АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences — Отделение технических наук
Section of Technical Mechanics — Группа технической механики

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. ЕФИМЕНКО

(Москва)

Определение частот колеблющейся системы, как известно, сводится к определению собственных значений краевых задач дифференциальных уравнений. Существуют различные способы вычисления собственных значений. Из них широко распространенным является метод Рэйлея-Ритца.[1]

При использовании этого метода заменяют интегрирование дифференциального уравнения нахождением minimum'ов некоторых определенных интегралов, причем полученную вариационную задачу не решают точно, а представляют искомую функцию приближенно в форме рядов и затем подбирают коэффициенты рядов так, чтобы рассматриваемый интеграл получал наименьшее значение. Способ Рэйлея-Ритца дает довольно точные результаты для частоты основного тона и гораздо худшие для высших частот. В последнее время появился ряд работ, посвященных решению рассматриваемой задачи с помощью интегральных уравнений.[2]

В известной монографии по теории упругих колебаний Пфейфера[3] приведены результаты, полученные Ono,[4] сравнивающего в одном частном случае частоту основного колебания стержня, определенную 1) способом Рэйлея,

---

[1] Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. I, стр. 163—165. — Смирнов, Крылов, Канторович, Вариационное исчисление, стр. 149—155.

[2] Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. — F. H. Van-den-Dungen, Cours de technique des vibrations. — K. Hohenemser, Die Methoden zur angenäherten Lösung des Eigenwertproblems in der Elastokinetik, 1932. — E. Schwerin, Zeitschrift für technische Physik, № 7, S. 264—267, 1924. — R. Iglisch, ZAMM, Bd. 14, H. 1, 1934.

[3] П. Пфейфер, Колебания упругих тел. Механика упругого тела, вып. III.

[4] A. Ono, Journ. Soc. Mech. Engin, Tokyo, t. 28, pp. 429—441, 1925.

2) способом интегральных уравнений, 3) непосредственным интегрированием дифференциального уравнения, требующим гораздо больше времени, чем два только что указанных приближенных способа.

Интересно отметить, что в противоположность способу Рэйлея-Ритца, дающему всегда верхнюю границу частот, методом интегральных уравнений получена нижняя граница частот. Дающий более точные результаты по сравнению с методом Рэйлея-Ритца способ интегральных уравнений представляет большой интерес также и потому, что позволяет находить сразу и основной тон и обертоны, что весьма важно во многих задачах.

Сущность метода интегральных уравнений заключается в следующем: как известно из теории линейных интегральных уравнений,[1] определение собственных значений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + qy = \lambda ry \tag{1}$$

с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $q(x)$, $r(x)$ — непрерывные функции в интервале (a, b), эквивалентно задаче определения собственных значений интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds \tag{3}$$

с ядром

$$K(x, s) = G(x, s)\, r(s),$$

где $G(x, s)$ — функция Грина для данной краевой задачи. Собственные значения λ являются корнями характеристического уравнения

$$1 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3 + \ldots = 0, \tag{4}$$

в котором

$$d_1 = -\int_a^b K(t_1, t_1)\, dt_1$$

$$d_m = \frac{(-1)^m}{m} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) K(t_1, t_2) \ldots K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) K(t_2, t_2) \ldots K(t_2, t_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(t_n, t_1) K(t_n, t_2) \ldots K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

---

[1] Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen integralgleichungen, S. 42—49. — Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, S. 446—451.

Для вычисления d_m нет необходимости предварительно вычислять определители высокого порядка, так как известна следующая рекуррентная формула:

$$d_{m+1} = -\frac{1}{m+1}\int_a^b d_m(s, s)\,ds \tag{5}$$

при

$$d_0(s, s) = K(s, s),$$

причем подинтегральная функция в правой части (5) определяется опять-таки по рекуррентной формуле:

$$d_m(x, s) = K(x, s)\,d_m + \int_a^b K(x, t)\,d_{m-1}(t, s)\,dt \tag{6}$$

при

$$d_0(x, s) = K(x, s).[1]$$

Так как $K(x, s) = G(x, s)\,r(s)$, то, если даже $r(x)$ — полином невысокой степени, вычисления по формуле (6) громоздки для первых двух, трех $d_m(x, s)$ и совершенно практически невозможны для $d_m(x, s)$ с большими индексами. Это обстоятельство заставило искать других способов вычисления $d_m(x, s)$. Mises,[2] а затем Iglisch[3] разработали такой способ для практического разрешения краевых задач дифференциальных уравнений 2-го порядка. Iglisch вывел для определения коэффициентов d_m характеристического уравнения (4) в случае самосопряженных граничных условий следующую рекуррентную формулу:

$$d_m = -\sum_{\nu=0}^{\infty}(b-a)^{\nu}A_{1\nu}^{(m)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu A_{0\nu}^{(m)}(b-a)^{\nu-1}, \tag{7}$$

в которой коэффициенты $A_{0\nu}$, $A_{1\nu}$ вычисляются в свою очередь по рекуррентной формуле:

$$k(k-1)\,A_{nk}^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{k-2} A_{n\nu}^{(m)}\,q_{k-2-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-2} A_{n\nu}^{(m-1)}\,r_{k-2-\nu} \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ k = 2, 3, 4, \ldots). \tag{8}$$

---

[1] T. Lalesco, Introduction à la théorie des équations integrales, pp. 25—27. — Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, S. 421—423.

[2] Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, S. 439—446.

[3] Iglisch, Z. A. M. M., Bd. 14, H. 1, 1934.

Здесь q_ν и r_ν — коэффициенты разложения функций $q(x)$ и $r(x)$ по степеням $(b-x)$. (Iglisch заранее предполагает, что $q(x)$ и $r(x)$ — аналитические функции и разложения у конца интервала b

$$q(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu (b-x)^\nu,$$

$$r(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu (b-x)^\nu$$

для $|b-x|\leqslant 1$ при $|b-a|\leqslant 1$ абсолютно сходятся).

Формула (8) годна для $k>1$ и при ее использовании все

$$A_{00}^{(m)},\ A_{01}^{(m)},\ A_{10}^{(m)},\ A_{11}^{(m)}$$

остаются совершенно неопределенными. Из граничных условий (2) Iglisch получает формулы:

$$\begin{gathered}\alpha_1 A_{00}^{(m)}+\alpha_2 A_{10}^{(m)}=0,\\ \alpha_1 A_{01}^{(m)}+\alpha_2 A_{11}^{(m)}=0,\\ \beta_1 A_{00}^{(m)}+\beta_2 A_{10}^{(m)}=0,\\ \beta_1 A_{10}^{(m)}+\beta_2 A_{11}^{(m)}=0,\end{gathered}\tag{9}$$

сводящие $A_{00}^{(m)}$, $A_{01}^{(m)}$ и $A_{10}^{(m)}$ к единственной величине, остающейся произвольной $A_{11}^{(m)}$. Затем доказывается, что можно положить

$$A_{11}^{(0)}=1,\ A_{11}^{(m)}=0 \qquad \text{для } m>0.$$

Коэффициенты $A_{nk}^{(m)}$, вычисленные при этом предположении из (8) и (9), при подстановке в (7) дают сходящийся ряд для d_m, и корни уравнения (4) с вычисленными таким образом коэффициентами будут собственными значениями интегрального уравнения (3). Таким образом применение метода интегральных уравнений для уравнений 2-го порядка разработано Iglisch достаточно полно. Однако в технических приложениях теории колебаний еще бо̀льшую роль играют краевые задачи дифференциальных уравнений 4-го порядка. (К таким задачам, как известно, сводится задача о поперечных колебаниях стержня, о колебаниях корабля, вибрации лопастей воздушного винта, вибрации лопаток турбин, колебаниях арки и т. д.)

Iglisch считает, что разработанный им метод для уравнений 2-го порядка слово в слово переносится на уравнения 4-го порядка. Однако подробное исследование вопроса показало необходимость значительных добавлений.

Как было указано выше, затруднения с определением величины $A_{11}^{(m)}$ обходятся Iglisch тем, что он полагает

$$A_{11}^{(0)}=1,\ A_{11}^{(m)}=0 \qquad \text{для } m>0,$$

предварительно доказав, что этот произвольный выбор не оказывает влияния на результаты. При ближайшем рассмотрении выяснилось, что для уравнений 4-го порядка такого рода произвол является недопустимым.

Развить для уравнений 4-го порядка метод, разработанный Iglisch для уравнений 2-го порядка, и является задачей настоящей работы.

1. Постановка задачи. Пусть нужно определить собственные значения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right)+q(x)\,y=\lambda r(x) \tag{10}$$

с однородными самосопряженными граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 y(0)+a_2 y'(0)+a_3 y''(0)+a_4 y'''(0)&=0,\\ b_1 y(0)+b_2 y'(0)+b_3 y''(0)+b_4 y'''(0)&=0,\\ c_1 y(l)+c_2 y'(l)+c_3 y''(l)+c_4 y'''(l)&=0,\\ d_1 y(l)+d_2 y'(l)+d_3 y''(l)+d_4 y'''(l)&=0, \end{aligned} \tag{11}$$

и в предположении, что $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи, где $p(x)$ $q(x)$, $r(x)$ — аналитические функции в интервале $(0, l)$, разлагающиеся по степеням x, $l-x$, т. е.

$$\begin{aligned} p(x)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu'(l-x)^\nu,\\ q(x)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu'(l-x)^\nu,\\ r(x)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}r_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}r_\nu'(l-x)^\nu, \end{aligned} \tag{12}$$

абсолютно сходятся для $|l-x|\leqslant 1$, $|x|\leqslant 1$, причем $l\leqslant 1$.

Выбор концами интервала 0 и l несущественен и сделан в связи с тем, что именно такие концы обычно встречаются в практических задачах.

Если ввести функцию Грина $G(x, s)$, существование и симметрия которой обеспечены сделанными предположениями, непрерывную в интервале $(0, l)$, с непрерывными производными 1-го и 2-го порядка и с 3-й производной, делающей скачок, равный $\frac{1}{p(x)}$ в точке $x=s$, то краевая задача (10) и (11) будет эквивалентна решению интегрального уравнения

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\,y(s)\,ds \tag{13}$$

с ядром

$$K(x, s)=G(x, s)\,r(s).$$

Наша задача — вывести формулы, практически пригодные для вычисления коэффициентов d_m характеристического уравнения

$$d_0 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 + \ldots = 0. \tag{4}$$

2. Вывод формул. Прежде всего обобщим для краевой задачи (10), (11) формулы (8), (9), полученные Iglisch.

Докажем, что $d_m(x, s)$ является аналитической функцией от x, s для

$$x \leqslant s, \ x \geqslant s.$$

Вследствие симметрии функции Грина имеем для

$$d_0(x, s) = K(x, s) = G(x, s)\, r(s)$$

следующее свойство:

$$\frac{d_0(x, s)}{r(s)} = \frac{d_0(s, x)}{r(x)}. \tag{14}$$

Из (6) получаем, принимая во внимание (14):

$$\frac{d_m(x, s)}{r(s)} = \frac{d_m(s, x)}{r(x)}. \tag{15}$$

Из (6) же, в виду свойств функции Грина, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x)\frac{\partial^2 d_m(x, s)}{\partial x^2}\right) + q(x)\, d_m(x, s) = r(x)\, d_{m-1}(x, s). \tag{16}$$

Так как функция Грина вследствие (12) является для $x \leqslant s$, $x \geqslant s$ аналитической функцией от x, s, то аналитической функцией будет:

$$d_0(x, s) = G(x, s)\, r(s)$$

и, в виду (15) и (16), также и $d_m(x, s)$.

По (6) все $d_m(x, s)$ содержат множителем $r(s)$, и поэтому можно положить:

$$d_m(x, s) = P_m(x, s)\, r(s), \tag{17}$$

где теперь $P_m(x, s)$ будет аналитической функцией от x, s для $x \leqslant s$, $x \geqslant s$, причем в виду (15)

$$P_m(x, s) = P_m(s, x).$$

Следовательно, $P_m(x, s)$ может быть представлена в форме:

$$P_m(x, s) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)}\, x^n (l - s)^k & \text{для } x \leqslant s \\[2ex] \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)}\, s^n (l - x)^k & \text{,, } \ x \geqslant s. \end{cases} \tag{18}$$

Соотношение (16) в виду (17) может быть переписано таким образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x)\frac{\partial^2 P_m(x, s)}{\partial x^2}\right) + q(x)\, P_m(x, s) = r(x)\, P_{m-1}(x, s), \tag{19}$$

откуда, взяв для $P_m(x, s)$ его аналитическое выражение для $x \leqslant s$ и имея в виду (12), получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} n(n-1)A_{nk}^{(m)} p_\nu x^{n+\nu-2}(l-s)^k\right)+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)} q_\nu x^{n+\nu}(l-s)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} r_\nu x^{n+\nu}(l-s)^k. \tag{20}$$

Приравнивая в (20) коэффициенты при $x^{n-4}(l-s)^k$, получим

$$(n-2)(n-3)\sum_{\nu=2}^{n}\nu(\nu-1)A_{\nu k}^{(m)} p^{n-\nu}+\sum_{\nu=0}^{n-4}A_{\nu k}^{(m)} q_{n-\nu-4}= \\ =\sum_{\nu=0}^{n-4}A_{\nu k}^{(m-1)} r_{n-\nu-4}. \tag{21'}$$

Формула (21′), являющаяся обобщением формулы (8), выведенной Iglisch, годна для любого k и для $n \geqslant 4$.

Если исходить из аналитического выражения $P_m(x, s)$ для $x \geqslant s$ и из разложения в (12) $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ по степеням $(l-x)$, то, сравнивая коэффициенты в (19), получим формулу:

$$(k-2)(k-3)\sum_{\nu=2}^{k}\nu(\nu-1)A_{n\nu}^{(m)} p'_{k-\nu}+\sum_{\nu=0}^{k-4}A_{n\nu}^{(m)} q'_{k-\nu-4}= \\ =\sum_{\nu=0}^{k-4}A_{n\nu}^{(m-1)} r'_{k-\nu-4}, \tag{21''}$$

годную для любого n и для $k \geqslant 4$. Формула (21′) дает выражения $A_{nk}^{(m)}$ через $A_{\nu k}^{(m)}$, $A_{\nu k}^{(m-1)}$ с $\nu \leqslant n-4$, формула (21″) — выражения $A_{nk}^{(m)}$ через $A_{n\nu}^{(m)}$, $A_{n\nu}^{(m-1)}$ с $\nu \leqslant n-4$. Если будут известны $A_{nk}^{(0)}$, то по этим формулам можно определять $A_{nk}^{(m)}$. Но так как первая из них годна лишь для $n > 3$, вторая лишь для $k > 3$, то для каждого m остаются совершенно неопределенными 16 величин:

$$A_{ij}^{(m)} \qquad (i=0, 1, 2, 3;\ j=0, 1, 2, 3).$$

Используем теперь граничные условия (11). Из (6) следует, что $d_m(x, s)$ удовлетворяет граничным условиям (11), так как им удовлетворяет функция Грина $G(x, s)$. Подставляя $d_m(x, s)$ в (11) и принимая во внимание (17) и (18), имеем:

$$a_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}^{(m)}(l-s)^k + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^{(m)}(l-s)^k + 2a_3 \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(m)}(l-s)^k + $$
$$+ 6a_4 \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}^{(m)}(l-s)^k = 0,$$

$$b_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^{(m)}(l-s)^k + b_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^{(m)}(l-s)^k + 2b_3 \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(m)}(l-s)^k + $$
$$+ 6b_4 \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}^{(m)}(l-s)^k = 0,$$

$$c_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0}^{(m)} s^k + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1}^{(m)} s^k + 2c_3 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k2}^{(m)} s^k + 6c_4 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k3}^{(m)} s^k = 0,$$

$$d_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0}^{(m)} s^k + d_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1}^{(m)} s^k + 2d_3 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k2}^{(m)} s^k + 6d_4 \sum_{k=0}^{\infty} A_{k3}^{(m)} s^k = 0.$$

Откуда получаем соотношения, аналогичные (9):

$$\begin{aligned}
&a_1 A_{0k}^{(m)} + a_2 A_{1k}^{(m)} + 2a_3 A_{2k}^{(m)} + 6a_4 A_{3k}^{(m)} = 0,\\
&b_1 A_{0k}^{(m)} + b_2 A_{1k}^{(m)} + 2b_3 A_{2k}^{(m)} + 6b_4 A_{3k}^{(m)} = 0,\\
&c_1 A_{k0}^{(m)} + c_2 A_{k1}^{(m)} + 2c_3 A_{k2}^{(m)} + 6c_4 A_{k3}^{(m)} = 0,\\
&d_1 A_{k0}^{(m)} + d_2 A_{k1}^{(m)} + 2d_3 A_{k2}^{(m)} + 6d_4 A_{k3}^{(m)} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Полагая последовательно $k=0, 1, 2, 3$ в каждом из четырех уравнений (22), получим 16 однородных уравнений с 16 неизвестными. Если в каждом из этих уравнений по крайней мере один из коэффициентов a_ν, b_ν, c_ν, d_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) не равен нулю, то матрица коэффициентов имеет ранг 12. Следовательно, можно выразить линейно все $A_{nk}^{(m)}$ ($n=0, 1, 2, 3$; $k=0, 1, 2, 3$) через четыре из них. Обозначим эти четыре коэффициента, оставшихся пока произвольными, через $\overline{A}_{nk}^{(m)}$.

Если теперь, идя путем Iglisch, положить

$$\overline{A}_{nk}^{(0)} = 1; \ \overline{A}_{nk}^{(m)} = 0 \qquad \text{для } m > 0$$

и определять d_m по формуле (7), обобщенной для уравнения 4-го порядка, то величины d_m, полученные при таком произвольном выборе $\overline{A}_{nk}^{(m)}$, не будут коэффициентами характеристического уравнения (4). В этом можно убедиться на примере поперечных колебаний стержня, заделанного в точке $x=0$ и свободного в точке $x=1$. Соответствующей краевой задачей будет:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\lambda y; \tag{10'}$$

$$\begin{aligned} y\Big|_{x=0}&=0, & \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}&=0, \\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}&=0, & \frac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x=1}&=0,^1 \end{aligned} \tag{11'}$$

и характеристическое уравнение

$$2+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right)\lambda+\left(\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}\right)\lambda^2+\left(\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}\right)\lambda^3+\ldots=0$$

не будет иметь положительных корней, в то время как известно, что все собственные значения краевой задачи (10) и (11) положительные числа.

Мы пришли к противоречию, идя обходным путем Iglisch при определении $\overline{A}_{nk}^{(m)}$, и поэтому вынуждены искать другие способы для их вычисления.

$\overline{A}_{nk}^{(0)}$ являются коэффициентами разложения функции Грина по степеням x, $(l-s)$, так как

$$G(x, s)\,r(s)=K(x, s)=d_0(x, s)=P_0(x, s)\,r(s)$$

и по (18)

$$G(x, s)=\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)}\,x^n(l-s)^k & \text{для } x\leqslant s, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)}\,s^n(l-x)^k & \text{,, } x\geqslant s. \end{cases}$$

Как известно, функция Грина $G(x, s)$ однозначно определяется следующими условиями:

1) $G(x, s)$ удовлетворяет уравнению (10) с правой частью, равной нулю;

2) $G(x, s)$ удовлетворяет граничным условиям (11);

3) $G(x, s)$ в интервале $(0, l)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x первого и второго порядка. Третья производная $\frac{d^3G(x, s)}{dx^3}$ делает скачок, равный $\frac{1}{p(x)}$ в точке $x=s$, и, следовательно, при использовании этих условий можно определить все $A_{nk}^{(0)}$ для каждой частной задачи.[2]

Выведем теперь рекуррентную формулу для определения $A_{nk}^{(m)}$ при $m>0$.

[1] Горт, Дифференциальные уравнения, стр. 471—475. — Пфейфер, Колебания упругих тел. Механика упругого тела, вып. III, стр. 85—86.

[2] Как практически проводить вычисления при определении $A_{nk}^{(0)}$, см. приложение.

Перепишем (6) в виде:

$$P_m(x, s) = G(x, s)\, d_m + \int_0^x G_2(x, t)\, r(t)\, P_{m-1}(t, s)\, dt + \int_x^l G_1(x, t)\, r(t)\, P_{m-1}(t, s)\, dt,$$

где $G_2(x, s)$ — функция Грина для $x \geqslant s$, $G_1(x, s)$, для $x \leqslant s$.

Отсюда получим аналитическое выражение $P_m(x)$ для $x \leqslant s$ в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)} s^n (l-s)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)} s^n (l-x)^k d_m + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)} t^n (l-x)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} s^n (l-t)^k r(t)\, dt + \int_x^l \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)} x^n (l-t)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} s^n (l-t)^k r(t)\, dt. \tag{23}$$

Разложим функцию Грина по степеням $(l-s)$, $(l-x)$, т. е. представим ее в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} (l-x)^n (l-s)^k & \text{для } x \leqslant s, \\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} (l-s)^n (l-x)^k & \text{"} \quad x \geqslant s. \end{cases}$$

Если разложить также по степеням $(l-t)$ функцию $r(t)$, то в подинтегральные выражения обоих интегралов в (23) будут входить степени s, $(l-x)$, $(l-t)$.

Наконец, заменив еще в (23) $\int_0^x$ разностью $\int_0^l - \int_x^l$, приведем (23) к виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)} s^n (l-x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(0)} s^n (l-x)^k d_m + \int_0^l \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} (l-t)^n (l-x)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} s^n (l-t)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu (l-t)^\nu\, dt - \int_x^l \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} (l-t)^n (l-x)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} s^n (l-t)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu (l-t)^\nu\, dt + \int_x^l \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} (l-x)^n (l-t)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}^{(m-1)} s^n (l-t)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu (l-t)^\nu\, dt.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, $(l-s)$, получим:

$$A_{nk}^{(m)}=A_{nk}^{(0)}d_m+\sum_{i=0}^{\infty}A_{ni}^{(m-1)}\sum_{j=0}^{\infty}r_j\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\nu k}\frac{l^{i+\nu+j+1}}{i+\nu+j+1}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\infty}A_{ni}^{(m-1)}\sum_{j=0}^{\infty}r_j\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\nu,k-(i+\nu+j+1)}\frac{1}{i+\nu+j+1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}A_{ni}^{(m-1)}\sum_{j=0}^{\infty}r_j\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\nu,k-(i+\nu+j+1)}\frac{1}{k-\nu},$$

или, объединив суммы

$$A_{nk}^{(m)}=d_m A_{nk}^{(0)}+\sum_{i=0}^{\infty}A_{ni}^{(m-1)}\sum_{j=0}^{\infty}r_j\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\nu k}\frac{l^{i+\nu+j+1}}{i+\nu+j+1}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\nu,k-(i+\nu+j+1)}\left(\frac{1}{k-\nu}-\frac{1}{i+\nu+j+1}\right)\right].\tag{24}$$
[1]

Так как определять по этой формуле $A_{nk}^{(m)}$ можно лишь зная d_m, то нам придется пользоваться еще формулой:

$$d_{m+1}=-\frac{1}{m+1}\int_0^l d_m(s,\, s)\,ds.\tag{5}$$

Таким образом порядок вычислений устанавливается следующий: использовав (22), выражаем все $A_{nk}^{(m)}$ с индексами $k\leqslant 3$, $n\leqslant 3$ через четыре величины $\overline{A}_{nk}^{(m)}$, затем определяем $A_{nk}^{(0)}$ — коэффициенты разложения функции Грина, и дальше, определив d_1 по (5), можем вычислить по (24) четыре величины $\overline{A}_{nk}^{(0)}$ Для вычисления $A_{nk}^{(1)}$ с индексами $n>3$ пользуемся формулой (21′), $A_{nk}^{(1)}$ с индексами $k>3$ — формулой (21″). Зная все $A_{nk}^{(1)}$, можно по (5) определить d_2, затем по (24), (21′), (21″) все $A_{nk}^{(2)}$, дальше вновь по (5) d_3, по (24), (21′), (21″) $A_{nk}^{(3)}$ и т. д. Выведенные формулы позволяют определять коэффициенты характеристического уравнения (4) с любой степенью точности.

Решая характеристическое уравнение (4) одним из приближенных способов, можем определять собственные значения краевой задачи (10), (11) с любой степенью точности.

3. Примеры. В качестве первого примера мы рассмотрим уже упомянутую выше (стр. 163) задачу о свободных поперечных колебаниях стержня постоянного поперечного сечения, заделанного в точке $x=0$ и свободного в точке $x=1$.

---

[1] Можно было бы вывести аналогичную формулу, исходя из аналитического выражения $P_m(x,\, s)$ для $x\leqslant s$ но в этом нет необходимости.

Эта задача связана с отысканием собственных значений уравнения с постоянными коэффициентами, но это не имеет никакого значения по существу. Соответствующей краевой задачей будет:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\lambda y,$$

$$y|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1}=0.$$

Функция Грина имеет вид:

$$G(x, s)=\begin{cases}\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{2}x^2(l-s)-\frac{1}{6}x^3 & \text{для } x\leqslant s,\\ \frac{1}{2}ls^2-\frac{1}{2}s^2(l-x)-\frac{1}{6}s^3 & \text{„ } x\geqslant s,\end{cases}$$

т. е.

$$A_{20}^{(0)}=\frac{1}{2};\quad A_{21}^{(0)}=-\frac{1}{2};\quad A_{30}^{(0)}=-\frac{1}{6};\quad A_{31}^{(0)}=0,\quad d_0=1.$$

При данных граничных условиях получаем из (22) все

$$\overline{A}_{nk}^{(m)}=0,$$

кроме

$$A_{20}^{(m)},\quad A_{21}^{(m)},\quad A_{30}^{(m},\quad A_{31}^{(m)}.$$

По формуле (5) получаем:

$$d_1=-\frac{1}{12}=-0.083\,333\,333\ldots;$$

по формуле (24):

$$A_{20}^{(1)}=\frac{1}{240};\quad A_{21}^{(1)}=-\frac{1}{48};\quad A_{30}^{(1)}=-\frac{1}{144};\quad A_{31}^{(1)}=\frac{1}{36};$$

по формуле (21''):

$$A_{24}^{(1)}=\frac{1}{48},\quad A_{34}^{(1)}=-\frac{1}{144},$$

$$A_{25}^{(1)}=-\frac{1}{240}.$$

Вновь по формуле (5) определяем d_2:

$$d_2=\frac{11}{40\,320}=0.000\,278\,281\,174;$$

по формуле (24):

$$A_{20}^{(2)}=\frac{1}{2^4\cdot 3^4\cdot 5},\qquad A_{30}^{(2)}=-\frac{1}{2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7},$$

$$A_{21}^{(2)}=-\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7},\quad A_{31}^{(2)}=\frac{1}{2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}$$

и по формуле (21″):

$$A_{24}^{(2)}=\frac{1}{2^7\cdot 3^2\cdot 5},\qquad A_{34}^{(2)}=-\frac{1}{2^7\cdot 3^2},$$

$$A_{25}^{(2)}=-\frac{1}{2^7\cdot 3^2\cdot 5},\qquad A_{35}^{(2)}=\frac{1}{2^5\cdot 3^3\cdot 5},$$

$$A_{28}^{(2)}=\frac{1}{2^8\cdot 3^2\cdot 5},\qquad A_{38}^{(2)}=-\frac{1}{2^8\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7},$$

$$A_{29}^{(2)}=-\frac{1}{2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}.$$

Затем снова по формуле (5):

$$d_3=-\frac{1}{2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 11}=-0.000\,211\,043\,771\ldots;$$

по формуле (24):

$$A_{30}^{(3)}=-\frac{29}{2^8\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11},\qquad A_{20}^{(3)}=\frac{1\,241}{2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13},$$

$$A_{31}^{(3)}=\frac{31}{2^5\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11},\qquad A_{21}^{(3)}=-\frac{29}{2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11};$$

по формуле (21″):

$$A_{24}^{(3)}=\frac{1}{2^9\cdot 3^5\cdot 5},\qquad A_{34}^{(3)}=-\frac{1}{2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7},$$

$$A_{25}^{(3)}=-\frac{1}{2^9\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7},\qquad A_{35}^{(3)}=\frac{1}{2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7},$$

$$A_{28}^{(3)}=\frac{1}{2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7},\qquad A_{38}^{(3)}=-\frac{1}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7},$$

$$A_{29}^{(3)}=-\frac{1}{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7},\qquad A_{39}^{(3)}=\frac{1}{2^9\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7},$$

$$A_{2,12}^{(3)}=\frac{1}{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11},\qquad A_{3,12}^{(3)}=-\frac{1}{2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11},$$

$$A_{2,13}^{(3)}=-\frac{1}{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13},$$

и по формуле (5):

$$d_4=0.510\,484\,760\cdot 10^{-6}.$$

Если ограничиться четырьмя вычисленными коэффициентами, характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\lambda^4-413.401\,606\lambda^3+5344.28\,170\lambda^2-163\,243.528\lambda+$$
$$+1\,958\,922.34=0.$$

Сравним его корни с результатами, приведенными Пфейфером.[1]

Наименьший корень, служащий для определения частоты основного тона, получается с хорошей точностью, а именно:

$$\lambda_1=12.361\,302\,1,\quad \sqrt[4]{\lambda_1}\doteq 1.875\,06,$$

[1] П. Пфейфер, Колебания упругих тел. Механика упругого тела, вып. III, стр. 88.

в то время как точное значение, приведенное у Пфейфера,

$$\sqrt[4]{\lambda_1}=1.875\,10,$$

т. е. погрешность не превышает 0.000 04.

Второй корень, дающий частоту первого обертона,

$$\lambda_2=401.066\,895$$

$$\sqrt[4]{\lambda_2}\doteq 4.4751,$$

как и следовало ожидать, имеет большую погрешность, а именно, у Пфейфера:

$$\sqrt[4]{\lambda_2}=4.694\,10,$$

но полученный результат можно считать хорошим (погрешность $<4.7\%$), так как все известные приближенные способы дают гораздо бо́льшую погрешность для обертонов. Если желательны для λ_2 более точные результаты, нужно вычислять дальнейшие коэффициенты характеристического уравнения.

Что касается частот 2-го, 3-го и т. д. обертонов, то для их определения нужно вычислять большее количество коэффициентов.

В качестве второго примера можно взять задачу о колебании железобетонной параболической арки моста. Соответствующей краевой задачей будет:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\lambda r(x)\,y;$$

$$y|_{x=0}=0, \qquad y|_{x=l}=0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l}=0,$$

где

$$r(x)=1-\frac{16f^2}{l^4}(l-2x)^2,$$

l и f постоянные (l — пролет, а f — высота арки).

Определим частоту колебания основного тона, ограничившись двумя коэффициентами характеристического уравнения. Функцией Грина для данной краевой задачи будет:

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2l}x^2(l-s)^2-\frac{1}{2l^2}x^2(l-s)^3-\frac{1}{2l^2}x^3(l-s)^2+ \\ \qquad +\frac{1}{3l^3}x^3(l-s)^3 & \text{для } x\leqslant s, \\ \frac{1}{2l}s^2(l-x)^2-\frac{1}{2l^2}s^2(l-x)^3-\frac{1}{2l^2}s^3(l-x)^2+ \\ \qquad +\frac{1}{3l^3}s^3(l-x)^3 & \text{„ } x\geqslant s,\end{cases}$$

т. е.

$$A_{22}^{(0)}=\frac{1}{2l}, \quad A_{23}^{(0)}=-\frac{1}{2l^2}, \quad A_{32}^{(0)}=-\frac{1}{2l^2}, \quad A_{33}^{(0)}=\frac{1}{3l^3}.$$

Из (22) получаем, что все

$$A_{nk}^{(m)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3;\ k = 0, 1, 2, 3),$$

кроме

$$A_{22}^{(m)},\ A_{23}^{(m)},\ A_{32}^{(m)},\ A_{33}^{(m)}.$$

Причем, в виду симметрии $r(x)$ относительно $\frac{l}{2}$ и симметричных граничных условий, коэффициенты $A_{nk}^{(m)}$ будут симметричны относительно индексов n, k, т. е.

$$A_{nk}^{(m)} = A_{kn}^{(m)},$$

и отсюда, в частности,

$$A_{23}^{(m)} = A_{32}^{(m)}.$$

По формуле (5) получаем:

$$d_1 = -\frac{l^6}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} r_2 - \frac{l^5}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} r_1 - \frac{l^4}{2^3},$$

где r_2, r_1, r_0 — коэффициенты разложения $r(x)$ по степеням x, т. е.

$$r_2 = -\frac{64f^2}{l^4}, \quad r_1 = \frac{64f^2}{l^3}, \quad r_0 = \frac{l^4 - 16f^2 l^2}{l^4}.$$

Так как

$$r_1 = -r_2 l,$$

то d_1 можно привести к такому виду:

$$d_1 = \frac{r_2 l^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{r_0 l^4}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

В дальнейших вычислениях для упрощения будем r_1 заменять на $-r_2 l$.

По формуле (24):

$$A_{22}^{(1)} = r_2 \frac{l^5}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} - r_0 \frac{l^3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7},$$

$$A_{23}^{(1)} = A_{32}^{(1)} = r_2 \frac{l^4}{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - r_0 \frac{l^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5},$$

$$A_{33}^{(1)} = -r_2 \frac{l^3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + r_0 \frac{l}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

По формуле (21″):

$$A_{26}^{(1)} = r_0 \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}, \qquad A_{36}^{(1)} = -r_0 \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 l^2},$$

$$A_{27}^{(1)} = -r_2 \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - r_0 \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot l^2}, \qquad A_{37}^{(1)} = r_2 \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 l} + r_0 \frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 l},$$

$$A_{28}^{(1)} = r_2 \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot l}, \qquad A_{38}^{(1)} = -r_2 \frac{1}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 l^2},$$

$$A_{29}^{(1)} = -r_2 \frac{1}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 l}, \qquad A_{39}^{(1)} = r_2 \frac{1}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7 l^3},$$

и, наконец, по формуле (5):

$$d_2 = r_2^2 \frac{421 \cdot 17^2 l^{12}}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + r_0^2 \frac{103 l^8}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} - r_0 r_2 \frac{941 l^{10}}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}.$$

Определим частоту колебания основного тона арки с пролетом в 30 м и высотой 5 м.

Тогда первым корнем уравнения

$$1 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 = 0$$

будет:

$$\lambda_1 = 0.000\,902\,83 ^1/\text{м}^4.$$

Частота колебания арки — N определится следующим образом:

$$N = \frac{\sqrt{\lambda} p}{2\pi},$$

где p — величина, зависящая от свойств арки.

Для данной арки

$$p = 1000 \text{ м}^2/\text{сек.},$$

и, следовательно, число колебаний в секунду

$$N = 4.8.$$

4. Приложение. Вычисление $A_{nk}^{(0)}$ — коэффициентов разложения функции Грина — для каждой частной задачи бывает громоздко. Имея в виду упростить эти вычисления, выведем формулы для определения $A_{nk}^{(0)}$.

Подставляя $G(x, s) = P_0(x, s) r(s)$ в уравнение (10) и приравнивая правую часть нулю, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[p(x) \frac{\partial^2 P_0(x, s)}{\partial x^2}\right] = -q(x) P_0(x, s), \tag{25}$$

т. е. (19) при $m = 0$ с правой частью, равной нулю. Идя затем тем же путем, что и при выводе формулы (21), т. е. подставляя в (25) вместо $P_0(x, s)$ его аналитическое выражение для $x \leqslant s$ и сравнивая коэффициенты, получим:

$$(n-2)(n-3) \sum_{\nu=2}^{n} \nu(\nu-1) A_{\nu k}^{(0)} p_{n-\nu} = -\sum_{\nu=0}^{n-4} A_{\nu k}^{(0)} q_{n-\nu-4}. \tag{26'}$$

Аналогично получим, используя аналитическое выражение $G(x, s)$ для $x \geqslant s$:

$$(k-2)(k-3) \sum_{\nu=2}^{n} \nu(\nu-1) A_{k\nu}^{(0)} p_{k-\nu} = -\sum_{\nu=0}^{n-4} A_{k\nu}^{(0)} q_{k-\nu-4}. \tag{26''}$$

Формула (26′) устанавливает соотношения между $A_{nk}^{(0)}$ с $n \geqslant 4$ и $A_{\nu k}^{(0)}$ с $\nu \leqslant n-4$ при любом k; формула (26″) — соотношения между $A_{nk}^{(0)}$ с $k \geqslant 4$

и $A_{\nu n}^{(0)}$ с $\nu \leqslant k-4$ при любом n. Из второго условия получаем (22) при $m=0$, т. е.

$$\begin{aligned}
&a_1 A_{0k}^{(0)} + a_2 A_{1k}^{(0)} + 2a_3 A_{2k}^{(0)} + 6a_4 A_{3k}^{(0)} = 0,\\
&b_1 A_{0k}^{(0)} + b_2 A_{1k}^{(0)} + 2b_3 A_{2k}^{(0)} + 6b_4 A_{3k}^{(0)} = 0,\\
&c_1 A_{k0}^{(0)} + c_2 A_{k1}^{(0)} + 2c_3 A_{k2}^{(0)} + 6c_4 A_{k3}^{(0)} = 0,\\
&d_1 A_{k0}^{(0)} + d_2 A_{k1}^{(0)} + 2d_3 A_{k2}^{(0)} + 6d_4 A_{k3}^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Третье условие дает следующие соотношения для $G(x, s)$:

$$\left.\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\right|_{x=s-0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\right|_{x=s-0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3}\right|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)},$$

или, принимая во внимание разложение функции Грина,

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} kA_{nk}^{(0)} s^n (l-s)^k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nA_{nk}^{(0)} s^{n-1}(l-s)^k, \tag{28'}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_{nk}^{(0)} s^n (l-s)^{k-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_{nk}^{(0)} s^{n-2}(l-s)^k, \tag{28''}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) A_{nk}^{(0)} p_\nu s^{n+\nu}(l-s)^{k-3} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) A_{nk}^{(0)} p_\nu s^{n+\nu-3}(l-s)^k = 1. \tag{28'''}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты в (28′), получаем для любого n:

$$-\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty} kA_{nk}^{(0)} l^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_{n-1,k} l^{k-2} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{i-1}\sum_{k=i}^{\infty} kC_{k-1}^{i-1} A_{n-(i-1),k}^{(0)} l^{k-i} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty} kC_{k-1}^{n-1} A_{1k} l^{k-n} + (-1)\sum_{k=n+1}^{\infty} kC_{k-1}^{n} A_{0k}^{(0)} l^{k-(n+1)}\Bigg] =$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} A_{n+1,k}^{(0)} l^k - n\sum_{k=1}^{\infty} kA_{nk}^{(0)} l^{k-1} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{i-1}(n+2-i)\sum_{k=i-1}^{\infty} C_k^{i-1} A_{n+2-i,k}^{(0)} l^{k-(i-1)} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\, 2\sum_{k=n-1}^{\infty} C_k^{n-1} A_{2k}^{(0)} l^{k-(n-1)} + (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n A_{1k}^{(0)} l^{k-n},$$

или

$$-\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\sum_{k=i}^{\infty}C_{k-1}^{i-1}A_{n-(i-1),k}\,l^{k-1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(n+2)-i)\sum_{k=i-1}^{\infty}C_k^{i-1}A_{n+2-i,k}^{(0)}\,l^{k-(i-1)}. \qquad (29')$$

Аналогично получим из (28''):

$$\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^{i-1}\sum_{k=i+1}^{\infty}k(k-1)\,C_{k-2}^{i-1}A_{n-(i-1),k}\,l^{k-(i+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(n+3-i)(n+2-i)\sum_{k=i-1}^{\infty}C_k^{i-1}A_{n+3-i,k}^{(0)}\,l^{k-(i-1)}. \qquad (29'')$$

и из (28'''):

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n-(i-1)}(-1)^{i-1}\sum_{k=i+2}^{\infty}k(k-1)(k-2)\,C_{k-3}^{i-1}A_{n-(i-1)-j,k}^{(0)}\,l^{k-(i+2)}p_j-$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n-(i-1)}(-1)^{n-1}(n+4-i)(n+3-i)(n+$$

$$+2-i)\sum_{k=i-1}^{\infty}C_k^{i-1}A_{n+4-i-j,k}^{(0)}\,l^{k-(i-1)}p_j=\begin{cases}1 & \text{для } k=0,\\ 0 & \text{„} \quad k>0.\end{cases} \qquad (29''')$$

Из (26'), (26''), (27), (29'), (29''), (29''') можно определить все $A_{nk}^{(0)}$, в том числе и $\overline{A}_{nk}^{(0)}$, так как функция Грина однозначно определяется указанными выше тремя условиями.

Частные случаи граничных условий. Среди формул для определения $A_{nk}^{(0)}$ — (26'), (26''), (27), (29') (29''), (29''') три последние имеют довольно громоздкий вид. Но вычисление по ним при различных частных случаях граничных условий, обычно встречающихся на практике, довольно просто.

Рассмотрим несколько таких частных случаев.

1°. Для стержня, заделанного в точке $x=0$ и свободного в точке $x=1$, как было указано выше (2), будет краевой задачей (10'), (11'), являющаяся частным случаем задачи (10), (11) при

$$\begin{array}{llll}
p(x)=1, & r(x)=1, & q(x)=0, & l=1;\\
a_1=1, & a_2=0, & a_3=0, & a_4=0;\\
b_1=0, & b_2=1, & b_3=0, & b_4=0;\\
c_1=0, & c_2=0, & c_3=1, & c_4=0;\\
d_1=0, & d_2=0, & d_3=0, & d_4=1.
\end{array}$$

Из (22) получим, что все

$$A_{ij}=0, \qquad (i=0, 1, 2, 3;\ j=0, 1, 2, 3),$$

за исключением

$$A_{20}^{(m)},\ A_{21}^{(m)},\ A_{30}^{(m)},\ A_{31}^{(m)},$$

которые остаются произвольными.

Из (26′), (26″) получаем, что все $A_{nk}^{(0)}$, начиная с $n \geqslant 4$, $k \geqslant 4$, равны нулю. Дальнейшие вычисления производятся исключительно по формулам (29′), (29″), (29‴). Учитывая, что все $A_{nk}^{(0)}$, кроме четырех неизвестных

$$A_{20}^{(0)},\ A_{21}^{(0)},\ A_{30}^{(0)},\ A_{31}^{(0)},$$

равны нулю, получаем:

a) Из формулы (29′):

для $n=0$ все коэффициенты равны нулю;

„ $n=1$

$$0=2\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(0)} l^k,$$

или

$$A_{20}^{(0)}+A_{21}^{(0)} l=0;$$

для $n=2$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} kA_{2k}^{(0)} l^{k-1}=3\sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}^{(0)} l^k-2\sum_{k=1}^{\infty} kA_{2k}^{(0)} l^{k-1},$$

или

$$-A_{21}^{(0)}+3A_{30}^{(0)}+3A_{31}^{(0)} l=0;$$

для $n=3$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} kA_{3k}^{(0)} l^{k-1}=-3\sum_{k=1}^{\infty} kA_{3k}^{(0)} l^{k-1},$$

или

$$A_{31}^{(0)}=0;$$

для $n>3$ все коэффициенты равны нулю.

b) По формуле (29″):

для $n=0$

$$0=2\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(0)} l^k,$$

или

$$A_{20}^{(0)}+A_{21}^{(0)} l=0;$$

для $n=1$

$$0=6\sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}^{(0)} l^k-2\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^{(0)} l^{k-1},$$

или

$$-A_{21}^{(0)}+3A_{30}^{(0)}+3A_{31}^{(0)}l-0;$$

для $n=2$

$$0=-6\sum_{k=1}^{\infty}kA_{3k}^{(0)}l^{k-1},$$

или

$$A_{31}^{(0)}=0;$$

для $n>2$ все коэффициенты равны нулю.

c) Из формул (29'''):

для $n=0$

$$6\sum_{k=0}^{\infty}A_{3k}^{(0)}l^{k}=1,$$

или

$$6A_{30}^{(0)}+6A_{31}^{(0)}l=1;$$

для $n=1$

$$6\sum_{k=1}^{\infty}A_{3k}^{(0)}l^{k-1}=0,$$

или

$$A_{31}^{(0)}=0;$$

для $n>1$ все коэффициенты равны нулю.

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$A_{20}^{(0)}=\frac{l}{2};\quad A_{21}^{(0)}=-\frac{1}{2};\quad A_{30}^{(0)}=-\frac{1}{6};\quad A_{31}^{(0)}=0.$$

Функция Грина будет иметь вид:[1]

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{2}x^2(l-s)-\frac{1}{6}x^3 & \text{для} \quad x\leqslant s\\ \frac{1}{2}ls^2-\frac{1}{2}s^2(l-s)-\frac{1}{6}s^3 & \text{„} \quad x\geqslant s.\end{cases}$$

2°. Для стержня, оба конца которого заделаны, граничными условиями будут:

$$y|_{x=0}=0,\qquad y|_{x=l}=0;$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l}=0.$$

Такие граничные условия возникнут из (11) при

$$\begin{array}{llll} a_1=1, & a_2=0, & a_3=0, & a_4=0,\\ b_1=0, & b_2=1, & b_3=0, & b_4=0,\\ c_1=1, & c_2=0, & c_3=0, & c_4=0,\\ d_1=0, & d_2=1, & d_3=0, & d_4=0.\end{array}$$

[1] Ср. Горт, Дифференциальные уравнения, стр. 472.

Из (27) будем иметь:

$$A_{ij}^{(0)}=0 \qquad (i=0, 1, 2, 3; j=0, 1, 2, 3),$$

за исключением

$$A_{22}^{(0)},\quad A_{23}^{(0)},\quad A_{32}^{(0)},\quad A_{33}^{(0)},$$

которые останутся произвольными.

Если положить в (10) $q(x)=0$, $p(x)=1$, то вычислениями не сложнее, чем в предыдущем примере, находим из (29'), (29''), (29'''):

$$A_{22}^{(0)}=\frac{1}{2l},\quad A_{23}^{(0)}=-\frac{1}{2l^2},\quad A_{32}^{(0)}=-\frac{1}{2l^2},\quad A_{33}^{(0)}=\frac{1}{3l^3},$$

и функцией Грина будет:

$$G(x, s)=\begin{cases} \frac{1}{2l}x^2(l-s)^2-\frac{1}{2l^2}x^2(l-s)^3-\frac{1}{2l^2}x^3(l-s)^2+\frac{1}{3l^3}x^3(l-s)^3 & \text{для } x\leqslant s,\\ \frac{1}{2}s^2(l-s)^2-\frac{1}{2l^2}s^2(l-x)^3-\frac{1}{2l^2}s^3(l-x)^2+\frac{1}{3l^3}s^3(l-x)^3 & \text{„} \quad x\geqslant s. \end{cases}$$

3°. Для стержня с опертыми концами к граничным условиям

$$y|_{x=0}=0, \qquad y|_{x=l}=0,$$
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=l}=0,$$

придем из (11) при

$$\begin{array}{llll} a_1=1, & a_2=0, & a_3=0, & a_4=0,\\ b_1=0, & b_2=0, & b_3=1, & b_4=0,\\ c_1=1, & c_2=0, & c_3=0, & c_4=0,\\ d_1=0, & d_2=0, & d_3=1, & d_4=0. \end{array}$$

Из (27) получаем:

$$A_{ij}^{(0)}=0 \qquad (i=0, 1, 2, 3; j=0, 1, 2, 3),$$

за исключением

$$A_{11}^{(0)},\quad A_{13}^{(0)},\quad A_{31}^{(0)},\quad A_{33}^{(0)},$$

которые будут произвольными.

При $q(x)=0$, $p(x)=1$ из (29'), (29''), (29''') получаем:

$$A_{11}^{(0)}=\frac{l}{6},\quad A_{13}^{(0)}=-\frac{1}{6l},\quad A_{31}^{(0)}=-\frac{1}{6l},\quad A_{33}^{(0)}=0.$$

Функция Грина будет иметь вид:

$$G(x, s)=\begin{cases} \frac{l}{6}x(l-s)-\frac{1}{6l}x^3(l-s)^3 & \text{для } x\leqslant s,\\ \frac{l}{6}s(l-x)-\frac{1}{6l}s^3(l-x)^3 & \text{„} \quad x\geqslant s. \end{cases}$$

CALCUL APPROCHÉ DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES DES PROBLÈMES DE LIMITE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES DU 4-ME ORDRE AVEC LES COEFFICIENTS VARIABLES.

W. EFIMENKO

(Résumé)

M. Mises et plus tard M. Iglisch ont developpé la méthode des équations intégrales pour le calcul des valeurs caractéristiques des problèmes de limite des équations différentielles

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda r(x)y$$

aux conditions extrêmes homogènes

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,$$
$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0,$$

où $q(x)$, $r(x)$ sont les fonctions analytiques dans l'intervalle (a, b) et des dévelop-pements

$$q(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu (x-a)^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} q'_\nu (b-x)^\nu,$$

$$r(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu (x-a)^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} r'_\nu (b-x)^\nu,$$

convergent absolument vers les extremités de l'intervalle (a, b) pour

$$|x-a|\leqslant 1, \quad |b-x|\leqslant 1.$$

M. Iglisch estime, pense, que sa méthode s'applique sans changements aux problèmes de limite des équations différentielles du 4-me ordre. Cependant une étude plus approfondie de la question a démontré que dans ce cas sa méthode avait besoin considérablement completée. Dans cet ouvrage on développe pour des équations du 4-me ordre la méthode due à M. Iglisch pour des équations du 2-me ordre. Dans le supplément sont données quelques indications, qui se rapportent aux calculs pratiques.