alpha_n^4}{aD} V_n(\eta_j) + \\ + \sum_i^{1,l} \frac{2a^2}{D} \sin n\pi\xi_i \left(c_{ij}\, w(\xi_i, \eta_j) - P_i\right) \Bigg] \chi_{3n}(\eta - \eta_j) \Bigg\} \sin n\pi\xi, \tag{45}$$

где Φ_{1n} определяется формулой (44) для заданной $q(\xi, \eta)$, причем сосредоточенныя силы попрежнему выделены.

В том случае, если корни характеристического уравнения s_{1n}, s_{2n} будут комплексны

$$s_{1n} = r_{1n} + it_{1n}, \quad s_{2n} = r_{1n} - it_{1n},$$

то вместо (37) необходимо написать выражение:

$$U_n = A_n \sin r_{1n}\eta \operatorname{ch} t_{1n}\eta + B_n \cos r_{1n}\eta \operatorname{sh} t_{1n}\eta + C_n \sin r_{1n}\eta \operatorname{sh} t_{1n}\eta + \\ + D_n \cos r_{1n}\eta \operatorname{ch} t_{1n}\eta.$$

Значение

$$\chi_{3n} = \frac{1}{2r_{1n}\, t_{1n}\,(r_{1n}^2 + t_{1n}^2)} \left[t_{1n} \sin r_{1n}\eta \operatorname{ch} t_{1n}\eta - r_{1n} \cos r_{1n}\eta \operatorname{sh} t_{1n}\eta\right].$$

Для

$$\frac{\delta^2}{4} = n^2 \pi^2,$$

$$U_n = A_n \sin s_{1n} \eta + B_n \cos s_{1n} \eta + C_n \eta \sin s_{1n} \eta + D_n \eta \cos s_{1n} \eta,$$

$$\chi_{8n} = -\frac{1}{2n^2 \pi^2} \left[(\eta - t) \cos n\pi (\eta - t) - \frac{1}{n\pi} \sin n\pi (\eta - t) \right].$$

Частное решение для заданной q определяется прежней формулой (44).

RECHTECKIGE PLATTEN, WELCHE AN ELASTISCHEN RIPPEN UND PUNKTSTÜTZEN BEFESTIGT SIND

A. P. PHILIPPOV

(Charkow)

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit werden Schwingung, Stabilität und Biegung von gedrückten rechteckigen Platten betrachtet, deren Seiten an

$$x = 0,\ x = a \quad (\xi = 0,\ \xi = 1)$$

gestützt und welche an Rippen und Punktstützen befestigt sind.

Die Lösung von entsprechenden Differenzialgleichungen (2), (19), (29), (35), (41) erhalten wir im Intervalle zwischen k und $k+1$ Rippe, wie (14), (25), (33), (43) und (45) zeigen.

In der Arbeit sind als Beispiele folgende Resultate ausgeführt, welche mit dieser Methode erhalten werden sind: der Durchbiegungswert von gestützten Randplatten auf die eine gleichmässig verteilte Last wirkt und die von einer Rippe und zwei elastischen Stützen gestützt werden (17); die Frequenzgleichungen für eine auf gleiche Weise gestützte Quadratplatte, sowie die Knickgleichungen belasteter Platten, welche durch Längsrippen (34) gestützt sind, und von Querrippen bei zwei vorhandenen elastischen Stützen.