АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ОБ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ В ПОДЪЕМНОМ КАНАТЕ

Н. Н. НЕРОНОВ

(Ленинград)

Рассматриваемая задача математической физики имеет большое значение в горном деле, именно в вопросах шахтного подъема, и, повидимому, еще не может считаться окончательно решенной, несмотря на ряд посвященных ей исследований.

Свободные колебания упругой нити постоянной длины с грузом на конце были предметом анализа Пуассона.[1] Вынужденные колебания в той же задаче изучал акад. А. Н. Крылов.[2] Наконец, проф. А. Ш. Локшин,[3] имевший в виду главным образом шахтный подъем, в своей недавно появившейся монографии рассматривает различного рода задачи, могущие встретиться в рудничной практике, когда длина упругой нити, за которую можно принять канат, остается постоянной или, наоборот, меняется, что соответствует процессу поднятия или опускания клети.

В своей предыдущей работе[4] я рассматривал случай, когда массой нити (а следовательно и силами инерции) можно пренебречь по сравнению с массой подвешенного к ней груза, т. е. высота подъема предполагается небольшой (100—150 м). Поставленный вопрос приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения движения третьего порядка. Если вращение блока, на который навита нить, равнопеременное, полученное уравнение интегрируется при помощи способа последовательных приближений. Для частного

---

[1] Poisson, Journal d'École polytechnique, p. 476, 1815.

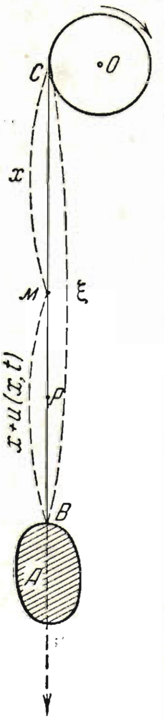
[2] А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, § 78—87, Л., 1932.

[3] А. Ш. Локшин, О динамических напряжениях в подъемных канатах, приложение к № 12 Горного журнала, 1929.

[4] Сборник „Прикладная математика и механика", т. III, вып. 1, стр. 31, 1936.

случая равномерного вращения интеграл вышеупомянутого уравнения в первом приближении выражается через бесселевы функции. Наконец, был рассмотрен случай произвольного задания закона вращения.

В настоящем исследовании разбирается общий случай произвольно больших высот подъема и поэтому учитывается как масса, так и вес каната. Мы пренебрежем его поперечными размерами и ограничимся случаем каната постоянного сечения.



Фиг. 1.

Начальные условия таковы: в начальный момент времени $t = 0$, соответствующий началу вращения блока из состояния покоя, нить предполагается статически растянутой силами веса системы. Начальные же скорости всех точек последней равны нулю.

Необходимо заметить, что начальный момент вращения блока не будет совпадать с начальным моментом движения подвешенного к упругой нити груза. Действительно, как будет показано ниже, следствием вращения блока явится распространение по нити с некоторой конечной скоростью прерывности.[1] Груз придет в движение только тогда, когда упругие перемещения, возникшие в верхней части нити, распространяясь сверху вниз, достигнут ее нижнего конца. В силу всего сказанного настоящее исследование естественно распадается на две части, изложенные в §§ 1 и 2. В § 1, имеющем вводный характер, изучается первый период движения рассматриваемой системы, соответствующий распространению по упругой нити указанной выше прерывности. Решение основной поставленной нами задачи составляет содержание § 2, посвященного изучению второго периода, начинающегося с момента, когда упругие перемещения распространились на всю длину нити.

§ 1. Твердое тело A подвешено в точке B к упругой нити, навитой на блок, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O (фиг. 1).

Ограничимся случаем подъема и, предполагая отсутствие скольжения нити по блоку, будем считать скорость набегания (контакта) нити на блок в точке C направленной вертикально вверх и по величине заданной функцией $v(t)$ времени t. Пусть, кроме того,

$$v(0) = 0. \tag{1}$$

Для какой-либо точки M нити ее расстояние MB от конца B (фиг. 1) равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MB нити, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией переменных x и t.

Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости T нити в точке M:

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{2}$$

[1] Распространение прерывности в канате постоянной длины рассматривалось акад. А. Н. Динником.

где k обозначает некоторую положительную постоянную,[1] а производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ относительное удлинение нити в точке M.

Помещаем начало координат в точке C и направляем координатную ось вертикально вниз. Обозначим координаты точек M и B соответственно через X и ξ. Для рассматриваемого нами первого периода движения системы

$$\xi = \text{const} = \xi_0.$$

Имеем:

$$X = \xi_0 - x - u(x, t). \tag{3}$$

Ускорение точки M

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Составляем дифференциальное уравнение движения элемента нити в точке M:

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \rho g - \frac{\partial T}{\partial x},$$

где ρ обозначает массу единицы длины нити и g — ускорение свободного падения. Делая подстановку при помощи уравнений (2) и (4), получаем дифференциальное уравнение движения нити:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -g + c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}. \tag{6}$$

Таким образом, неизвестная функция $u(x, t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных (5) типа волнового уравнения. Переходим к начальным и пограничным условиям задачи. В силу начальных условий, сформулированных выше, должны иметь место равенства

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u_1(x) = \frac{p}{k}x + \frac{\rho g}{2k}x^2, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_0, \tag{7}$$

где p обозначает вес подвешенного к нити груза и l_0 — нормальную длину свисающей части нити в начальный момент. Функция $u_1(x)$ выражает статическую деформацию в данной точке нити от действия сил тяжести системы.

Пограничных условий в данной задаче два. Первое относится к точке C соприкосновения нити с блоком, второе к точке P (фронт волны), отделяющей верхнюю часть нити, уже пришедшую в движение, от нижней, еще находящейся в покое.

Обращаемся сначала к первому пограничному условию. Уравнение (3) позволяет найти скорость любой точки M нити:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \tag{8}$$

[1] Значение k для каната может быть найдено по формуле $k = EF$, где E обозначает модуль упругости каната и F — площадь его сечения. Теоретическое и экспериментальное определение значения k составляло задачу ряда работ, указанных в заметке акад. А. Н. Динника, см. сборник „Прикладная математика и механика", т. I, вып. 2, § 7, стр. 335, 1933.

Чтобы применить это уравнение к точке C нити, нужно приписать x значение l, соответствующее нормальной длине свисающей части BC нити для произвольного момента времени t. Далее, благодаря отсутствию скольжения нити по блоку скорость точки C нити должна совпадать со скоростью блока в той же точке, т. е.

$$v(t) = -\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=l}. \tag{9}$$

Полученное нами уравнение (9) и выражает первое пограничное условие.

Для нахождения значения l положим в уравнении (3) $X=0$, $x=l$. Следовательно, уравнение, определяющее l, имеет вид:

$$\xi_0 - l - u(x, t)|_{x=l} = 0. \tag{10}$$

Поскольку функция $u(x, t)$ является искомой, значение l остается неизвестным. Однако его легко найти, если сделать обычное в теории упругости предположение о малости относительного удлинения $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ для каната, имея в виду приложение теории, главным образом, к вопросам шахтного подъема.

С этой целью путем дифференцирования уравнения (10) по t находим значение производной $\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=l}$. Именно:

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=l} = -\left[1 + \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l}\right]\frac{dl}{dt}.$$

Подстановка в уравнение (9) дает:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1 + \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l}}$$

или приближенно в силу малости относительного удлинения

$$\frac{dl}{dt} = v(t). \tag{11}$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\,dt.$$

Обозначим через $s(t)$ длину дуги поворота блока, взятую с соответствующим знаком и вычисляемую на основании равенства

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt, \tag{12}$$

тогда

$$l = l_0 + s(t). \tag{13}$$

Переходим ко второму пограничному условию в точке P. Значение x, соответствующее этой точке и обозначенное через a, представляет неизвестную функцию времени, принимающую значение l_0 в начальный момент. Рассматриваемое условие требует, чтобы при переходе через точку P как деформация $u(x, t)$, так и натяжение T нити, другими словами, производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, оставались непрерывными, т. е.

$$\left. u(x, t)\right|_{x=a} = \frac{P}{k} a + \frac{\rho g}{2k} a^2, \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{P}{k} + \frac{\rho g}{k} a. \tag{14}$$

Итак, поставленная нами задача сведена к нахождению интеграла дифференциального уравнения (5), удовлетворяющего перечисленным выше начальным и пограничным условиям. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t), \tag{15}$$

где

$$u_1(x) = \frac{P}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2, \qquad u_2(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct). \tag{16}$$

Через φ и ψ обозначены произвольные функции соответствующих аргументов. Слагаемое $u_1(x)$ попрежнему обозначает статическую деформацию в данной точке нити от действия сил тяжести системы.

Написанное выше выражение (15) для $u(x, t)$ имеет силу только в следующем интервале изменения переменных:

$$a \leqslant x \leqslant l,$$

где a и l являются некоторыми функциями времени t. Для остальной части нити, остающейся в покое, деформация ее точек выражается формулой

$$u(x) = u_1(x) = \frac{P}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2, \tag{15 bis}$$

справедливой в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant a.$$

На основании уравнений (7) и (15) функция $u_2(x, t)$ должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\left. u_2(x, t)\right|_{\substack{x=l_0\\ t=0}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=l_0\\ t=0}} = 0,$$

или

$$\varphi(l_0) + \psi(l_0) = 0, \quad \varphi'(l_0) - \psi_0'(l_0) = 0. \tag{17}$$

Второе пограничное условие дает:

$$\left. u_2(x, t)\right|_{x=a} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0,$$

или

$$\varphi(a + ct) + \psi(a - ct) = 0, \qquad \varphi'(a + ct) + \psi'(a - ct) = 0. \tag{18}$$

Введем обозначение

$$\lambda = a + ct, \quad \mu = a - ct$$

и переписываем уравнения (18) в виде

$$\varphi(\lambda) + \psi(\mu) = 0, \quad \varphi'(\lambda) + \psi'(\mu) = 0.$$

Дифференцируя по t первое из уравнений последней системы, заменяем ее следующей:

$$\varphi'(\lambda)\frac{d\lambda}{dt}+\psi'(\mu)\frac{d\mu}{dt}=0, \quad \varphi'(\lambda)+\psi'(\mu)=0.$$

Так как определитель предыдущей системы, равный $2c$, отличен от нуля, то ее решение дает:

$$\varphi'(\lambda)=0, \quad \psi'(\mu)=0. \tag{19}$$

Уравнения (19) будут удовлетворены, если положить

$$\lambda=a+ct=\text{const}=l_0, \tag{20}$$

а функцию ψ считать тождественно равной произвольному постоянному числу, например, нулю. Итак:

$$\psi=\text{const}=0. \tag{21}$$

Из уравнений (17) получаем:

$$\varphi(l_0)=0, \quad \varphi'(l_0)=0. \tag{22}$$

Уравнение (20) позволяет найти значение a; именно:

$$a=l_0-ct.$$

Таким образом, прерывность распространяется по нити с постоянной скоростью c. Подвешенный груз придет в движение в момент времени τ,

$$\tau=\frac{l_0}{c}\cdot$$

Для нахождения функции φ воспользуемся уравнением (9), которое выражает первое пограничное условие. Имеем:

$$v(t)=-c\varphi'(l+ct). \tag{23}$$

Отсюда:

$$\varphi'(l_0)=0$$

и, следовательно, второе из равенств (22) удовлетворено. Положим, принимая во внимание равенство (13),

$$z=l+ct=l_0+s(t)+ct. \tag{24}$$

Решаем уравнение (24) относительно t:

$$t=f(z), \tag{25}$$

где $f(z)$ обозначает корень уравнения (24), удовлетворяющий условию

$$f(l_0)=0.$$

В силу сравнительно большого значения c (для каната) можно было бы написать приближенно:

$$t=\frac{z-l_0}{c}\cdot$$

Вводя переменное z, переписываем уравнение (23) в виде:

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{c} v(f(z)). \tag{26}$$

Отсюда определение функции φ приводится к выполнению следующей квадратуры, если учесть первое из равенств (22):

$$\varphi(z) = -\frac{1}{c} \int_{l_0}^{z} v(f(z))\, dz. \tag{27}$$

Таким образом, равенство (15), дающее решение поставленной задачи, принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2 - \int_{l_0}^{x+ct} v(f(z))\, dz, \quad a \leqslant x \leqslant l. \tag{28}$$

При переходе через точку P с абсциссой $x = a$ остается непрерывной как сама функция $u(x, t)$, так и обе ее частных производных первого порядка. Указанным свойством, вообще говоря, не обладают производные второго и высших порядков этой функции, и поэтому в данной задаче мы имеем дело с распространением прерывности второго или высшего порядка.

Равенство (28) позволяет вывести условия распространения прерывности порядка i. Для этого нужно, чтобы уравнение

$$v(t) = 0$$

имело корень $t = 0$ порядка кратности $i - 1$, т. е. должны выполняться равенства

$$v(0) = 0, \; v^{(1)}(0) = 0, \; v^{(2)}(0) = 0, \ldots, \; v^{(i-2)}(0) = 0, \; v^{(i-1)}(0) \neq 0. \tag{29}$$

Мы видим, что соответственным выбором вида функции $v(t)$ можно сделать порядок i прерывности произвольно большим.

Разберем один из простейших примеров. Пусть при поднятии груза блок вращается равноускоренно. Обозначим через j постоянное тангенциальное ускорение на окружности блока. Тогда

$$v(t) = -jt, \quad s(t) = -\frac{1}{2} jt^2,$$

$$t = f(z) = \frac{1}{j}\left[c - \sqrt{c^2 - 2j(z - l_0)}\right].$$

Функция φ в данном случае оказывается имеющей вид:

$$\varphi(z) = \left\{ z + \frac{1}{3cj}\left[c^2 - 2j(z - l_0)\right]^{\frac{3}{2}} \right\} \Bigg|_{l_0}^{z}.$$

Применяя разложение в ряд и удерживая в последнем благодаря большому значению c только первый член, имеем приближенно:

$$\varphi(z) = \frac{j}{2c^2}(z - l_0)^2.$$

Вычисляем натяжение для верхней, уже пришедшей в движение части нити:

$$T = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = p + \rho g x + k\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2j}{c^2}(x + ct - l_0)}\right],$$

где x удовлетворяет неравенству

$$a \leqslant x \leqslant l$$

и

$$a = l_0 - ct, \quad l = l_0 - \frac{1}{2}jt^2.$$

Величина c сравнительно велика, и поэтому предыдущая формула приближенно может быть представлена в следующем виде:

$$T = p + \rho g x + \frac{kj}{c^2}(x + ct - l_0)$$

или, пользуясь соотношением (6),

$$T = p + \rho g x + \rho j(x + ct - l_0).$$

Очевидно, максимальное значение T будет иметь место в точке C для момента времени, когда вся нить окажется пришедшей в движение, т. е. при значениях x и t, соответственно равных:

$$t = \tau = \frac{l_0}{c}, \quad x = l_0 - \frac{j\tau^2}{2} \cong l_0.$$

Будем иметь:

$$T_{\max} = p + \rho l_0(g + j).$$

Полученная формула имеет весьма простую интерпретацию.

Таким же путем можно было бы исследовать случай так называемого гармонического подъема:[1]

$$v(t) = a\sin nt$$

или случай параболической диаграммы скорости:

$$v(t) = (\alpha t + \beta t^2).$$

Все изложенное выше позволяет определить для конечного момента первого периода движения значение деформации в произвольной точке нити и скорость этой точки. Таким образом, мы получаем совокупность начальных данных для второго периода движения.

§ 2. После того как вся нить пришла в движение, значение координаты ξ подвешенного к ней груза будет переменным. Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, имеем следующее выражение для координаты X произвольной точки M нити (фиг. 1):

$$X = \xi - x - u(x, t). \tag{30}$$

Вычисляем ускорение точки M:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

---

[1] Акад. М. М. Федоров, Теория и расчет гармонического рудничного подъема, 1914.

Пишем дифференциальное уравнение движения элемента нити в точке M:

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \rho g - \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{31}$$

где

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Подставляя в уравнение (31) значения $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial x}$, имеем:

$$\rho \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right] = \rho g - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Наконец, присоединяем к последнему уравнению дифференциальное уравнение движения груза:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = mg - k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{32}$$

где m обозначает массу груза, и из полученной системы уравнений исключаем $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$.

Таким образом, неизвестная функция $u(x, t)$ должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных типа волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{33}$$

где

$$c = + \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad b = \frac{k}{m}. \tag{34}$$

Общий интеграл предыдущего уравнения может быть представлен в виде:

$$u(x, t) = \varphi'(x + ct) + \psi'(x - ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)], \tag{35}$$

где φ и ψ обозначают произвольные функции соответствующих аргументов, а φ' и ψ' — их производные.

Функции φ и ψ определяются при помощи начальных и пограничных условий. Начальные условия таковы:

$$u(x, t)|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) \tag{36}$$

для значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant l_0,$$

где l_0 обозначает нормальную длину свисающей части нити BC (фиг. 1) в начальный момент времени ($t = 0$) рассматриваемого движения, когда вся нить предполагается пришедшей в движение.

Заметим здесь, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дают для начального момента времени распределение по длине нити относительной деформации и относительной скорости (по отношению к подвешенному грузу). Эти функции связаны с некоторыми функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$, вводимыми на основании равенств

$$\begin{aligned} &F_1(x) = X|_{t=0}, \quad F_2(x) = \frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{t=0}, \\ &F_1(0) = \xi|_{t=0}, \quad F_1(l_0) = 0, \\ &F_2(0) = \frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0}, \quad F_2(l_0) = v(0) \end{aligned} \tag{37}$$

и представляющими соответственно абсолютную координату и абсолютную скорость той или другой точки нити.

Отсюда при помощи уравнений (30) и (36):

$$\begin{aligned} &F_1(x) = \xi|_{t=0} - x - f_1(x), \\ &F_2(x) = \frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0} - f_2(x). \end{aligned} \tag{38}$$

Таким образом, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно считать известными, если произвольно задаться функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Можно также определить функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на основании данных предыдущего параграфа, когда рассматриваемому движению нити предшествует описанное выше распространение прерывности.

Сделаем еще следующее замечание. В силу первого пограничного условия:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \tag{39}$$

сохраняющего силу при всяком значении t, имеем равенства

$$f_1(0) = 0, \; f_2(0) = 0, \tag{40}$$

вытекающие также из уравнений (37) и (38).

Переходим ко второму пограничному условию, относящемуся к точке C. Скорость любой точки M нити выражается формулой

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Применяем полученные равенства к точке C, заменяя вследствие отсутствия скольжения нити по блоку производную $\frac{\partial X}{\partial t}$ скоростью $v(t)$ точек блока и полагая $x = l$,

$$v(t) = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l}, \tag{41}$$

где l попрежнему обозначает нормальную длину свисающей части BC нити. Для нахождения значения l обращаемся к уравнению (30) и полагаем в нем $X = 0$, $x = l$:

$$\xi - l - (x, t)|_{x=l} = 0. \tag{42}$$

Можно избежать решения относительно l предыдущего уравнения, если, как и в § 1, сделать предположение о малости относительного удлинения $\frac{du(x,t)}{dx}$. Действительно, дифференцируя уравнение (42) по времени t, находим:

$$\frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l} = \left[1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}\right]\frac{dl}{dt}.$$

Отсюда при помощи уравнения (41) имеем:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}}$$

или приближенно

$$\frac{dl}{dt} = v(t). \tag{43}$$

Наконец, интегрирование дает:

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\,dt. \tag{44}$$

Для того чтобы составить второе пограничное условие, дифференцируем по времени t уравнение (41):

$$v'(t) = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{x=l} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=l}\frac{dl}{dt} \tag{45}$$

и исключаем $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ из уравнений (32) и (45). Имеем:

$$v'(t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=l}\frac{dl}{dt} = g - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}. \tag{46}$$

Воспользуемся пограничным условием (39) для того, чтобы привести вопрос к определению одной неизвестной функции вместо двух φ и ψ, входящих в выражение (35) искомой деформации $u(x, t)$.

Первое пограничное условие дает:

$$\varphi'(ct) + \psi'(-ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)] = 0$$

или, полагая $z = ct$:

$$\varphi'(z) + \psi'(-z) - \frac{b}{c^2}[\varphi(z) + \psi(-z)] = 0. \tag{47}$$

Вводим функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на основании равенств

$$\varphi(z) + \psi(-z) = 2\Phi(z), \quad \varphi'(z) + \psi'(-z) = 2\Psi(z). \tag{48}$$

Тогда в силу уравнения (47):

$$\Psi(z) = \frac{b}{c^2}\Phi(z). \tag{49}$$

Дифференцируя по z первое из уравнений системы (48) и заменяя во втором функцию $\Psi(z)$ ее значением на основании равенства (49), получаем:

$$\varphi'(z) - \psi'(-z) = 2\Phi'(z), \quad \varphi'(z) + \psi'(-z) = \frac{2b}{c^2}\Phi(z).$$

Решение предыдущей системы дает:

$$\varphi'(z)=\frac{b}{c^2}\Phi(z)+\Phi'(z),\qquad \psi'(z)=\frac{b}{c^2}\Phi(-z)-\Phi'(-z). \tag{50}$$

На основании вышеизложенного выражение (35) функции $u(x, t)$ может быть переписано в виде:

$$\begin{gathered} u(x, t)=\frac{b}{c^2}[\Phi(x+ct)+\Phi(-x+ct)]+ \\ +\Phi'(x+ct)-\Phi'(-x+ct)-\frac{2b}{c^2}\Phi(ct), \end{gathered} \tag{51}$$

содержащем только одну неизвестную функцию Φ. Последняя может быть определена при помощи начальных условий (36). Первое из них имеет вид:

$$u(x, t)|_{t=0}=f_1(x),$$

где

$$0\leqslant x\leqslant l_0.$$

Отсюда:

$$\frac{b}{c^2}[\Phi(x)+\Phi(-x)]+\Phi'(x)-\Phi'(-x)-\frac{2b}{c^2}\Phi(+0)=f_1(x).$$

Полагая

$$y=\Phi(x)+\Phi(-x), \tag{52}$$

заменяем написанное выше функционально-дифференциальное уравнение обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b}{c^2}y-\frac{2b}{c^2}\Phi(+0)-f_1(x)=0.$$

Его интеграл:

$$y=2\Phi(+0)+\alpha e^{-\frac{bx}{c^2}}+e^{-\frac{bx}{c^2}}\int\limits_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}f_1(x)\,dx, \tag{53}$$

где e обозначает основание натуральных логарифмов и α — произвольную постоянную.

Аналогично изложенному выше поступаем со вторым начальным условием:

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l_0,$$

которое после подстановки значения $u(x, t)$ на основании равенства (51) принимает вид:

$$\frac{b}{e}[\Phi'(x)+\Phi'(-x)]+c[\Phi''(x)-\Phi''(-x)]-\frac{2b}{c}\Phi'(+0)=f_2(x).$$

Подстановка

$$z=\Phi'(x)+\Phi'(-x) \tag{54}$$

позволяет переписать предыдущее функционально-дифференциальное уравнение в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx}+\frac{b}{c^2}z-\frac{2b}{c^2}\Phi'(+0)-\frac{1}{c}f_2(x)=0.$$

Его интеграл:

$$z=2\Phi'(+0)+\beta e^{-\frac{bx}{c^2}}+\frac{1}{c}e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}f_2(x)\,dx, \tag{55}$$

где β обозначает произвольную постоянную, а e сохраняет прежнее значение основания натуральных логарифмов.

Итак, мы имеем систему уравнений:

$$y=\Phi(x)+\Phi(-x),\quad z=\Phi'(x)+\Phi'(-x).$$

Заменяем ее следующей:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi'(x)-\Phi'(-x),\quad z=\Phi'(x)+\Phi'(-x).$$

Отсюда:

$$2\Phi'(x)=z+\frac{dy}{dx},\qquad 2\Phi'(-x)=z-\frac{dy}{dx}.$$

Наконец, вносим найденные ранее значения y и z:

$$\left.\begin{aligned}2\Phi'(x)&=2\Phi'(+0)+f_1(x)+e^{-\frac{bx}{c^2}}\left(\beta-\alpha\frac{b}{c^2}\right)+\\&\quad+\frac{1}{c}e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx,\\2\Phi'(-x)&=2\Phi'(+0)-f_1(x)+e^{-\frac{bx}{c^2}}\left(\beta+\alpha\frac{b}{c^2}\right)+\\&\quad+\frac{1}{c}e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)+\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Напоминаем, что полученные выражения для $\Phi'(x)$ и $\Phi'(-x)$ сохраняют силу только для значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0\leqslant x\leqslant l_0.$$

Полагая в уравнения (56) $x=+0$ и принимая во внимание первое из равенств (40), находим

$$\beta-\alpha\frac{b}{c^2}=0,$$

$$2\Phi'(-0)=2\Phi'(+0)+\beta+\alpha\frac{b}{c^2}.$$

Отсюда:

$$\beta=\alpha\frac{b}{c^2},\qquad \Phi'(-0)-\Phi'(+0)=\beta. \tag{57}$$

После этого выражения для $\Phi'(x)$ и $\Phi'(-x)$ могут быть переписаны в виде:

$$2\Phi'(x) = 2\Phi'(+0) + f_1(x) + \frac{1}{c} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int\limits_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx,$$

$$2\Phi'(-x) = 2\Phi'(+0) - f_1(x) + 2\alpha \frac{b}{c^2} e^{-\frac{bx}{c^2}} + \tag{58}$$

$$+ \frac{1}{c} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int\limits_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) + \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx.$$

Первое из написанных выше уравнений дает значения функции $\Phi'(x)$ в интервале $(0, l_0)$, между тем как второе позволяет экстраполировать ее за пределы этого интервала, давая значения функции в интервале $(-l_0, 0)$. Итак, значение функции $\Phi'(x)$ нам теперь известно в интервале $(-l_0, l_0)$.

Чтобы перейти к функции $\Phi(x)$, достаточно в уравнениях (58) произвести операцию интегрирования. Будем иметь:

$$2\Phi(x) = 2\Phi(+0) + 2x\Phi'(+0) -$$

$$- \frac{c}{b} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int\limits_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] + \frac{c}{b} \int\limits_0^x f_2(x)\, dx,$$

$$2\Phi(-x) = 2\Phi(-0) - 2x\Phi'(+0) + \tag{59}$$

$$+ \frac{c}{b} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int\limits_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) + \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx - \frac{c}{b} \int\limits_0^x f_2(x)\, dx - 2\alpha \left(1 - e^{-\frac{bx}{c^2}}\right),$$

где попрежнему $0 \leqslant x \leqslant l_0$ и, следовательно, значение функции Φ может быть найдено в интервале $(-l_0, l_0)$.

Полученные нами результаты позволяют найти значение искомой функции $u(x, t)$ в некоторой области изменения переменных x и t. Эта область может быть представлена геометрически, если рассматривать переменные x и t как прямоугольные декартовы координаты точек некоторой плоскости (фиг. 2).

Построим системы прямых:

$$x + ct = \text{const}, \quad -x + ct = \text{const},$$

являющихся характеристиками уравнения (33). Рассмотрим область I, ограниченную осью абсцисс и характеристиками

$$x + ct = l_0, \quad -x + ct = 0.$$

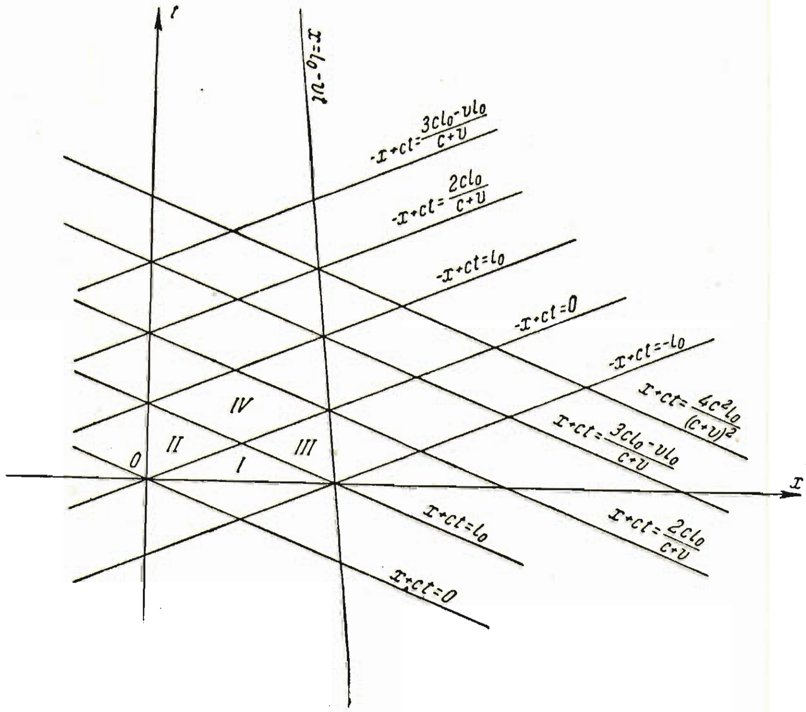
В этой области значение аргумента $x + ct$ остается положительным и ограничено неравенствами

$$0 \leqslant x + ct \leqslant l_0.$$

Значение аргумента $-x + ct$ в той же области отрицательно и заключается в пределах

$$-l_0 \leqslant -x + ct \leqslant 0.$$

Наконец, аргумент ct изменяется в интервале $0 \leqslant ct \leqslant \frac{l_0}{2}$.



Фиг. 2.

Поэтому, возвращаясь к выражению (51) для $u(x, t)$ и подставляя вместо функции Φ и ее производной Φ' соответствующие формулы в зависимости от характера их аргументов, будем иметь следующий результат:

$$2u(x, t) = f_1(z) + f_1(\zeta) + \frac{1}{c}\int_0^z f_2(x)\,dx - \frac{1}{c}\int_0^\zeta f_2(x)\,dx +$$

$$+ \frac{2}{c} e^{-\frac{bt}{c}} \int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx - \frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx +$$

$$+ \Phi(-0) - \Phi(+0) - \alpha, \qquad (60)$$

где введены сокращенные обозначения:

$$z = x + ct, \quad \zeta = x - ct.$$

Условие

$$u(x,\ t)\big|_{\substack{x=0\\ t=0}}=0$$

дает:

$$\Phi(-0)-\Phi(+0)-\alpha=0;$$

поэтому равенство (60) переписывается в виде:

$$2u(x,\ t)=f_1(z)+f_1(\zeta)+\frac{1}{c}\int\limits_0^z f_2(x)\,dx-\frac{1}{c}\int\limits_0^\zeta f_2(x)\,dx+$$

$$+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int\limits_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx-\frac{2}{c}\int\limits_0^{ct} f_2(x)\,dx, \tag{61}$$

где неизвестные постоянные α, $\Phi(+0)$, $\Phi(-0)$ оказываются исключенными.

Заметим еще, что в области I деформация точек нити не зависит от закона вращения блока, т. е. от вида функции $v(t)$. Это влияние скажется для более поздних моментов времени.

Переходим к области II (фиг. 2), ограниченной осью ординат и теми же характеристиками, как и область I:

$$x+ct=l_0,\quad -x+ct=0.$$

В этой области оба аргумента $x+ct$ и $-x+ct$ положительны. Их значения заключены в интервалах:

$$0\leqslant x+ct\leqslant l_0,\quad 0\leqslant -x+ct\leqslant l_0.$$

Изменение аргумента ct ограничено пределами:

$$0\leqslant ct\leqslant l_0.$$

Пользуясь соответствующими формулами для Φ и Φ', получаем выражение для искомой деформации $u(x,\ t)$ в следующем виде:

$$2u(x,\ t)=f_1(z)-f_1(\zeta)+\frac{1}{c}\int\limits_0^z f_2(x)\,dx+\frac{1}{c}\int\limits_0^\zeta f_2(x)\,dx-$$

$$-\frac{2}{c}e^{-\frac{b\zeta}{c^2}}\int\limits_0^{\zeta} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx+ \tag{62}$$

$$+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int\limits_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx-\frac{2}{c}\int\limits_0^{ct} f_2(x)\,dx,$$

где

$$z=x+ct,\ \zeta=-x+ct.$$

Мы видим, что в области II, как и в области I, вид функции $u(x, t)$ не зависит от закона вращения блока. Но в области III (фиг. 2) влияние последнего уже скажется.

Для области III и последующих нам потребуется дельнейшее экстраполирование функции Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$ изменения ее аргумента. С этой целью мы обратимся ко второму пограничному условию (46) и внесем туда значение $u(x, t)$ на основании равенства (51), а также воспользуемся уравнением (43):

$$\frac{dl}{dt} = v(t).$$

Имеем:

$$\Phi'''(l+ct) + \frac{b}{c^2}\Phi''(l+ct) = \frac{g - v'(t)}{c\,[c+v(t)]} + \frac{c - v(t)}{c + v(t)}\left[\Phi'''(-l+ct) - \frac{b}{c^2}\Phi''(-l+ct)\right], \tag{63}$$

где

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\,dt.$$

Положим, производя замену переменных,

$$z = l + ct. \tag{64}$$

Решаем предыдущее уравнение относительно t:

$$t = f(z). \tag{65}$$

Обозначим через $f(z)$ корень уравнения (64), удовлетворяющий условию $f(l_0) = 0$. Далее на основании уравнения (65) вносим найденное значение t в выражение аргумента $-l+ct$ производных Φ'' и Φ''', входящих в правую часть уравнения (63),

$$\omega(z) = -l + ct. \tag{66}$$

После этого уравнение (62) переписывается следующим образом:

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g - v'(f(z))}{c\,[c + v(f(z))]} + \frac{c - v(f(z))}{c + v(f(z))}\left[\Phi'''(\omega(z)) - \frac{b}{c^2}\Phi''(\omega(z))\right]. \tag{67}$$

Функция Φ в интервале $(-l_0, 0)$ нам известна. Поэтому при условии, что $\omega(z)$ изменяется в пределах:

$$-l_0 \leqslant \omega(z) \leqslant 0, \tag{68}$$

правая часть предыдущего уравнения будет представлять известную функцию переменного z. Развивая прием Сен-Венана, найдем интеграл дифференциального уравнения (67):

$$\Phi''(z) = \gamma e^{-\frac{bz}{c^2}} + \Omega(z), \tag{69}$$

где $\Omega(z)$ представляет частное решение уравнения (67), находимое обычным способом, и γ — произвольную постоянную. Путем двукратного интегрирования находим выражение функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z)=\gamma\frac{c^4}{b^2}e^{-\frac{bz}{c^2}}+\gamma_1 z^2+\gamma_2 z+\int\int\Omega(z)\,dz\,dz, \tag{70}$$

где через γ_1 и γ_2 обозначены произвольные постоянные.

Чтобы определить интервал (z_1, z_2) изменения переменного z, в котором приложима формула (70) для $\Phi(z)$, нужно решить относительно z систему неравенств (68):

$$z_1\leqslant z\leqslant z_2. \tag{71}$$

В разбираемом ниже частном примере мы покажем, что неравенства (71) позволяют экстраполировать функцию Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$, в котором она известна. С этой целью мы разберем в качестве примера случай равномерного вращения:

$$v(t)=\text{const}=-v, \tag{71}$$

где отрицательный знак соответствует поднятию груза. Затем:

$$l=l_0+\int_0^t v(t)\,dt=l_0-vt$$

и следовательно:

$$z=l+ct=l_0+t(c-v). \tag{72}$$

Отсюда:

$$t=\frac{z-l_0}{c-v}. \tag{73}$$

Вычисляем $\omega(z)$:

$$\omega(z)=-l+ct=t(c+v)-l_0=\frac{z(c+v)-2cl_0}{c-v}. \tag{74}$$

Решаем относительно z систему неравенства

$$-l_0\leqslant\frac{z(c+v)-2cl_0}{c-v}\leqslant 0,$$

откуда, полагая $c>v$,

$$l_0\leqslant z\leqslant\frac{2cl_0}{c+v}. \tag{75}$$

Таким образом:

$$z_1=l_0,\quad z_2=\frac{2cl_0}{c+v}. \tag{76}$$

Мы видим, что интеграл дифференциального уравнения (67) позволяет экстраполировать функцию Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$, давая ее значения в интервале $\left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right)$. Итак, функция Φ нам известна теперь в интервале

$$\left(-l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right).$$

Указанный выше процесс может быть повторен неограниченное число раз. В самом деле, решая относительно z систему неравенств

$$0 \leqslant \omega(z) \leqslant l_0,$$

имеем:

$$\frac{2cl_0}{c+v} \leqslant z \leqslant \frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}.$$

Таким образом, по значениям функции Φ в интервале $(0, l_0)$ можно найти путем интегрирования уравнения (67) ее значения в интервале

$$\left(\frac{2cl_0}{c+v}, \quad \frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}\right).$$

Далее неравенства

$$l_0 \leqslant \omega(z) \leqslant \frac{2cl_0}{c+v}$$

дают:

$$\frac{3cl_0 - vl_0}{c+v} \leqslant z \leqslant \frac{4c^2 l_0}{(c+v)^2}.$$

Так как функция Φ в интервале $\left(l_0, \dfrac{2cl_0}{c+v}\right)$ нами уже была определена, то в результате интегрирования уравнения (67) мы получаем ее значения в интервале

$$\left(\frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}, \quad \frac{4c^2 l_0}{(c+v)^2}\right)$$

и т. д.

Уравнение (66) может быть упрощено, если вместо функции $\Phi(\omega(z))$ подставить ее выражение (59) для интервала $(-l_0, 0)$ изменения аргумента $\omega(z)$. Будем иметь, вводя сокращенные обозначения $f = f(z)$, $\omega = \omega(z)$,

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g - v'(f)}{c[c+v(f)]} + \frac{c - v(f)}{2[c+v(f)]}\left[-f_1''(-\omega) + \frac{1}{c}f_2'(-\omega)\right]. \quad (77)$$

Если рассматриваемому движению системы предшествовал процесс распространения прерывности (§ 1), то легко показать, что

$$-f_1''(-\omega) + \frac{1}{c}f_2'(-\omega) = -\frac{g}{c^2}$$

и предыдущее уравнение принимает вид

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g - v'(f)}{c[c+v(f)]} - \frac{g}{2c^2}\,\frac{c - v(f)}{c+v(f)}. \quad (78)$$

Для случая равномерного вращения уравнение (77) переписывается следующим образом:

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g}{c(c-v)} + \frac{c+v}{2(c-v)}\left[-f_1''(-\omega) + \frac{1}{c}f_2'(-\omega)\right]. \quad (79)$$

Его интеграл, вводя обозначение $\lambda = \frac{c-v}{c+v}$ и обозначая попрежнему через γ произвольную постоянную, —

$$\Phi''(z) = \gamma e^{-\frac{bz}{c^2}} + \frac{gc}{b(c-v)} - \frac{1}{2}\left[-f_1'(-\omega) + \frac{1}{c}f_2(-\omega)\right] + \frac{\lambda b}{2c^2}f_1(-\omega) -$$
$$-\frac{\lambda b^2}{2c^4}e^{-\frac{bz}{c^2}}\int e^{\frac{bz}{c^2}}f_1(-\omega)\,dz + \frac{b}{2c^3}e^{-\frac{bz}{c^2}}\int e^{\frac{bz}{c^2}}f_2(-\omega)\,dz, \tag{80}$$

где

$$\omega = \frac{z(c+v) - 2cl_0}{c-v}.$$

Двукратное интегрирование дает функцию $\Phi(z)$. Ниже будет показано, что этого интегрирования и последующей подстановки значения Φ в выражение (51) для $u(x, t)$ можно избежать, заменив указанный процесс другим несколько более простым. Действительно, область III ограничена характеристиками:

$$x + ct = l_0, \quad -x + ct = 0$$

и прямой, уравнение которой

$$x = l$$

или

$$x = l_0 - vt.$$

Значение аргумента $x + ct$ оказывается положительным и заключенным в интервале

$$l_0 \leqslant x + ct \leqslant \frac{2cl_0}{c+v}.$$

Значение аргумента $-x + ct$ в той же области отрицательно и ограничено неравенствами

$$-l_0 \leqslant -x + ct \leqslant 0.$$

Из предыдущих неравенств вытекают следующие пределы изменения аргумента ct в области III:

$$0 \leqslant ct \leqslant \frac{cl_0}{c+v}.$$

Обратим внимание на то, что функция $\Phi(x+ct)$ и ее производная $\Phi'(x+ct)$ входят в выражение (51) для $u(x, t)$ в виде линейной комбинации

$$\Phi'(x+ct) + \frac{b}{c^2}\Phi(x+ct),$$

которая может быть найдена непосредственно двукратным интегрированием по z обеих частей дифференциального уравнения (79). Именно:

$$\Phi'(z) + \frac{b}{c^2}\Phi(z) = \frac{g\lambda^2\omega^2}{2c(c-v)} + \frac{1}{2}\delta\lambda\omega + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda f_1(-\omega) - \frac{\lambda}{2c}\int_{-l_0}^{\omega} f_2(-\omega)\,d\omega, \tag{81}$$

где через δ и ε обозначены некоторые произвольные постоянные. Вносим соответствующие значения функции Φ и Φ' в выражение (51) для $u(x, t)$.

Мы получаем для области III следующую формулу:

$$2u(x,t)=\frac{g\lambda^2\omega^2}{c(c-v)}+\delta\lambda\omega+\varepsilon-\lambda f_1(-\omega)-\frac{\lambda}{c}\int_{-l_0}^{\omega} f_2(-\omega)\,d\omega-\frac{2b}{c^2}z\,\Phi'(+0)-$$

$$-\frac{1}{c}\int_0^{\zeta} f_2(x)\,dx+f_1(\zeta)-2\Phi'(+0)-\frac{4b}{c^2}\Phi(+0)+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx-$$

$$-\frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx+\frac{2b}{c^2}\Phi(-0)-\frac{2\alpha b}{c^2}, \qquad (82)$$

где

$$z=x+ct,\quad \zeta=x-ct,\quad \omega=\frac{z(c+v)-2cl_0}{c-v},\quad \lambda=\frac{c-v}{c+v}.$$

Для определения значений произвольных постоянных δ и ε воспользуемся условием, что вдоль прямой $x+ct=l_0$, принадлежащей как области I, так и области III, должны совпадать значения функции $u(x,t)$, а также производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ $\left(\text{как следствие этого также значения производной } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)$. Будем иметь:

$$\delta=\frac{2}{c}f_2(l_0)+\frac{2b}{c^2}\Phi'(+0)+\frac{2g\lambda l_0}{c(c-v)},$$

$$\varepsilon=\frac{g\lambda^2 l_0^2}{c(c-v)}+(1+\lambda)f_1(l_0)+\frac{4b}{c^2}\Phi(+0)+\frac{2\lambda l_0}{c}f_2(l_0)+$$

$$+2\Phi'(+0)\left[1+\frac{bl_0}{c^2}(1+\lambda)\right]+\frac{1}{c}\int_0^{l_0} f_2(x)\,dx-\frac{2b}{c^2}\Phi(-0)+\frac{2\alpha b}{c^2}.$$

Вносим найденные значения δ и ε в равенство (82):

$$2u(x,t)=\frac{g\lambda^2(\omega^2+l_0^2)}{c(c-v)}+\frac{2\lambda\omega}{c}\left[f_2(l_0)+\frac{g\lambda l_0}{c-v}\right]+(1+\lambda)f_1(l_0)+$$

$$+\frac{2\lambda l_0}{c}f_2(l_0)+\frac{1}{c}\int_0^{l_0} f_2(x)\,dx-\lambda f_1(-\omega)-\frac{\lambda}{c}\int_{-l_0}^{\omega} f_2(-\omega)\,d\omega-$$

$$-\frac{1}{c}\int_0^{\zeta} f_2(x)\,dx+f_1(\zeta)+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx-$$

$$-\frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx, \qquad (83)$$

где на основании равенств (37) и (38)

$$f_1(l_0)=\xi\Big|_{t=0}-l_0,\quad f_2(l_0)=\frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0}-v(0).$$

Мы видим, что неизвестные α, $\Phi(-0)$, $\Phi(+0)$, $\Phi'(+0)$ исключились и, таким образом, их значение не влияет на окончательный результат.

Найдем еще выражение $u(x, t)$ в области IV, ограниченной характеристиками (фиг. 2):

$$-x+ct=0, \quad -x+ct=l_0, \quad x+ct=l_0, \quad x+ct=\frac{2cl_0}{c+v}.$$

Аргументы $-x+ct$ и $x+ct$ в этой области положительны и изменяются в пределах:

$$0 \leqslant -x+ct \leqslant l_0, \quad l_0 \leqslant x+ct \leqslant \frac{2cl_0}{c+v}.$$

Отсюда находим границы изменения аргумента ct:

$$\frac{l_0}{2} \leqslant ct \leqslant \frac{l_0}{2}+\frac{cl_0}{c+v}.$$

Так как значение отношения $\frac{v}{c}$ практически невелико, то верхний предел аргумента ct близок к $\frac{3}{2}l_0$. Вообще же говоря функция $u(x, t)$ имеет в области IV различный вид в зависимости от того, будет ли $ct < l_0$ или, наоборот, $ct > l_0$. Мы ограничимся первым случаем. Подставляем соответствующие значения Φ и находим искомое выражение деформации $u(x, t)$ в области IV:

$$\begin{aligned} 2u(x, t) = {} & \frac{g\lambda^2\omega^2}{c(c-v)} + \delta\lambda\omega + \varepsilon - \lambda f_1(-\omega) - \frac{\lambda}{c}\int\limits_{-l_0}^{\omega} f_2(-\omega)\,d\omega - \frac{2b}{c^2}\Phi(+0) - \\ & - \frac{2b}{c^2} z\Phi'(+0) - \frac{2}{c} e^{-\frac{b\zeta}{c^2}} \int\limits_0^{\zeta} e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x)\right] dx + \frac{1}{c}\int\limits_0^{\zeta} f_2(x)\,dx - \\ & - f_1(\zeta) - 2\Phi'(+0) + \frac{2}{c} e^{-\frac{bt}{c}} \int\limits_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x)\right] dx - \frac{2}{c}\int\limits_0^{ct} f_2(x)\,dx. \end{aligned} \tag{84}$$

где

$$z = x+ct, \quad \zeta = -x+ct, \quad \omega = \frac{z(c+v)-2cl_0}{c-v}, \quad \lambda = \frac{c-v}{c+v}.$$

Остается внести в уравнение (84) значения постоянных δ и ε, находимые на основании следующих соображений. На границе областей III и IV (прямая $-x+ct=0$), а также областей II и IV (прямая $x+ct=l_0$) значения функции $u(x, t)$ и ее производных $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ должны совпадать. Это замечание и позволяет определить значения постоянных δ и ε.

Задачи математической физики можно решать или в замкнутой форме или с помощью применения бесконечных рядов. Первый способ теоретически представляет известные преимущества по сравнению со вторым, однако иногда с точки зрения простоты вычислений оказывается более выгодным второй способ. Рассматриваемый в настоящей статье вопрос решен в качестве примера для случая равномерного вращения блока в замкнутой форме. Приведя задачу к определению вида одной неизвестной функции Φ, путем экстраполирования за пределы данного интервала $(0, l_0)$ можно последовательно получить ее значение в интервалах:

$$(-l_0, 0); \quad (0, l_0); \quad \left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right); \quad \left(\frac{2cl_0}{c+v}, \quad \frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}\right);$$

$$\left(\frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}, \frac{4c^2 l_0}{(c+v)^2}\right); \quad \left(\frac{4c^2 l_0}{(c+v)^2}, \quad \frac{5c^2 l_0 - 2cvl_0 + v^2 l_0}{(c+v)^2}\right)$$

и т. д. Длины этих интервалов будут таковы:

$$l_0, l_0, l_0 \frac{c-v}{c+v}, \quad l_0 \frac{c-v}{c+v}, \quad l_0 \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2, \quad l_0 \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2, \ldots$$

Закон образования членов полученного ряда очевиден. Можно показать что если известно значение функции Φ в $2n$ вышеприведенных интервалах, то указанные данные позволят вычислить деформацию $u(x, t)$ нити при поднятии груза на высоту h, не превышающую некоторой величины

$$l_0 \left\{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left[1 - \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^n\right] - \frac{v}{c}\right\},$$

которая имеет пределом l_0, если $n \to \infty$ и $c > v$.

Таким образом, если при решении поставленной задачи указанным выше способом ограничиваться значениями h, меньшими l_0, число необходимых операций остается конечным. Однако последнее неопределенно возрастает, если $h \to l_0$. Случай $h = l_0$ на практике исключается.

LA DÉFORMATION ÉLASTIQUE DU CÂBLE DE LEVAGE

N. NÉRONOFF

(Leningrad)

(Résumé)

Le problème considéré de la physique mathématique se rencontre quand on détermine la déformation (dilatation) élastique, et par conséquent la tension, en tous points du câble de levage. Nous envisageons le câble comme un fil élastique auquel est suspendu à son extrémité inférieure B un solide A de poids $p = mg$. L'extrémité supérieure C du fil enroulé sur la poulie tournante a la vitesse $v(t)$, la fonction $v(t)$ du temps t étant donnée. Plaçons l'origine au point C et dirigeons l'axe des coordonnées verticalement vers le bas. Désignons les coordonnées du point B et du point arbitraire M du fil respectivement par ξ et X. Nous avons

$$MB = x + u(x, t),$$

où x désigne la longueur primitive (correspondant à l'absence de forces) de la partie MB du fil et $u(x, t)$ sa déformation (fig. 1). Il en suit

$$X = \xi - x - u(x, t). \tag{1}$$

Soient ρ — la masse de l'unité de longueur primitive du fil en état naturel, T — sa tension au point M et k — une constante. La loi de Hooke donne

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

L'équation différentielle de l'élément du fil au point arbitraire

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \rho g - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

et celle du solide A

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = mg - k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \tag{3}$$

Éliminons X et ξ des trois équations (1), (2), (3) et obtenons l'équation différentielle aux dérivées partielles du deuxième ordre déterminant la fonction inconnue $u(x, t)$.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{4}$$

où

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad b = \frac{k}{m}.$$

Son intégrale générale a la forme

$$u(x, t) = \varphi'(x + ct) + \psi'(x - ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)], \tag{5}$$

où φ et ψ représentent des fonctions arbitraires.

Les conditions initiales sont les suivantes:

$$u(x, t)|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_2(x), \tag{6}$$

où

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0.$$

Passons aux deux conditions aux limites. La première d'elles

$$u(x, t)|_{x=0} = 0 \tag{7}$$

se rapporte au point B et la seconde

$$\frac{\partial X}{\partial t}\bigg|_{x=l} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\bigg|_{x=l} = v(t) \tag{8}$$

au point C, désignant par l la longueur primitive de la partie pendante BC du fil. La valeur de l se trouve à l'aide de l'équation

$$X|_{x=l} = \xi - l - u(x, t)|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

Des équations (8) et (9) nous déduisons

$$\frac{dl}{dt}=\frac{v(t)}{1+\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}}, \tag{10}$$

où approximativement

$$\frac{dl}{dt}=v(t), \quad l=l_0+\int_0^t v(t)\,dt, \tag{11}$$

en négligeant $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}$ dans le dénominateur à cause de la petite valeur du coefficient de dilatation linéaire, ce qu'on suppose ordinairement dans la théorie de l'élasticité.

En différentiant l'équation (8) par rapport à t et éliminant $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ à l'aide de l'équation (3), nous donnons à la seconde des conditions aux limites la forme suivante:

$$v'(t)+\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=l}+\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right|_{x=l}\frac{dl}{dt}=g-b\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{12}$$

La première des conditions aux limites permet de réduire la question à la détermination d'une seule fonction arbitraire Φ et l'égalité (5) prend la forme

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{b}{c^2}\left[\Phi(x+ct)+\Phi(-x+ct)\right]+\\ &+\Phi'(x+ct)-\Phi'(-x+ct)-\frac{2b}{c^2}\Phi(ct). \end{aligned} \tag{13}$$

En vertu des conditions initiales (6) la fonction Φ aura deux expressions dont la première agit force dans l'intervalle $(0, l_0)$ de la variation de l'argument de la fonction Φ, et la seconde dans l'intervalle $(-l_0, 0)$. C'est pourquoi la fonction inconnue $u(x,t)$ aura aussi deux expressions. La première d'elles a la forme

$$\begin{aligned} 2u(x,t)&=f_1(z)+f_1(\zeta)+\frac{1}{c}\int_0^z f_2(x)\,dx-\frac{1}{c}\int_0^\zeta f_2(x)\,dx-\frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx+\\ &+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx, \end{aligned} \tag{14}$$

où

$$z=x+ct, \quad \zeta=x-ct, \quad 0\leqslant z\leqslant l_0, \quad 0\leqslant\zeta\leqslant l_0, \quad 0\leqslant ct\leqslant\frac{l_0}{2}$$

et la seconde

$$\begin{aligned} 2u(x,t)&=f_1(z)-f_1(\zeta)+\frac{1}{c}\int_0^z f_2(x)\,dx+\frac{1}{c}\int_0^\zeta f_2(x)\,dx-\\ &-\frac{2}{c}e^{-\frac{b\zeta}{c^2}}\int_0^\zeta e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx-\frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx+\\ &+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int_0^{ct} e^{\frac{ex}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx, \end{aligned} \tag{15}$$

où

$$z = x + ct, \quad \zeta = x + ct, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_0, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant l_0, \quad 0 \leqslant ct \leqslant l_0,$$

désignant par e la base des logarithmes népériens.

En cherchant la fonction $u(x, t)$ dans un nouvel domaine, nous nous bornons, pour simplifier les calculs, au cas de la rotation uniforme de la poulie, c'est-à-dire

$$v(t) = \text{const} = -v, \quad l = l_0 - vt, \quad c > v.$$

La condition (12) donne une équation différentielle pour la détermination de la fonction arbitraire Φ dans l'intervalle $\left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right)$, la fonction Φ dans l'intervalle $(-l_0, 0)$ étant connue. En substituant l'expression obtenue de Φ dans l'égalité (13), nous trouvons la fonction $u(x, t)$ dans le nouvel domaine. Notamment

$$2u(x, t) = \frac{g\lambda^2(\omega^2 + l_0^2)}{c(c-v)} + \frac{2\lambda\omega}{c}\left[f_2(l_0) + \frac{g\lambda l_0}{c-v}\right] + (1+\lambda) f_1(l_0) +$$

$$+ \frac{2\lambda l_0}{c} f_2(l_0) + \frac{1}{c}\int_0^{l_0} f_2(x)\,dx - \lambda f_1(-\omega) - \frac{\lambda}{c}\int_{-l_0}^{\omega} f_2(-\omega)\,d\omega - \frac{1}{c}\int_0^{\zeta} f_2(x)\,dx +$$

$$+ f_1(\zeta) + \frac{2}{c} e^{-\frac{b}{c}} \int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x)\right] dx - \frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx, \tag{16}$$

où

$$\omega = \frac{z(c+v) - 2cl_0}{c-v}, \quad \lambda = \frac{c-v}{c+v}, \quad z = x + ct, \quad \zeta = x - ct,$$

$$l_0 \leqslant z \leqslant \frac{2cl_0}{c+v}, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant l_0, \quad 0 \leqslant ct \leqslant \frac{cl_0}{c+v}.$$

Le procédé ci-dessus signalé peut être répété à l'infini. Les formules obtenues montrent que les vibrations élastiques longitudinales du fil sont accompagnées par la propagation, le long du fil, d'une discontinuité du deuxième ordre.

Il est facile de démontrer que, si au moment initial tout le système se trouve en état d'équilibre, la rotation de la poulie provoque la propagation le long du fil d'une discontinuité d'un ordre quelconque. Le front d'onde avant séparant la partie supérieure du fil en mouvement de la partie inférieure en repos a la vitesse c.

Les conditions de la propagation d'une discontinuité d'ordre i sont les suivantes:

$$v(0) = 0, \; v^{(1)}(0) = 0, \; v^{(2)}(0) = 0, \ldots, \; v^{(i-2)}(0) = 0, \; v^{(i-1)}(0) \neq 0. \tag{17}$$

Un autre problème ultérieur est d'appliquer à la question considérée l'algorithme symbolique de Heaveside.