АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. П. ФИЛИППОВ

(Харьков)

Изучение колебаний цилиндрической оболочки, сопровождающееся удлинением срединной поверхности, при любых условиях закрепления представляет значительные затруднения. Наиболее просто решается вопрос в случае опертых концевых сечений оболочки.[1]

В настоящей работе будет рассмотрен более сложный случай заделанных концевых сечений оболочки.

1. Оси координат для цилиндрической оболочки расположим обычным образом. Через x обозначим расстояние от концевого сечения оболочки, вдоль образующей, до некоторой точки срединной поверхности, через φ обозначим угол, который образует осевая плоскость, проходящая через рассматриваемую точку цилиндрической оболочки с неподвижной осевой плоскостью.

Обозначим:

a — радиус цилиндрической оболочки,
$2h$ — толщина ее,
γ — вес единицы объема,
ρ — масса на единицу поверхности,
l — длина оболочки в направлении образующей,
μ — коэффициент Пуассона

$$D=\frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}, \quad \beta^2=\frac{h^2}{a^2}.$$

Составляющие перемещения некоторой точки срединной поверхности оболочки обозначим через u (вдоль образующей), v (по касательной), w (по нормали к поверхности).

Из условий равновесия элемента оболочки после замены составляющих усилий (нормальных T_1, T_2, скалывающих S_1, S_2, изгибающих моментов M_1,

[1] W. Flügge, Schwingungen zylindrischer Schalen. Z. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 425, 1933.

M_2 и скручивающих моментов $H_1 = -H_2$) их выражениями через перемещения u, v, w, имеем следующую систему дифференциальных уравнений для определения u, v, w:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \varphi} - \mu\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi\,\partial \varphi^2} = \\
= \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2Eh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \\
+ \frac{3-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2\,\partial \varphi} = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2Eh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\mu\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \frac{2-\mu}{3}\beta^2\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi\,\partial \xi^2} - \frac{2}{3}\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2\,\partial \xi^2} - \frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - w - \frac{\beta^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} = \\
= \frac{a^2(1-\mu^2)}{2Eh}\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(\xi, \varphi, t)\right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\xi = \frac{x}{a}$, а $Z(\xi, \varphi, t)$ — внешняя периодическая нагрузка, отнесенная к единице поверхности оболочки.[1]

В дальнейшем будем предполагать, что цилиндрическая оболочка будет замкнута или не замкнута, причем в последнем случае угол дуги поперечного сечения, нормального к оси, будет α.

В этом случае будем предполагать, что оболочка оперта по двум образующим

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \alpha,$$

т. е. для этих значений будут равны нулю u, w и изгибающие моменты (M_1, M_2).

2. Общее решение системы уравнений может быть найдено в форме:

$$
\begin{aligned}
u &= U(\xi)\sin n\varphi \sin kt, \\
v &= V(\xi)\cos n\varphi \sin kt, \\
w &= W(\xi)\sin n\varphi \sin kt,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

в предположении, что внешняя периодическая нагрузка задана в виде:

$$Z(\xi, \varphi, t) = q(\xi, \varphi)\sin kt. \tag{3}$$

Для случая незамкнутой цилиндрической оболочки необходимо взять вместо n значение $\frac{\pi}{\alpha}n$ (n — целое число).

После подстановки выражений (2) для u, v, w в уравнения (1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $U(\xi)$, $V(\xi)$, $W(\xi)$.

[1] В последнее время другой метод получения уравнений равновесия дан акад. Б. Г. Галеркиным (Докл. Акад. Наук, 1934).

Решение этой системы при любых условиях защемления по двум концевым сечениям

$$x=0, \quad x=l$$

проще всего получить по методу Heaveside.

Например, для закрепленных концов оболочки необходимо удовлетворить условиям:

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}=0, \quad v=0, \tag{4}$$

для

$$\xi=0, \quad \xi=\frac{l}{a}.$$

Поэтому, вводя в согласии с методом Heaveside символ $\frac{1}{p}$ для обозначения интегрирования, имеем для условий (4) при $\xi=0$ следующие соотношения

$$W=\int_0^\xi \frac{dW}{d\xi}d\xi=\frac{1}{p}\frac{dW}{d\xi},$$

$$\frac{\partial W}{d\xi}=\int_0^\xi \frac{d^2W}{\partial\xi^2}d\xi=\frac{1}{p}\frac{d^2W}{d\xi^2},$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}=\int_0^\xi \frac{d^3W}{d\xi^3}d\xi+\omega_2=\frac{1}{p}\frac{d^3W}{d\xi^3}+\omega_2,$$

$$U=\frac{1}{p}\frac{dU}{\partial\xi}+\omega_3;$$

$$\frac{dU}{\partial\xi}=\frac{1}{p}\frac{d^2U}{d\xi^2},$$

$$V=\frac{1}{p}\frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{dV}{d\xi}=\frac{1}{p}\frac{d^2V}{d\xi^2}+\omega_4.$$

Следовательно:

$$\frac{dW}{d\xi}=pW,$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}=p^2W,$$

$$\frac{d^3W}{d\xi^3}=p^3W-p\omega_1,$$

$$\frac{d^4W}{d\xi^4}=p^4W-p^2\omega_1-p\omega_2,$$

$$\frac{dU}{d\xi}=pU-p\omega_3,$$

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}=p^2U-p^2\omega_3,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}=pV,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}=p^2V-p\omega_4,$$

где ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 — произвольные постоянные.

После подстановки этих значений для производных в уравнения относительно U, V, W получим систему уравнений, из которой по обычным правилам символического решения уравнений найдем U, V, W.

Удовлетворяя условиям для правого концевого сечения, получим систему четырех линейных уравнений относительно произвольных постоянных ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. В том случае, когда

$$Z(x, \varphi, t)=0,$$

приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, получим уравнение частоты свободных колебаний.

Так как такой метод решения требует все же значительной вычислительной работы, то для случая, когда сечения оболочки могут быть заделаны, приведем другой метод.

3. В случае оболочки, опертой по двум параллельным кругам

$$x=0, \quad x=l,$$

уравнение частоты свободных колебаний получается без всяких затруднений, если взять для u, v, w следующие выражения:

$$\begin{aligned} u&=A\cos\frac{m\pi x}{l}\sin n\varphi\sin kt,\\ v&=B\sin\frac{m\pi x}{l}\cos n\varphi\sin kt,\\ w&=C\sin\frac{m\pi x}{l}\sin n\varphi\sin kt. \end{aligned} \tag{5}$$

После подстановки значений u, v, w в уравнения (1) получим систему уравнений относительно A, B, C, определитель которой дает уравнение частоты третьей степени относительно k^2, из которого для заданных m и n получим частоты соответствующего тона для поперечных и двух продольных колебаний.

В том случае, когда одно или оба концевых сечения оболочки заделаны, будем искать решение, удовлетворяющее условиям (4) в форме двойных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u&=\sum_n\sum_m A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\lambda n\varphi\sin kt,\\ v&=\sum_n\sum_m B_{mn}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\lambda n\varphi\sin kt,\\ w&=\sum_n\sum_m C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\lambda n\varphi\sin kt. \end{aligned} \tag{5'}$$

Эти ряды удовлетворяют всем условиям (4) за исключением условия

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=0 \tag{4'}$$

для

$$\xi=0 \quad \text{и} \quad \xi=\frac{l}{a}.$$

Для получения решения, удовлетворяющего условию (4′), предположим, что нагрузка $q(\xi, \varphi)$ везде равна нулю за исключением интервала от $\xi=\xi_1$ до $\xi=\xi_1+\sigma_1$ (от $x=c_1$ до $x=c_1+\sigma$), причем в этом интервале в направлении x-ов она меняется по закону прямоугольника, а по дуге круга меняется по закону $(s=\alpha a)$

$$p=\sum_n \frac{s^2}{\pi^2} q_n \sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi \sin kt,$$

причем $q_n\sigma\to p_n$, когда $\sigma\to 0$.

Разлагая $q(\xi, \varphi)$ в двойной ряд Фурье:

$$q(\xi, \varphi)=\sum_m\sum_n q_{mn}\sin\frac{\pi}{\alpha}n\varphi\sin\frac{m\pi x}{l},$$

получим при условии $q_n\sigma\to p_n$, $\sigma\to 0$:

$$q_{mn}=\frac{2s^2}{\pi^2 l}p_n\sin\frac{m\pi c_1}{l}.$$

После подстановки значений u, v, w имеем для определения A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\left(m^2\nu^2+\frac{1-\mu}{2}\lambda^2 n^2-\omega^2\right)A_{mn}+\left(\frac{1+\mu}{2}-\frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\right)\lambda\nu mnB_{mn}+\\
+\left(\mu-\frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\right)m\nu C_{mn}=0,\\
\frac{1+\mu}{2}\lambda\nu mnA_{mn}+\left[\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)m^2\nu^2+n^2\lambda^2\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right)-\omega^2\right]B_{mn}+\\
+\left[\lambda n+\frac{3-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}\lambda\nu^2 nm^2+\frac{\beta^2}{3}\lambda^3 n^3\right]C_{mn}=0,\\
\mu\nu mA_{mn}+\left(\lambda n+\frac{2-\mu}{3}\beta^2\lambda\nu^2 nm^2+\frac{\beta^2}{3}\lambda^3 n^3\right)B_{mn}+\\
+\left(1+\frac{\beta^2}{3}\nu^4 m^4+\frac{\beta^2}{3}\lambda^4 n^4+\frac{2}{3}\beta^2\lambda^2\nu^2 n^2 m^2-\omega^2\right)C_{mn}=\\
=\frac{2s^2}{\pi^2 l}\frac{(1-\mu^2)a^2}{2Eh}p_n\sin\frac{m\pi c_1}{l},
\end{gathered} \tag{6}$$

где обозначено:

$$\lambda=\frac{\pi}{\alpha},\quad \nu=\frac{\pi a}{l},\quad s=\alpha a,\quad b=\frac{l}{s},\quad \omega^2=\frac{\rho(1-\mu^2)a^2}{2Eh}k^2.$$

Определяя из (6) A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} и приближая c_1 к нулю или к l в предположении, что

$$c_1 p_n \to M_n,$$

когда $c_1 \to 0$ (или $(l-c)p_n \to M_n'$, когда $c \to l$), придем к тому случаю, когда по концевым сечениям приложены изгибающие моменты.

Значение для $w(\xi, \varphi)$ будет:

$$w = -\frac{2s^2(1-\mu^2)a^2}{\pi l^2 Eh} \sum_n \sum_m \frac{(\omega^4 + c_{mn}\omega^2 + d_{mn})\, m}{(\omega^6 + e_{mn}\omega^4 + f_{mn}\omega^2 + g_{mn})} (M_n - \cos m\pi M_n') \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\lambda n\varphi. \quad (7)$$

Коэффициенты c_{mn}, d_{mn}, ..., g_{mn} имеют следующие значения:

$$c_{mn} = -\frac{3-\mu}{2}\nu^2(m^2 + b^2 n^2) - \beta^2\nu^2\left(\frac{1-\mu}{2}m^2 + \frac{b^2 n^2}{3}\right),$$

$$d_{mn} = \frac{1-\mu}{2}\nu^4(m^2 + b^2 n^2)^2 + \delta_{mn},$$

$$\delta_{mn} = \frac{1-\mu}{2}\beta^2\nu^4\left(m^4 + \frac{1}{3}b^4 n^4\right) + \frac{\beta^2}{3}(4 - 3\mu + \mu^2)\lambda^2\nu^2 m^2 n^2,$$

$$e_{mn} = -\frac{\beta^2}{3}\nu^4 m^4 - \left[\frac{3-\mu}{2} + \frac{2}{3}\beta^2\left(3\,\frac{1-\mu}{4} + \lambda^2 n^2\right)\right]\nu^2 m^2 -$$
$$- \left[\frac{3-\mu}{2} + (1 + n^2\lambda^2)\frac{\beta^2}{3}\right] n^2\lambda^2 - 1,$$

$$\begin{aligned} f_{mn} = {} & \frac{\beta^2}{6}[3 - \mu + (1-\mu)\beta^2]\nu^6 m^6 + \\ & + \left\{\frac{1-\mu}{2} + \frac{\beta^2}{2}\left[1 - \mu + n^2\lambda^2\left(3 - \mu + \frac{2-\mu-\mu^2}{9}\beta^2\right)\right]\right\}\nu^4 m^4 + \\ & + \left\{(1-\mu)\left(\frac{3+2\mu}{2} + n^2\lambda^2\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{2}\left[1 - \mu + (3-\mu)n^4\lambda^4 - \frac{3-\mu}{3}\lambda^2 n^2\right]\right\}\nu^2 m^2 + \\ & + \frac{1-\mu}{2}\lambda^2 n^2(1 + \lambda^2 n^2) + \\ & + \frac{\beta^2}{3}\lambda^2 n^2\left[\frac{1-\mu}{2}n^2\lambda^2(1 + \lambda^2 n^2) + (n^2\lambda^2 - 1)^2\right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$g_{mn} = -\frac{1-\mu}{6}\beta^2\nu^8\gamma_{mn} + \frac{1-\mu}{6}\beta^2(2n^2\lambda^2 - 1)(4m^2\nu^2 + \lambda^2 n^2)n^2\lambda^2 -$$
$$- \frac{1-\mu}{6}\beta^4\nu^6 m^6\left(m^2\nu^2 + \frac{4}{3}\lambda^2 n^2\right),$$

где

$$\gamma_{mn} = (m^2 + b^2 n^2)^4 + \delta_n^4 b^4 m^4,$$

причем

$$\delta_n^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{\beta^2\lambda^4} + \frac{\beta^2}{3}n^4 - \frac{n^2}{\lambda^2}\left[7 - \mu^2\left(1 - \frac{\beta^2}{3}\right)\right].$$

Задаваясь определенным значением n и удовлетворяя условиям (4'), мы получим уравнение частоты в виде простого ряда от m, которое может быть решено обычным путем при помощи пробных подстановок. Как видно, члены этого ряда будут с возрастанием m порядка $\frac{1}{m^2}$, к тому же обычно $\delta_n{}^4$ имеет значительную величину, так что ряд будет сходиться медленно. Сходимость этого ряда будет значительно улучшена, если выделить ряд:

$$\frac{3}{\nu^4\beta^2} S(x)\,(M_n - \cos m\pi M_n'),$$

где

$$S(x) = \sum_m \frac{(m^2+n^2b^2)\,m}{(m^2+b^2n^2)^4+\delta_n{}^4 b^4 m^4} \sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{9}$$

Если рассмотреть, например, случай симметричных деформаций относительно $x=\frac{l}{2}$, то $M_n = M_n'$ при заделке обоих концевых сечений, и уравнение частоты для заданного n будет:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \equiv \frac{4l^3 M_n}{D\pi^4 b^2}\left\{\frac{l}{\pi}S'(0) + \sum_m^{1,3,5,\ldots} \frac{[a_{mn}\,\omega^6 + b_{mn}\,\omega^4 + c'_{mn}\,\omega^2 + d'_{mn}]\,m^2}{\gamma_{mn}\,[\omega^6 + e_{mn}\,\omega^4 + f_{mn}\,\omega^2 + g_{mn}]}\right\} = 0. \tag{10}$$

Значения коэффициентов a_{mn}, b_{mn}, c'_{mn}, d'_{mn} будут следующие:

$$\begin{aligned}
a_{mn} &= -(m^2+b^2n^2)^2,\\
b_{mn} &= -\frac{\beta^2}{3}\lambda^4 m^4 \delta_n{}^4 + (m^2+b^2n^2)^2\left[\left(\frac{3-\mu}{2}+\frac{1-\mu}{2}\beta^2\right)\nu^2 m^2 +\right.\\
&\quad \left. + \lambda^2 n^2\left(\frac{3-\mu}{2}+\frac{\beta^2}{3}\right)+1\right],\\
c'_{mn} &= -\frac{\beta^2}{3}\lambda^4 m^4\delta_n{}^4 c_{mn} - (m^2+b^2n^2)^2\left\{\left[\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2) -\right.\right.\\
&\quad \left. - \frac{\beta^4}{18}\lambda^2 n^2(6-5\mu+\mu^2)\right]\nu^4 m^4 + \left[\frac{1-\mu}{2}(3+2\mu+2\lambda^2n^2+\beta^2) -\right.\\
&\quad \left. - \frac{\beta^2}{6}(3-\mu)\lambda^2n^2 - \frac{\beta^4}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1-\mu}{2}\right)\lambda^4 n^4\right]\nu^2 m^2 +\\
&\quad \left. + \frac{1-\mu}{2}\lambda^2 n^2(1+\lambda^2n^2) - \frac{\beta^2}{3}\lambda^2 n^2\left[\frac{3+\mu}{2}\lambda^2n^2+\frac{\beta^2}{3}\lambda^4n^4-1\right]\right\},\\
d'_{mn} &= -\frac{\beta^2}{3}\lambda^4 m^4 \delta_n{}^4\delta_{mn} -\\
&\quad - \frac{1-\mu}{6}\beta^2(m^2+b^2n^2)^2\left\{(2\lambda^2n^2-1)(4m^2+b^2n^2)\,n^2\lambda^2\nu^2 +\right.\\
&\quad \left. + \frac{\beta^2}{3}\lambda^2 n^2\left[\lambda^6 n^6 + \frac{6-5\mu+\mu^2}{1-\mu}\nu^6 m^2(m^2+b^2n^2)^2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Что же касается ряда $S(x)$, то он может быть просуммирован по m. После суммирования имеем для него следующее значение (для случая, когда $M_n = M_n'$ $(m=1, 3, 5, \ldots)$):

$$S(x) = \frac{\pi}{4b^2}\{d_1[\psi_1(x)-\psi_2(x)] - c_1[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]\}, \tag{9'}$$

где

$$c_1 = \frac{t_1 - t_2}{2\sqrt{2}\,\delta_n \sqrt{n^4 + \frac{\delta_n^4}{16}}},$$

$$d_1 = -\frac{t_1 + t_2}{2\sqrt{2}\,\delta_n \sqrt{n^4 + \frac{\delta_n^4}{16}}},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\mu x}{s}\sin\frac{\pi\nu(x-l)}{s} + \operatorname{sh}\frac{\pi\mu(x-l)}{s}\sin\frac{\nu\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\pi\mu b + \cos\pi\nu b},$$

$$\psi_2(x) = \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\mu_1 x}{s}\sin\frac{\pi\nu_1(x-l)}{s} + \operatorname{sh}\frac{\pi\mu_1(x-l)}{s}\sin\frac{\pi\nu_1 x}{l}}{\operatorname{ch}\pi\mu_1 b + \cos\pi\nu_1 b},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\mu x}{s}\cos\frac{\pi\nu(x-l)}{s} + \operatorname{ch}\frac{\pi\mu(x-l)}{s}\cos\frac{\pi\nu x}{s}}{\operatorname{ch}\pi\mu b + \cos\pi\nu b},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\mu_1 x}{s}\cos\frac{\pi\nu_1(x-l)}{s} + \operatorname{ch}\frac{\pi\mu_1(x-l)}{s}\cos\frac{\pi\nu_1 x}{s}}{\operatorname{ch}\pi\mu_1 b + \cos\pi\nu_1 b},$$

причем

$$\mu = \frac{\delta_n}{2\sqrt{2}} + t_1, \quad \nu = \frac{\delta_n}{2\sqrt{2}} + t_2,$$

$$\mu_1 = \frac{\delta_n}{2\sqrt{2}} - t_1, \quad \nu_1 = \frac{\delta_n}{2\sqrt{2}} - t_2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n^4 + \frac{\delta_n^4}{16}}}, \quad t_2 = \sqrt{-\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n^4 + \frac{\delta_n^4}{16}}}.$$

Значение $\frac{l}{\pi}S'(0)$ будет:

$$\frac{l}{\pi}S'(0) = \frac{\pi}{4b}\left\{c_1\left[\frac{-\nu\sin\pi\nu b + \mu\operatorname{sh}\pi\mu b}{\operatorname{ch}\pi\mu b + \cos\pi\nu b} - \frac{-\nu_1\sin\pi\nu_1 b + \mu_1\operatorname{sh}\pi\mu_1 b}{\operatorname{ch}\pi\mu_1 b + \cos\pi\nu_1 b}\right] - \right.$$
$$\left. - d_1\left[\frac{\mu\sin\pi\nu b + \nu\operatorname{sh}\pi\mu b}{\operatorname{ch}\pi\mu b + \cos\pi\nu b} - \frac{\mu_1\sin\pi\nu_1 b + \nu_1\operatorname{sh}\pi\mu_1 b}{\operatorname{ch}\pi\mu_1 b + \cos\pi\nu_1 b}\right]\right\}. \tag{9'}$$

Что же касается ряда по m в уравнении (10), то, как видно, с возрастанием m члены его будут порядка по крайней мере $\frac{1}{m^4}$ и он удобнее для вычислений.

Для выяснения влияния заделки концевых сечений возьмем замкнутую цилиндрическую оболочку со следующими данными:

$$\beta^2 = 3.10^{-5}, \quad \mu = \frac{1}{6}, \quad \lambda = 1, \quad \nu = \frac{\pi a}{l} = 0.631,$$
$$b = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{1}{0.631}. \tag{12}$$

Вычисления проделаны для $n = 4$.

Для случая опертых концов уравнение частоты будет:

$$\omega^6+e_{m4}\omega^4+f_{m4}\omega^2+g_{m4}=0. \tag{13}$$

Для колебаний, симметричных относительно $a=\frac{l}{2}$, для наинизшей частоты наименьший корень при $m=1$ определяется из уравнения:

$$\omega^6-24.2336\,\omega^4+119.408\,\omega^2-0.328970=0; \tag{13'}$$

отсюда:

$$\begin{gathered}\omega^2_{\min}=0.0027565,\\ \omega=0.05250.\end{gathered} \tag{14}$$

Для случая заделанных концевых сечений оболочки, вычисляя коэффициенты, имеем:

$$\begin{array}{lll}
a_{14}=-1\,696.19, & a_{34}=-2\,419.15, & a_{54}=-4\,249.06,\\
b_{14}=41\,097.2, & b_{34}=69\,454.7, & b_{54}=159\,868,\\
c'_{14}=-202\,259, & c'_{34}=-412542, & c'_{54}=-1.25729\cdot 10^6,\\
d'_{14}=-61.6760, & d'_{34}=-151.761, & d'_{54}=-492.636,\\
e_{14}=-24.2336, & e_{34}=-28.7473 & e_{54}=-37.7753,\\
f_{14}=119.408, & f_{34}=171.541, & f_{54}=301.406,\\
g_{14}=-0.328970, & g_{34}=-5.74652. & g_{54}=-41.8708,\\
\gamma_{14}=3.48969\cdot 10^6, & \gamma_{34}=6.16387\cdot 3^2\cdot 10^6, & \gamma_{54}=16.0377\cdot 5^2\cdot 10^6.
\end{array}$$

Значения величин, входящих в (9'):

$$\begin{gathered}t_1=6.9115,\ t_2=5.6363,\ \delta_4^4=97\,120.4,\\ \frac{l}{\pi}S'(0)=0.021615.\end{gathered}$$

Пользуясь этими значениями коэффициентов и $S'(0)$, получим для наименьшего корня уравнения значения:

$$\begin{gathered}\omega^2=0.0028675,\\ \omega=0.05354.\end{gathered} \tag{14'}$$

Таким образом частота колебания

$$k=\omega\sqrt{\frac{2Eh}{\rho(1-\mu^2)a^2}}$$

для закрепленной оболочки при $n=4$ для данного примера увеличивается по сравнению с опертой всего лишь на $\sim 2\%$. Таким образом, если только $\frac{l}{a}$ не будет малой величиной, то, как и можно было предполагать, концевые моменты оказывают лишь местное влияние и мало сказываются на частоте колебаний основного тона.

SCHWINGUNGEN ZYLINDRISCHER SCHALEN

A. P. PHILIPPOW

(Charkow)

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit werden Schwingungen zylindrischer, eingeschlossener oder nicht eingeschlossener Schalen betrachtet, bei speziellen Randbedingungen der Stirnflächen der Schalen. Die Frequenzgleichung bei beliebigen Befestigungsbedingungen für $x=0$ und $x=l$ kann aus dem System (1) gefunden werden, wenn wir zu der Verschiebung den Ausdruck (2) benutzen und die Integration nach der Methode von Heaviside durchführen.

Für den Fall, wenn die eine oder beide Stirnflächen eingespannt sind, kann die Frequenzgleichung aus der Formel (7) gefunden werden, indem die Verschiebungen wie in (5′) genommen und periodische Endmomente eingeführt werden.

Für den Fall von Schwingungen mit symmetrischer Biegungsform bezüglich $x=\frac{l}{2}$ bekommt die Frequenzgleichung nach Verbesserung der Konvergenz mit Hilfe der Reihe (9), das Aussehen von Formel (10). Schalenberechnungen mit Hauptdaten laut Formel (12) ergeben die Frequenzbedeutung des Grundtones der Transversalschwingungen (14′), welche sich nur um 2% von dem Wert (14) für den Fall von gestützten Enden [Frequenzformel (13)] unterscheiden.

Auf diese Weise, wenn $\frac{l}{a}$ verhältnismässig gross ist, werden die Endmomente nur lokale Bedeutung haben und die Frequenz des Schwingungsgrundtones nicht beeinflussen.