АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical Sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

# ВЫВОД ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ[1]

**П. Ф. ПАПКОВИЧ**

(Ленинград)

В статье нашей, помещенной в ИМЕН, № 10, 1932 г., было показано, что общее решение однородных уравнений Ламе может быть составлено из четырех гармонических функций $\varphi_i$ с помощью соотношений:

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_0),\\
v &= \varphi_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial y}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_0),\\
w &= \varphi_3 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_0),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

причем для общности этого решения в нем нет даже необходимости подразумевать под $\varphi_0$ общий интеграл уравнения Лапласа. Вполне достаточно принимать за $\varphi_0$ совокупность всех тех гармонических функций, градиент которых не может быть представлен остальными членами правой части решения (1).

Чтобы получить из (1) решение, соответствующее плоской деформации нормальной к оси $Oz$, достаточно положить в (1)

$$\varphi_1 = \varphi_1(x, y),\ \varphi_2 = \varphi_2(x, y),\ \varphi_0 = \varphi_0(x, y),\ \varphi_3 = 0.$$

Тогда из (1) получится:

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + \varphi_0),\\
v &= \varphi_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial y}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + \varphi_0),\\
w &= 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

[1] Доложено Ленинградскому Механическому обществу осенью 1935 г. одновременно с обзорным докладом, вошедшим в предыдущий выпуск сборника.

причем, конечно, как $u$, так и $v$ будут функциями только лишь от $x$ и $y$, как и должно быть в рассматриваемом случае плоской деформации.

Если мы будем за $\varphi_i$ принимать в (2) общие интегралы уравнения Лапласа, то решение (2) будет, как то уже отмечено выше, заключать в себе ряд функций, для общности рассматриваемого решения лишних. Чтобы освободить решение (2) от лишних функций, в него входящих, можно итти двумя путями: можно не включать в $\varphi_0$ всего того, что может быть выражено через $\varphi_1$ и $\varphi_2$, но можно и, наоборот, не включать в $\varphi_1$ и $\varphi_2$ всего того, что можно выразить через $\varphi_0$.

Из этих двух путей изберем последний. С помощью функции $\varphi_0$ в состав искомого вектора перемещения

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v$$

вводится градиент произвольного гармонического скаляра, т. е. как раз то слагаемое, с точностью до которого вектор определяется своими дивергенцией и вихрем. Функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ нужны нам в решении (2) поэтому лишь для того, чтобы $\operatorname{div}\mathbf{V}$ и $\operatorname{curl}\mathbf{V}$ могли получить все те значения свои, которые они вообще могут принимать.

Как видно из (2), однако:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\,\theta, \\ \operatorname{curl}\mathbf{V} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ \omega &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \end{aligned} \tag{4}$$

причем, очевидно, по самому их определению $\theta$ и $\omega$ суть соответственно дивергенция и вихрь вектора

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\varphi_1 + \mathbf{j}\varphi_2.$$

Величины $\theta$ и $\omega$ не являются независимыми. Действительно, как показывает простое дифференцирование:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nabla^2 \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \nabla^2 \varphi_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Дивергенция и вихрь вектора $\mathbf{A}$ являются, таким образом, всегда двумя гармоническими функциями, *попарно сопряженными*. Возникает вопрос, нельзя ли эти две попарно сопряженные функции $\theta$ и $\omega$ выразить через $\varphi_1$ и $\varphi_2$, считая и последние две также сопряженными посредством условий Коши — Римана. Нетрудно видеть, что ответ на этот вопрос следует дать утвердительный.

Действительно, пусть

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y},\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}&=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}.\end{aligned}\tag{6}$$

Подставив (6) в (4), будем, если $\theta$ и $\omega$ заданы, иметь для определения $\varphi_1$ уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}&=\frac{1}{2}\theta,\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}&=-\frac{1}{2}\omega,\end{aligned}\tag{7}$$

что в силу второго из равенств (5) условиям интегрируемости удовлетворяет. Все возможные значения функций $\theta$ и $\omega$, а следовательно, и величин $\operatorname{div}\mathbf{V}$ и $\operatorname{curl}\mathbf{V}$, можно им, таким образом, всегда придать, считая функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ попарно сопряженными. *Нисколько не нарушая общности решения* (2), *мы можем, следовательно, подразумевать в нем под* $\varphi_0$ *наиболее общее выражение гармонической функции, а под* $\varphi_1$ *и* $\varphi_2$ *наиболее общее выражение двух гармонических функций, попарно сопряженных посредством условий Коши — Римана.*

Введем теперь в рассмотрение три новые гармонические функции $p$, $q$ и $r$, связанные с $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_0$ зависимостями:

$$\begin{aligned}4(1-\sigma)p&=2G\varphi_1,\\ 4(1-\sigma)q&=2G\varphi_2,\\ 4(1-\sigma)r&=2G\varphi_0.\end{aligned}\tag{8}$$

Эти обозначения позволяют общий интеграл для $u$ и $v$ переписать так:

$$\begin{aligned}2Gu&=4(1-\sigma)p-\frac{\partial}{\partial x}\varphi,\\ 2Gv&=4(1-\sigma)q-\frac{\partial}{\partial y}\varphi,\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$\varphi=xp+yq+r.\tag{10}$$

При этом в силу (6), (7) и (10) будет:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}\nabla^2\varphi,\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=-\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{1}{4}\chi,\end{aligned}\tag{11}$$

где $\chi$ функция, сопряженная с $\nabla^2\varphi$ посредством зависимостей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi&=\frac{\partial\chi}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi&=-\frac{\partial\chi}{\partial x}.\end{aligned}\tag{12}$$

В равенствах (10), (11) и (12) нетрудно узнать известное общее выражение для перемещений $u$ и $v$, полученное для плоской задачи Love.[1]

Функция $\varphi$, введенная выше с помощью равенства (10), есть не что иное, как известная *функция напряжений*, предложенная еще Эри.

Действительно, в силу (10) и $\nabla^2 p = \nabla^2 q = \nabla^2 r = 0$ должно быть:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \tag{13}$$

Таким образом функция $\varphi$ так же, как и функция Эри, есть функция бигармоническая. Чтобы установить зависимость, связывающую $\varphi$ с напряжениями $X_x$, $Y_y$ и $X_y$, достаточно подставить (9) в общее выражение закона Гука

$$\begin{aligned} X_x &= 2G\left(e_{xx} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(e_{xx}+e_{yy})\right), \\ Y_y &= 2G\left(e_{yy} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(e_{xx}+e_{yy})\right), \\ X_y &= Ge_{xy}. \end{aligned}$$

Выполняя это и принимая во внимание равенства (11) и (12), можно видеть, что

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ Y_y &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\ X_y &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned} \tag{14}$$

как то и должно быть, если $\varphi$ есть функция Эри.

Решение плоской задачи, полученное Эри, выводится, таким образом, непосредственно из приведенного выше общего решения уравнения Ламе.

Как показал проф. Н. И. Мусхелишвили,[2] равенствами (9) можно воспользоваться для того, чтобы выразить общий интеграл плоской задачи через две аналитические функции комплексного переменного. Для этого достаточно положить:

$$\begin{aligned} p + iq &= \omega(z) = \omega(x+iy), \\ r + is &= \chi(z) = \chi(x+iy), \end{aligned} \tag{a}$$

т. е. принять за $p$ и $q$ реальную и соответственно мнимую часть функции комплексного переменного $\omega(x+iy)$, а за $r$ реальную часть некоторой другой такой же функции $\chi(x+iy)$. Подставив (a) в (9), нетрудно видеть, что

$$2G(u+iv) = (3-4\sigma)\,\omega(z) - z\,\overline{\omega}'(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z}), \tag{15}$$

где $\overline{\omega}'(\bar{z})$ есть функция, сопряженная с $\omega'(z)$, а $\overline{\psi}(\bar{z})$ есть функция, сопряженная с $\psi(z) = \frac{d}{dz}\chi(z)$.

---

[1] Love, Math. Theory of Elasticity, for. (8), p. 205, 1934.

[2] См.: Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, стр. 95, 1933.

Равенство (15) совпадает с результатом, впервые найденным Г. В. Колосовым и с успехом использованным в работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили и их учеников. Как видно из вышеизложенного, результат этот может быть выведен из приведенного выше общего интеграла однородных уравнений Ламе.

Равенства (2) показывают, кроме того, что отмеченный только что метод введения функций комплексного переменного в плоскую задачу теории упругости является не единственно возможным. Излишнюю общность решения (2) можно при $\sigma \neq 0.25$ устранить также путем простого вычеркивания в нем функции $\varphi_0$.[1] Если бы мы это сделали, то получили бы:

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial x}(x\varphi_1 + y\varphi_2),\\
v &= \varphi_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial y}(x\varphi_1 + y\varphi_2),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

причем как $\varphi_1$, так и $\varphi_2$ можно было бы представить реальными частями некоторых функций комплексного переменного.

Вводимые таким образом функции комплексного переменного входили бы в общий интеграл плоской задачи более симметрично, чем в решении (15). Интересно выяснить, не представляет ли этот метод введения функций комплексного переменного каких-либо преимуществ по сравнению с методом Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили. Вопрос этот мы оставляем пока открытым. Возможно, что ответ на него придется дать отрицательный. Тогда это послужит лишь к тем большему укреплению метода, основывающегося на использовании выражения (15).

Можно поставить себе, однако, и обратный вопрос. Мы видели, что в плоской задаче весьма плодотворным является тот способ устранения излишней общности решения (2), когда мы исключаем из $\varphi_1$ и $\varphi_2$ все то, что может прибавить к решению функция $\varphi_0$. В плоской задаче это позволяет считать функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ взаимно сопряженными и непосредственно приводит как к решению Love (10), (11) и (12), так и к решению Эри (13), (14) и Г. В. Колосова (15). Может быть, тот же метод ограничения излишней общности решения (1) можно применить и в пространственной задаче. Иными словами, может быть и в пространственной задаче полезно вместо исключения из решения (1) функции $\varphi_0$ исключить из состава решения, даваемого функциями $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$, все то, что может быть выражено через члены, зависящие от $\varphi_0$. Какие в точности ограничения налагаются при этом на функции $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$, мы пока разбирать не будем, предполагая вернуться к этому вопросу особо.

В связи с последним из только что поднятых вопросов интересно несколько остановиться на предложении Дюпона, опубликованном в журнале, за которым большинству наших работников по теории упругости вряд ли удается следить.

В 35-м томе ежегодников „Bulletin de l'Association Technique Maritime" инж. Dupont поместил статью „Sur l'introduction des rotations dans les équa-

[1] См. по этому поводу нашу статью в „Пр. М. М.", т. I нов. с., вып. 1

tions générales de l'élasticité", в которой отметил, что однородные уравнения Ламе можно вместо обычного

$$\nabla^2 V + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \tag{17}$$

выписать также под видом

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{V} = \frac{2-2\sigma}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}. \tag{18}$$

Возможность такого их преобразования следует непосредственно из известного тождества:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} - \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{V}.$$

Уравнению (18) должно удовлетворять всякое решение уравнений Ламе; $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{V}$ есть поэтому всегда градиент некоторого скаляра $\theta_1$, определяемого тем, что

$$\theta_1 = \frac{2-2\sigma}{1-2\sigma} \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Но в силу (17):

$$\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

так что $\theta_1$ есть функция гармоническая. Дюпон и принимает $\theta_1$ за первую из тех произвольных гармонических функций, которые входят в общий интеграл для $\mathbf{V}$.

Вектор $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ определяется, как известно, своим вихрем лишь с точностью до слагаемого, являющегося градиентом произвольного гармонического скаляра. Этот скаляр $\theta_2$ Дюпон принимает за вторую произвольную гармоническую функцию, входящую в общий интеграл для $\mathbf{V}$.

Наконец, сам вектор $\mathbf{V}$ своею дивергенцией

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} \theta_1 \tag{19}$$

и вихрем $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ определяется опять-таки с точностью лишь до слагаемого, являющегося градиентом нового гармонического произвольного скаляра. Этот последний скаляр $\theta_3$ Дюпон принимает за третью произвольную гармоническую функцию $\theta_2$, входящую в общий интеграл для $\mathbf{V}$.

Приведенные рассуждения не оставляют никаких сомнений в том, что в общий интеграл пространственной задачи теории упругости входят действительно лишь три произвольные гармонические функции.

Сохраняя в решении

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} + \varphi_0) \tag{20}$$

за $\varphi_0$ понятие общего интеграла уравнения Лапласа, мы в праве считать $\mathbf{B}$ зависящим лишь от двух гармонических произвольных функций. Действительно, так как в силу (20)

$$\operatorname{curl} \mathbf{V} = \operatorname{curl} \mathbf{B},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} \operatorname{div} \mathbf{B}, \tag{21}$$

то по Дюпону должно быть:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{B} &= \operatorname{grad}\theta_1, \\ \operatorname{curl}\mathbf{B} &= \mathbf{A} + \operatorname{grad}\theta_2, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= \theta_1, \end{aligned} \tag{22}$$

где **A** любое частное решение первого, а **B** любое частное решение обоих последних уравнений (22). Третья гармоническая функция Дюпона $\theta_3$ уже введена в общий интеграл для **V**, даваемый равенством (20), через посредство $\varphi_0$.

Соображения, приведенные выше, дают нам один из тех путей, с помощью которых, нисколько не нарушая общности решения, мы можем ввести в состав **B** всего лишь две гармонические функции. Другой к тому путь был указан Нейбером.[1] Путь этот проще. Он заключается в простом опускании любой из трех составляющих вектора **B**. Общность решения (19) при этом не нарушается, но лишние функции из решения (19) не удаляются при этом начисто.

Действительно, если бы мы из решения (28) упомянутой нашей статьи пожелали бы получить решение для плоской деформации, в которой от нуля отличны $u$ и $v$, то, положив в нем

$$\omega_1 = \varphi_1(x, y), \ \omega_2 = \varphi_2(x, y), \ \omega_0 = \varphi_0(x, y),$$

мы пришли бы к тем самым формулам (1) настоящей нашей заметки, в которых как мы уже знаем, можно без всякого вреда для общности решения подвергнуть функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ некоторым дальнейшим ограничениям, а именно, считать их *сопряженными* посредством условий Коши — Римана. Простое вычеркивание в общем выражении для **B** одной из его составляющих не очищает, таким образом, полностью решения (19) от лишних функций, в него входящих.

Может быть, существует какой-то иной способ введения в состав вектора **B** двух гармонических функций, более удобный, чем у Дюпона, и более радикальный, чем у Нейбера. Вопрос о том, что это за способ, мы оставляем пока открытым.

Заметим в заключение, что соображения Дюпона, изложенные выше, проливают свет на один вопрос, который остался открытым в конце § 12 книги Г. В. Колосова „Применение функций комплексного переменного...“, издания 1935 г. Если вглядеться внимательно в формулы (36) этой книги, то можно видеть, что предлагаемый Г. В. Колосовым путь разыскания перемещений $u$, $v$ и $w$ есть как раз путь разыскания вектора по его вихрю и дивергенции, т. е. тот самый путь, которым шел и Дюпон. В самом конце § 12 Г. В. Колосов говорит: „Применяя этот прием, надо исследовать каждый раз характер произвольных функций“. Нам кажется, что приведенными выше соображениями Дюпона вопрос о характере этих произвольных функций освещен вполне и притом в общем виде. Этими произвольными функциями являются три гармонические функции Дюпона, обозначенные нами выше через $\theta_1$, $\theta_2$ и $\theta_3$.

---

[1] См. равенство (28) нашей статьи „Обзор общих решений и т. д.“, цитированной выше.

# ABLEITUNG DER FUNDAMENTALLÖSUNGEN DER ZWEIDIMENSIONALEN AUFGABE DER ELASTIZITÄTSTHEORIE AUF GRUND DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON LAMÉ

P. F. PAPKOWITCH

(Leningrad)

(Zusammenfassung)

Es wird gezeigt ,wie man aus der allgemeinen Lösung (1) der Gleichungen von Lamé alle Grundlösungen des zweidimensionalen Problems der Elastizitätstheorie ableiten kann: die Lösung von Love (7), (9), (10), die Lösung von Airy (4), (13), sowie auch die Lösung von Kolosov und Muschelischwily (15).

Danach werden einige Überlegungen von Dupont diskutiert, die nochmals einen Beweis dafür geben, dass in der allgemeinen Lösung der Grundleichungen der Elastizitättstheorie nur drei harmonische Funktionen als willkürliche zu betrachten sind.