АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ПЛОСКАЯ СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ

(Ленинград)

Одной из важнейших статических задач теории упругости является плоская задача. Изучению плоской задачи посвящено много теоретических и экспериментальных исследований. Однако почти во всех этих исследованиях рассматривается напряженное состояние изотропного тела, которое является лишь простейшим частным случаем упругого тела. В литературе по теории упругости и, в частности, по плоской задаче (до 1935 г.) не содержится никаких указаний на сколько-нибудь полное и систематическое изучение плоской задачи в более общем случае упругого тела, именно, в случае анизотропного тела.[1]

В настоящей статье мы рассмотрим плоскую статическую задачу теории упругости применительно к однородному анизотропному телу, материал которого обладает некоторой упругой симметрией (плоскости симметрии). В нашей статье, помещенной в одном из предыдущих выпусков этого сборника, было выведено основное уравнение плоской задачи теории упругости анизотроп-

---

[1] Несколько исследований частных случаев напряженного состояния анизотропного тела в форме длинного цилиндра, когда деформация довольно близко подходит к плоской, можно найти в работах Saint-Venant (*Mémoire sur es divers genres d'homogénéité des corps solides*..., Journal de math. pures et appl., t. X, 1865); Voigt (*Ueber die Elasticitätsverhältnisse cylindrisch aufgebauter Körper*, Nachrichten v. d. Königl. Ges. des Wiss. u. g. A. Univ. zu Göttingen, № 16, 1886), Somigliana (*Ricerche sulle deformazioni in un cilindro cristalino.* Annali di Math. pura ed applicata, s. II, t. XX, 1892) и др.

В курсе С. В. Серенсена (Основы технической теории упругости, ОНТИ, Харьков — Киев, 1934) приведено основное уравнение плоской задачи, справедливое лишь для довольно узкого круга анизотропных тел: там же дано решение для одного из случаев изгиба плоских балок.

ного тела и дано решение для одного частного случая.[1] Теперь мы обратим внимание, главным образом, на исследование основного уравнения и тех функций комплексного переменного, через которые выражаются напряжения и перемещения.

1. Основное уравнение плоской задачи и его общий интеграл. Уравнения обобщенного закона Гука для однородного анизотропного тела, материал которого имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную выбранной плоскости XOY, имеют вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11} X_x + a_{12} Y_y + a_{13} Z_z + a_{16} X_y, \\ e_{yy} &= a_{12} X_x + a_{22} Y_y + a_{23} Z_z + a_{26} X_y, \\ e_{zz} &= a_{13} X_x + a_{23} Y_y + a_{33} Z_z + a_{36} X_y, \\ e_{yz} &= a_{44} Y_z + a_{45} X_z, \\ e_{xz} &= a_{45} Y_z + a_{55} X_z, \\ e_{xy} &= a_{16} X_x + a_{26} Y_y + a_{36} Z_z + a_{66} X_y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В более частных случаях анизотропии коэффициенты a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{45} могут быть нулями, а между другими a_{ik} могут существовать различные зависимости. В нашей работе, о которой было упомянуто выше, было также показано, что в случае плоской деформации или в случае обобщенного плоско-напряженного состояния:

1) уравнения обобщенного закона Гука (1.1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_{11} X_x + \beta_{12} Y_y + \beta_{16} X_y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \beta_{12} X_x + \beta_{22} Y_y + \beta_{26} X_y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \beta_{16} X_x + \beta_{26} Y_y + \beta_{66} X_y; \end{aligned} \tag{1.2}$$

2) напряжения X_x, Y_y, X_y при отсутствии объемных сил можно выразить через одну функцию напряжений φ посредством формул

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y}, \tag{1.3}$$

причем φ должна удовлетворять уравнению

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \, \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \, \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \, \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \tag{1.4}$$

Последнее уравнение и является основным уравнением плоской задачи теории упругости анизотропного тела.

В случае обобщенного плоско-напряженного состояния под β_{ik} надо понимать одноименные коэффициенты из уравнений (1.1); в случае плоской деформации:

$$\beta_{ik} = \frac{1}{a_{33}} (a_{ik} a_{33} - a_{i3} a_{k3}) \qquad (i,\, k = 1,\, 2,\, 6).$$

[1] С. Лехницкий. К вопросу о влиянии сосредоточенной силы на распределение напряжений в упругой анизотропной среде, „Прикладная математика и механика", т. III, вып. I, 1935.

Общий интеграл уравнения (1.4) зависит от корней s_k характеристического уравнения

$$\beta_{11} s^4 - 2\beta_{16} s^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) s^2 - 2\beta_{26} s + \beta_{22} = 0. \tag{1.5}$$

В случае неравных корней он может быть записан в виде:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} F_k (x + s_k y), \tag{1.6}$$

где F_k — произвольные функции, а в случае попарно равных корней, т. е. когда $s_2 = s_1$, $s_4 = s_3$ — в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = (x + s_3 y) F_1 (x + s_1 y) + (x + s_1 y) F_2 (x + s_3 y) + \\ + F_3 (x + s_1 y) + F_4 (x + s_3 y). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Весьма существенную роль играет во всем дальнейшем следующая теорема: *характеристическое уравнение* (1.5) ***не может иметь вещественных корней.***

Для доказательства рассмотрим выражение потенциальной энергии, отнесенной к единице объема идеально упругого анизотропного тела, с плоскостями упругой симметрии, параллельными плоскости XOY. Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} a_{11} X_x^2 + a_{12} X_x Y_y + a_{13} X_x Z_z + a_{16} X_x Y_y + \\ + \frac{1}{2} a_{22} Y_y^2 + a_{23} Y_y Z_z + a_{26} Y_y X_y + \\ + \frac{1}{2} a_{33} Z_z^2 + a_{36} Z_z X_y + \\ + \frac{1}{2} a_{44} Y_z^2 + a_{45} Y_z X_z + \\ + \frac{1}{2} a_{55} X_z^2 + \frac{1}{2} a_{66} X_y^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

При всяких значениях напряжений, возникающих в упругом теле и не превосходящих по абсолютной величине некоторой предельной величины α, потенциальная энергия остается положительной, т. е. $W > 0$ в каждой точке. С другой стороны, в данной фиксированной точке тела под влиянием тех или иных внешних сил могут возникнуть какие угодно напряжения.[1] Задав произвольно 6 вещественных чисел, не превосходящих по абсолютной величине α, мы можем считать их напряжениями X_x, Y_y, ..., X_y в некоторой фиксированной точке.

Зададим величины напряжений в этой точке в виде:

$$X_x = \frac{k^2}{N}, \quad Y_y = \frac{1}{N}, \quad X_y = -\frac{k}{N}, \quad Z_z = -\frac{1}{N a_{33}} (k^2 a_{13} + a_{23} - k a_{36}), \quad Y_z = X_z = 0,$$

---

[1] П. Бехтерев, Аналитическое исследование обобщенного закона Гука, ч. I, изд. автора, Л., 1925, или журнал Русского физико-химического общества, LVII, вып. 3—4. 1926.

где k и N — вещественные числа. Тогда выражение потенциальной энергии, отнесенной к единице объема, в данной точке будет иметь вид:

$$W = \frac{1}{2N^2}[\beta_{11} k^4 - 2\beta_{16} k^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) k^2 - 2\beta_{26} k + \beta_{22}].$$

Будем теперь придавать k всевозможные вещественные значения и каждый раз подбирать N так, чтобы выполнялись условия:

$$|X_x| < \alpha, \quad |Y_y| < \alpha, \quad |X_y| < \alpha.$$

При всяких k и N должно быть $W > 0$; отсюда следует, что функция

$$f(k) = \beta_{11} k^4 - 2\beta_{16} k^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) k^2 - 2\beta_{26} k + \beta_{22}$$

должна быть положительной при всяком k, и, следовательно, она не имеет вещественных корней.

Задавая значения

$$X_x = \frac{k^2}{N}, \quad Y_y = \frac{1}{N}, \quad X_y = -\frac{k}{N}, \quad Z_z = Y_z = X_z = 0,$$

докажем совершенно аналогичным путем, что и функция

$$f_1(k) = a_{11} k^4 - 2a_{16} k^3 + (2a_{12} + a_{66}) k^2 - 2a_{26} k + a_{22}$$

не имеет вещественных корней.

Таким образом, теорема справедлива как для случая плоской деформации, так и для случая обобщенного плоско-напряженного состояния.

В силу доказанного корни уравнения (1.5) могут быть или неравными, вида:

$$s_1 = \mu_1 = \alpha + \beta i, \quad s_2 = \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta i, \quad s_3 = \mu_2 = \gamma + \delta i, \quad s_4 = \bar{\mu}_2 = \gamma - \delta i,$$

или попарно-равными:

$$s_1 = s_2 = \mu_1 = \alpha + \beta i, \quad s_3 = s_4 = \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta i.$$

В случае неравных корней мы можем записать общий интеграл уравнения (1.4) в виде:

$$\varphi = F_1(z_1) + \overline{F_1}(\bar{z}_1) + F_2(z_2) + \overline{F_2}(\bar{z}_2), \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= x + \mu_1 y = \xi_1 + i\eta_1, \quad \bar{z}_1 = x + \bar{\mu}_1 y = \xi_1 - i\eta_1, \\ z_2 &= x + \mu_2 y = \xi_2 + i\eta_2, \quad \bar{z}_2 = x + \bar{\mu}_2 y = \xi_2 - i\eta_2, \\ \xi_1 &= x + \alpha y, \quad \eta_1 = \beta y, \quad \xi_2 = x + \gamma y, \quad \eta_2 = \delta y. \end{aligned} \tag{1.8$_a$}$$

Общему интегралу (1.8) можно придать и такой вид:

$$\varphi = U(\xi_1, \eta_1) + V(\xi_2, \eta_2), \tag{1.9}$$

где U и V — гармонические функции переменных ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2, т. е. функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_2^2} = 0.$$

В случае равных корней общий интеграл запишется в виде:

$$\varphi = \bar{z}_1 F_1(z_1) + z_1 \overline{F_1}(\bar{z}_1) + F_2(z_1) + \overline{F_2}(\bar{z}_1). \tag{1.10}$$

Если тело изотропное, тогда $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\delta=1$, $z_1=x+iy$, $\bar{z}_1=x-iy$, и мы получаем из (1.10) общий интеграл бигармонического уравнения в форме Гурса. На случае равных корней в силу его исключительности мы в дальнейшем останавливаться не будем.

2. Общие выражения для напряжений и перемещений. Зная общий интеграл (1.8) уравнения (1.4), нетрудно получить общие выражения для напряжений и перемещений через две функции комплексных аргументов $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$.

Обозначая

$$\Phi_1(z_1)=\frac{dF_1(z_1)}{dz_1},\quad \bar{\Phi}_1(\bar{z}_1)=\frac{d\bar{F}_1(\bar{z}_1)}{d\bar{z}_1},$$
$$\Phi_2(z_2)=\frac{dF_2(z_2)}{dz_2},\quad \bar{\Phi}_2(z_2)=\frac{d\bar{F}_2(\bar{z}_2)}{d\bar{z}_2}, \tag{2.1}$$
$$\Phi_1'(z_1)=\frac{d\Phi_1(z_1)}{dz_1}$$

и т. д., на основании формул (1.3) получим:

$$X_x=\mu_1^2\Phi_1'(z_1)+\mu_1^2\bar{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\mu_2^2\Phi_2'(z_2)+\bar{\mu}_2^2\bar{\Phi}_2'(\bar{z}_2),$$
$$Y_y=\Phi_1'(z_1)+\bar{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\Phi_2'(z_2)+\bar{\Phi}_2'(\bar{z}_2),$$
$$X_z=-\left[\mu_1\Phi_1'(z_1)+\mu_1\bar{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\mu_1\Phi_2'(z_2)+\bar{\mu}_2\bar{\Phi}_2'(\bar{z}_2)\right],$$

или

$$X_x=2R\left[\mu_1^2\Phi_1'(z_1)+\mu_2^2\Phi_2'(z_2)\right],$$
$$Y_y=2R\left[\Phi_1'(z_1)+\Phi_2'(z_2)\right], \tag{2.2}$$
$$X_y=-2R\left[\mu_1\Phi_1'(z_1)+\mu_2\Phi_2'(z_2)\right],$$

где R — символ вещественной части.

Подставляя (2.1) в уравнения (1.2), после интегрирования получим выражения для перемещений

$$u=p_1\Phi_1(z_1)+\bar{p}_1\bar{\Phi}_1(\bar{z})+p_2\Phi_2(z_2)+\bar{p}_2\bar{\Phi}_2(\bar{z}_2)+Cy+C_1,$$
$$v=q_1\Phi_1(z_1)+\bar{q}_1\Phi_1(\bar{z}_1)+q_2\Phi_2(z_2)+\bar{q}_2\bar{\Phi}_2(\bar{z}_2)-Cx+C_2, \tag{2.3}$$

или

$$u=2R\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]+Cy+C_1,$$
$$v=2R\left[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]-Cx+C_2, \tag{2.4}$$

где для простоты положено:

$$p_1=\beta_{11}\mu_1^2+\beta_{12}-\beta_{16}\mu_1,\quad \bar{p}_1=\beta_{11}\bar{\mu}_1^2+\beta_{12}-\beta_{16}\bar{\mu}_1,$$
$$p_2=\beta_{11}\mu_2^2+\beta_{12}-\beta_{16}\mu_2,\quad \bar{p}_2=\beta_{11}\bar{\mu}_2^2+\beta_{12}-\beta_{16}\bar{\mu}_2,$$
$$q_1=\frac{\beta_{12}\mu_1^2+\beta_{22}-\beta_{26}\mu_1}{\mu_1},\quad \bar{q}_1=\frac{\beta_{12}\bar{\mu}_1^2+\beta_{22}-\beta_{26}\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1},$$
$$q_2=\frac{\beta_{12}\mu_2^2+\beta_{22}-\beta_{26}\mu_2}{\mu_2},\quad \bar{q}_2=\frac{\beta_{12}\bar{\mu}_2^2+\beta_{22}-\beta_{26}\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2},$$

C, C_1, C_2 — произвольные постоянные, выражающие лишь жесткие смещения тела в плоскости XOY.

При решении отдельных задач иногда бывает удобно пользоваться полярными координатами r, θ. Напряжения $\widehat{rr}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{r\theta}$, отнесенные к полярной системе координат, выражаются через функцию напряжений φ по формулам

$$\widehat{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}, \quad \widehat{\theta\theta}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \quad \widehat{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right).$$

Полагая

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta,$$

получим:

$$z_1=r(\cos\theta+\mu_1\sin\theta), \quad \bar{z}_1=r(\cos\theta+\bar{\mu}_1\sin\theta),$$
$$z_2=r(\cos\theta+\mu_2\sin\theta), \quad \bar{z}_2=r(\cos\theta+\bar{\mu}_2\sin\theta).$$

Далее, путем дифференцирования общего выражения (1.8) для φ найдем:

$$\begin{aligned}
\widehat{rr}&=(\sin\theta-\mu_1\cos\theta)^2\Phi_1'(z_1)+(\sin\theta-\bar{\mu}_1\cos\theta)^2\overline{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\\
&\quad+(\sin\theta-\mu_2\cos\theta)^2\Phi_2'(z_2)+(\sin\theta-\bar{\mu}_2\cos\theta)^2\overline{\Phi}_2'(\bar{z}_2),\\
\widehat{\theta\theta}&=(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^2\Phi_1'(z_1)+(\cos\theta+\bar{\mu}_1\sin\theta)^2\overline{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\\
&\quad+(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^2\Phi_2'(z_2)+(\cos\theta+\bar{\mu}_2\sin\theta)^2\overline{\Phi}_2'(\bar{z}_2),\\
\widehat{r\theta}&=(\sin\theta-\mu_1\cos\theta)(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)\Phi_1'(z_1)+\\
&\quad+(\sin\theta-\bar{\mu}_1\cos\theta)(\cos\theta+\bar{\mu}_1\sin\theta)\overline{\Phi}_1'(\bar{z}_1)+\\
&\quad+(\sin\theta-\mu_2\cos\theta)(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)\Phi_2'(z_2)+\\
&\quad+(\sin\theta-\bar{\mu}_2\cos\theta)(\cos\theta+\bar{\mu}_2\sin\theta)\overline{\Phi}_2'(\bar{z}_2),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

или

$$\begin{aligned}
\widehat{rr}&=2R\left[(\sin\theta-\mu_1\cos\theta)^2\Phi_1'(z_1)+(\sin\theta-\mu_2\cos\theta)^2\Phi_2'(z_2)\right],\\
\widehat{\theta\theta}&=2R\left[(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^2\Phi_1'(z_1)+(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^2\Phi_2'(z_2)\right],\\
\widehat{r\theta}&=2R\left[(\sin\theta-\mu_1\cos\theta)(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)\Phi_1'(z_1)+\right.\\
&\quad\left.+(\sin\theta-\mu_2\cos\theta)(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)\Phi_2'(z_2)\right].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, напряжения и перемещения выражаются, как и в случае изотропного тела, через функции комплексного переменного. Но если в случае изотропного тела комплексной переменной служит выражение $z=x+iy$, в случае анизотропного тела мы имеем уже две комплексные переменные более сложной структуры: $z_1=x+\mu_1 y$ и $z_2=x+\mu_2 y$.

Выведем теперь условия, которым должны удовлетворять функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ на границах области S, занятой телом.

Если заданы усилия, действующие на границе (первая основная задача), контурные условия для напряжений получим из уравнений элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned}
X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)&=X_n,\\
X_y\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)&=Y_n,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где X_n, Y_n — проекции заданных усилий, которые мы будем считать функциями от дуги контура — s. Эти уравнения мы можем переписать следующим образом:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=X_n(s), \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-Y_n(s)$$

и далее

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\int\limits_0^s X_n(s)\,ds+2a_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\int\limits_0^s Y_n(s)\,ds+2a_2, \tag{2.8}$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные.[1] Полагая

$$\int\limits_0^s X_n(s)\,ds=2\Psi_1(s), \quad -\int\limits_0^s Y_n(s)\,ds=2\Psi_2(s),$$

на основании (1.8) получаем условия для $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ на контуре:

$$\begin{aligned} R\,[\mu_1\Phi_1(z_1')+\mu_2\Phi_2(z_2')]&=\Psi_1(s)+a_1,\\ R\,[\Phi_1(z_1')+\Phi_2(z_2')]&=\Psi_2(s)+a_2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $z_1'=x'+\mu_1 y'$, $z_2'=x'+\mu_2 y'$, а x', y' — координаты точек контура области S. В случае многосвязной области эти условия должны быть выполнены на каждом из контуров, ограничивающих область S, занятую телом.

Если заданы перемещения u_0, v_0 точек контура (вторая основная задача), которые мы будем также считать функциями дуги, контурные условия для $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ получим непосредственно на основании формул (2.4):

$$\begin{aligned} 2R\,[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)]&=u_0(s)-Cy-C_1,\\ 2R\,[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)]&=v_0(s)+Cx-C_2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Условия для функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$. Однозначность напряжений и перемещений. Выясним теперь те условия, которым должны удовлетворять $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ в точках, лежащих внутри области S, занятой телом.

Прежде всего заметим, что с областью S можно привести в однозначное соответствие две другие области Σ_1 и Σ_2, лежащие в плоскостях комплексных переменных $z_1=\xi_1+i\eta_1$ и $z_2=\xi_2+i\eta_2$.

Представим себе две новые системы прямоугольных координат (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2).

Каждой точке A с координатами $x=x_i$, $y=y_i$ системы (x, y) (к которой мы относим область исследуемого тела) соответствует точка A' в системе (ξ_1, η_1) с координатами $\xi_1=x_i+\alpha y_i$, $\eta_1=\beta y_i$ и точка A'' в системе (ξ_2, η_2) с координатами $\xi_2=x_i+\gamma y_i$, $\eta_2=\delta y_i$. Если точка A движется в системе (x, y), занимая всевозможные положения и не выходя за пределы области S, точки A и A' будут двигаться в системах (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2), не выходя за пределы некоторых

[1] За положительное направление отсчета дуг принимается то, при котором область тела остается слева (Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, стр. 125, Л., 1933.)

областей Σ_1 и Σ_2; при этом, если уравнения контуров, ограничивающих область S, были:

$$f_1(x, y)=0, \quad f_2(x, y)=0, \quad \ldots, \quad f_{m+1}(x, y)=0,$$

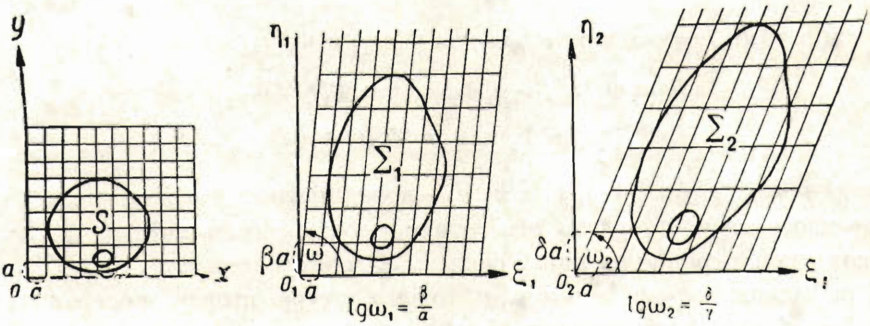
то уравнения контуров, ограничивающих Σ_1 и Σ_2, будут:

$$f_1\left(\xi_1-\frac{\alpha}{\beta}\eta_1, \frac{\eta_1}{\beta}\right)=0, \quad f_2\left(\xi_1-\frac{\alpha}{\beta}\eta_1, \frac{\eta_1}{\beta}\right)=0, \quad \ldots, \quad f_{m+1}\left(\xi_1-\frac{\alpha}{\beta}\eta_1, \frac{\eta_1}{\beta}\right)=0$$

и

$$f_1\left(\xi_2-\frac{\gamma}{\delta}\eta_2, \frac{\eta_2}{\delta}\right)=0, \quad f_2\left(\xi_2-\frac{\gamma}{\delta}\eta_2, \frac{\eta_2}{\delta}\right)=0, \quad \ldots, \quad f_{m+1}\left(\xi_2-\frac{\gamma}{\delta}\eta_2, \frac{\eta_2}{\delta}\right)=0.$$

Таким образом, если x и y изменяются в области S, то переменные $\xi_1+i\eta_1$ и $\xi_2+i\eta_2$ изменяются в областях Σ_1 и Σ_2, в которых $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ будут функциями простого комплексного переменного.



Фиг. 1.

Области Σ_1 и Σ_2 весьма просто получаются из S путем однородной деформации плоскости XOY, именно, растяжения в направлении оси OY, сдвига и вращения (фиг. 1).

Каким условиям должны удовлетворять функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ в точках внутри области S или, что то же самое, в областях Σ_1 и Σ_2?

Ответ на этот вопрос можно дать, введя вполне естественное предположение, что напряжения и перемещения являются однозначными и непрерывными, вплоть до границы области S, функциями x и y.[1] Из условия непрерывности напряжений и перемещений следует, что функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ вместе со своими производными должны быть непрерывными, вплоть до границы, в областях Σ_1 и Σ_2. Что же касается условия однозначности, то оно может быть соблюдено и тогда, когда каждая из функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ многозначна.

Условие однозначности напряжений и перемещений требует, чтобы приращения этих величин при обходе по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области S, были равны нулю. При исследовании характера многозначности функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ полезно воспользоваться формулами для приращений производных функций напряжений φ при обходе по некоторой замкнутой кривой L:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_L=-Y, \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_L=X \tag{3.1}$$

[1] Если только внутри области не приложены сосредоточенные силы и моменты.

Здесь $[\;]_L$ — символ, означающий указанное приращение при обходе против часовой стрелки, а X и Y — проекции главного вектора усилий (внутренних), приложенных к кривой L со стороны положительной нормали.[1]

Пусть область S односвязна, тогда Σ_1 и Σ_2 также односвязны. Предположим, что $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ многозначные функции. Пусть точка в системе (x, y) совершает полный обход по какой-либо замкнутой кривой L, не выходящей из области S, тогда соответствующие точки в системах (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) совершают обход по кривым L' и L'', которые также замкнуты и целиком лежат в областях Σ_1 и Σ_2. При таком обходе функция $\Phi_1(z_1)$ получает некоторое приращение $r_1(z_1)$, функция $\Phi_2(z_2)$ — приращение $r_2(z_2)$, а функции $\overline{\Phi}_1(\bar{z}_1)$ и $\overline{\Phi}_2(\bar{z}_2)$ — приращения $\bar{r}_1(\bar{z}_1)$ и $\bar{r}_2(\bar{z}_2)$. Следовательно:

$$
\begin{aligned}
[u]_L &= [p_1 \Phi_1(z_1) + \bar{p}_2 \overline{\Phi}_1(\bar{z}_1) + p_2 \Phi_2(z_2) + \bar{p}_2 \overline{\Phi}_2(\bar{z}_2)]_L = \\
&= [p_1 \Phi_1(\xi_1 + i\eta_1) + \bar{p}_1 \overline{\Phi}_1(\xi_2 - i\eta_1)]_{L'} + [p_2 \Phi_2(\xi_2 + i\eta_2) + \\
&+ \bar{p} \overline{\Phi}_2(\xi_2 - i\eta_2)]_{L''} = p_1 r_1(z_1) + \bar{p}_1 \bar{r}_1(\bar{z}_1) + p_2 r_2(z_2) + \bar{p}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2), \\
[v]_L &= q_1 r_1(z_1) + \bar{q}_1 \bar{r}_1(\bar{z}_1) + q_2 r_2(z_2) + \bar{q}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2), \\
\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_L &= \mu_1 r_1(z_1) + \bar{\mu}_1 \bar{r}_1(\bar{z}_1) + \mu_2 r_2(z_2) + \bar{\mu}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2), \\
\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_L &= r_1(z_1) + \bar{r}_1(\bar{z}_1) + r_2(z_2) + \bar{r}_2(\bar{z}_2).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Но если односвязная область принадлежит телу, находящемуся под действием внешних сил в равновесии, главный вектор усилий, приложенный к контуру любой замкнутой области, целиком заключенной в S, равен нулю. Следовательно, должно быть:

$$
\begin{aligned}
p_1 r_1(z_1) + \bar{p}_1 \bar{r}_1(\bar{z}_1) + p_2 r_2(z_2) + \bar{p}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2) &= 0, \\
q_1 r_1(z_1) + \bar{q}_1 \bar{r}_1(\bar{z}_1) + q_2 r_2(z_2) + \bar{q}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2) &= 0, \\
\mu_1 r_1(z_1) + \bar{\mu} \bar{r}_1(\bar{z}_1) + \mu_2 r_2(z_2) + \bar{\mu}_2 \bar{r}_2(\bar{z}_2) &= 0, \\
r_1(z_1) + \bar{r}(\bar{z})_1 + r_2(z_2) + \bar{r}_2(\bar{z}_2) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться независимо от того, по какой замкнутой кривой мы следовали и с какой точки начали обход, получаем:[2]

$$r_1(z_1) = \bar{r}_1(\bar{z}_1) = r_2(z_2) = \bar{r}_2(\bar{z}_2) = 0.$$

Таким образом, в случае односвязной области, функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ должны быть непрерывными вместе со своими производными, вплоть до границ, и однозначными в областях Σ_1 и Σ_2, иначе говоря, голоморфными в этих областях, за исключением может быть точек границ и бесконечно удаленных

---

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, стр. 100, Л., 1933.

[2] Нетрудно вывести, что определитель системы (3.3) обращается в нуль только тогда, когда корни уравнения (1.5) равные.

точек (в случае бесконечных областей). Производные этих функций также голоморфны, вследствие чего напряжения будут однозначными.

Рассмотрим теперь случай, когда область S многосвязна и ограничена $m+1$ простыми контурами, из которых последний охватывает все остальные. Области Σ_1 и Σ_2 также будут $(m+1)$ связными. Если контуры отверстий свободны от внешних усилий, все сказанное для односвязной области остается справедливым и для многосвязной. Если же к контурам отверстий приложены усилия, имеющие конечный главный вектор на каждом контуре, тогда внутренние усилия, действующие на кривой, окружающей одно отверстие, уравновешиваются внешними усилиями, приложенными к контуру этого отверстия.

Совершая обход по произвольной замкнутой кривой L_k, окружающей только одно k-тое отверстие и лежащей целиком внутри области S, и удовлетворяя условиям однозначности перемещений, получим уравнения

$$\begin{aligned} &p_1 r_{1k}(z_1) + \bar{p}_1 \bar{r}_{1k}(\bar{z}_1) + p_2 r_{2k}(z_2) + \bar{p}_2 \bar{r}_{2k}(\bar{z}_2) = 0, \\ &q_1 r_{1k}(z_1) + \bar{q}_1 \bar{r}_{1k}(\bar{z}_1) + q_2 r_{2k}(z_2) + \bar{q}_2 \bar{r}_{2k}(\bar{z}_2) = 0, \\ &\mu_1 r_{1k}(z_1) + \bar{\mu}_1 \bar{r}_{1k}(\bar{z}_1) + \mu_2 r_{2k}(z_2) + \bar{\mu}_2 \bar{r}_{2k}(\bar{z}_2) = -X_k, \\ &r_{1k}(z_1) + \bar{r}_{1k}(\bar{z}_1) + r_{2k}(z_2) + \bar{r}_{2k}(\bar{z}_2) = Y_k, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $r_{1k}(z_1)$, $r_{2k}(z_2)$ — приращения функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ при обходе вокруг k-тых контуров областей Σ_1 и Σ_2, а X_k, Y_k — проекции главного вектора усилий, приложенных к контуру k-ого отверстия.[1] В силу произвольности пути и начальной точки обхода заключаем, что приращения $r_1(z_1)$, $\bar{r}_1(\bar{z}_1)$, $r_2(z_2)$, $\bar{r}_2(\bar{z}_2)$ могут быть лишь постоянными, которые мы обозначим:

$$2\pi i(A_k + iB_k), \quad -2\pi i(A_k - iB_k), \quad 2\pi i(C_k + iD_k), \quad -2\pi i(C_k - iD_k).$$

Эти постоянные однозначно определятся из уравнений

$$\begin{aligned} &(A_k + iB_k)\,p_1 - (A_k - iB_k)\,\bar{p} + (C_k + iD_k)\,p_2 - (C_k - iD_k)\,\bar{p}_2 = 0, \\ &(A_k + iB_k)\,q_1 - (A_k - iB_k)\,\bar{q} + (C_k + iD_k)\,q_2 - (C_k - iD_k)\,\bar{q}_2 = 0, \\ &(A_k + iB_k)\,\mu_1 - (A_k - iB_k)\,\bar{\mu}_1 + (C_k + iD_k)\,\mu_2 - (C_k - iD_k)\,\bar{\mu}_2 = -\frac{X_k}{2\pi i}, \\ &B_k + D_k = -\frac{Y_k}{4\pi}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Совершая обходы по кривым, окружающим другие отверстия, получаем аналогичные уравнения. Но отсюда следует, что функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ содержат в виде слагаемых логарифмы, так как приращения последних как раз обладают указанным свойством и могут быть представлены в виде:

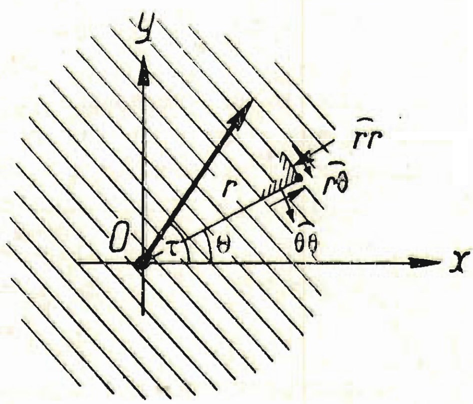
$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sum_{k=1}^{m} (A_k + iB_k)\log(z_1 - z_{1k}) + \Phi_1^\circ(z_1), \\ \Phi_2(z_2) &= \sum_{k=1}^{m} (C_k + iD_k)\log(z_2 - z_{2k}) + \Phi_2^\circ(z_2), \end{aligned} \tag{3.6}$$

[1] Проекции главного вектора усилий, приложенных к контуру k-того отверстия (X_k, Y_k), обратны по знаку проекциям главного вектора усилий, приложенных к кривой L_k со стороны положительной нормали.

где $z_{1k}=\xi_{1k}+i\eta_{1k}$, $z_{2k}=\xi_{2k}+i\eta_{2k}$, а (ξ_{1k}, η_{1k}) и (ξ_{2k}, η_{2k}) — координаты некоторых фиксированных точек внутри k-тых по счету отверстий в областях Σ_1 и Σ_2 (эти точки соответствуют произвольно зафиксированной точке внутри k-того контура области S); $\Phi_1{}^0(z_1)$ и $\Phi_2{}^0(z_2)$ — голоморфные и однозначные функции в областях Σ_1 и Σ_2. Последние выражения дают общий вид интересующих нас функций для случая многосвязной области. Производные этих функций голоморфны и однозначны в указанных областях, и поэтому напряжения также будут однозначными.

4. Пример. Сосредоточенная сила, приложенная внутри неограниченной плоскости. Решение этой задачи легко получим на основании общих формул для функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ в случае многосвязной области.

Примем точку приложения силы за начало координат. За оси координат возьмем те оси, по отношению к которым вычислены константы упругости данного материала; в противном случае нам пришлось бы предварительно вычислять константы для новых осей. Обозначим величину силы через P и угол наклона ее к оси OX через τ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Неограниченную плоскость с сосредоточенной силой мы можем рассматривать как предельный случай двусвязной области, именно, как случай бесконечной плоскости с весьма малым отверстием, к контуру которого приложены усилия, имеющие конечную равнодействующую P.

Напряжения на бесконечности должны обращаться в нуль; это накладывает весьма общие условия на функции $\Phi_1{}^0(z_1)$ и $\Phi_2{}^0(z_2)$. Никаких других условий для них мы не можем установить, и задача в указанной постановке носит несколько неопределенный характер. Впрочем с точно такой же неопределенностью имеют дело при решении аналогичной задачи для изотропной плоскости.

Положим:

$$\Phi_1{}^0(z)=\Phi_2{}^0(z)=0.$$

В пределе, когда отверстие суживается в точку, имеем:

$$z_{1k}=z_{11}=0, \quad z_{2k}=z_{21}=0,$$
$$\Phi_1(z_1)=(A+iB)\log z_1, \quad \Phi_2(z_2)=(C+iD)\log z_2. \tag{4.1}$$

На основании формул 2.2 получаем:

$$X_x=2R\left[\mu_1{}^2\frac{A+iB}{z_1}+\mu_2{}^2\frac{C+iD}{z_2}\right],$$
$$Y_y=2R\left[\frac{A+iB}{z_1}+\frac{C+iD}{z_2}\right], \tag{4.2}$$
$$X_y=2R\left[\mu_1\frac{A+iB}{z_1}+\mu_2\frac{C+iD}{z_2}\right].$$

Постоянные A, B, C, D найдутся из уравнений

$$\begin{gathered}(A+iB)p_1-(A-iB)\bar{p}_1+(C+iD)p_2-(C-iD)\bar{p}_2=0,\\ (A+iB)q_1-(A-iB)\bar{q}_1+(C+iD)q_2-(C-iD)\bar{q}_2=0,\\ A\beta+B\alpha+C\delta+D\gamma=\frac{P\cos\tau}{4\pi},\\ B+D=-\frac{P\sin\tau}{4\pi}.\end{gathered}\tag{4.3}$$

Переходя к полярным координатам, на основании формул (2.3) получим:

$$\begin{gathered}\widehat{rr}=\frac{1}{r}\,2R\left[\frac{(\sin\theta-\mu_1\cos\theta)^2}{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}(A+iB)+\frac{(\sin\theta-\mu_2\cos\theta)^2}{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}(C+iD)\right],\\ \widehat{\theta\theta}=\frac{2}{r}\left[(A+C)\cos\theta+(A\alpha+C\gamma-B\beta-D\delta)\sin\theta\right],\\ \widehat{r\theta}=\frac{2}{r}\left[(A+C)\sin\theta-(A\alpha+C\gamma-B\beta-D\delta)\cos\theta\right].\end{gathered}\tag{4.4}$$

Решение (4.4) несколько упрощается, когда в каждой точке материала имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, параллельные координатным. Тогда $\beta_{16}=\beta_{26}=0$.

Для μ_1 и μ_2 возможны лишь следующие значения:

1) $\mu_1=\beta i$, $\quad\mu_2=\delta i$;

2) $\mu_1=\alpha+\beta i$, $\quad\mu_2=-\alpha+\beta i$;

3) $\mu_1=\mu_2=\beta i$.

Укажем решение для случая, когда сила действует в направлении оси OX ($\tau=0$) и когда $\mu_1=\beta i$, $\mu_2=\delta i$.

$$\begin{gathered}\widehat{rr}=-\frac{P}{2\pi\beta_{22}(\beta^2-\delta^2)}\cdot\frac{\cos\theta}{r}\left[-\beta(\beta_{22}-\beta_{12}\delta^2)\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta-\beta^2}{\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}+\right.\\ \left.+\delta(\beta_{22}-\beta_{12}\beta^2)\frac{(1-\delta^2)\sin^2\theta-\delta^2}{\cos^2\theta+\delta^2\sin 2\theta}\right],\\ \widehat{\theta\theta}=\frac{P(\beta_{22}+\beta\delta\,\beta_{12})}{2\pi\beta_{22}(\beta+\delta)}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\\ \widehat{r\theta}=\frac{P(\beta_{22}+\beta\delta\beta_{12})}{2\pi\beta_{22}(\beta+\delta)}\frac{\sin\theta}{r}.\end{gathered}\tag{4.5}$$

Полагая $\delta=\beta$, найдем, после преобразований:

$$\begin{gathered}\widehat{rr}=-\frac{P}{4\pi\beta_{22}\beta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}\cdot\{[\beta_{22}(1+\beta^2)+\beta_{12}\beta^2(\beta^2-3)]\beta^2\sin^4\theta+[\beta_{22}(3\beta^2-1)-\\ -\beta_{12}\beta^2(1+\beta^2)]\sin^2\theta\cos^2\theta+(\beta_{22}+\beta_{12}\beta^2)\sin^2\theta+\\ +(3\beta_{22}-\beta_{12}\beta^2)\beta^2\cos^2\theta\}:(\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta)^2\\ \widehat{\theta\theta}=\frac{P(\beta_{22}+\beta_{12}\beta^2)}{4\pi\beta_{22}\beta}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\\ \widehat{r\theta}=\frac{P(\beta_{22}+\beta_{12}\beta^2)}{4\pi\beta_{22}\beta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}.\end{gathered}\tag{4.6}$$

Из этих формул при $\beta = 1$ получаем решение для случая изотропного тела

$$\widehat{rr} = -\frac{P(3\beta_{22} - \beta_{12})}{4\pi\beta_{22}} \cdot \frac{\cos\theta}{r},$$
$$\widehat{\theta\theta} = \frac{P(\beta_{22} + \beta_{12})}{4\pi\beta_{22}} \cdot \frac{\cos\theta}{r}, \tag{4.7}$$
$$\widehat{r\theta} = \frac{P(\beta_{22} + \beta_{12})}{4\pi\beta_{22}} \cdot \frac{\sin\theta}{r}.$$

В случае обобщенного плоско-напряженного состояния для изотропного тела имеем:

$$\beta_{22} = \frac{1}{E}, \quad \beta_{12} = -\frac{\sigma}{E},$$

где E — модуль Юнга и σ — коэффициент Пуассона. Решение перепишется так:

$$\widehat{rr} = -\frac{3+\sigma}{4\pi} \frac{P\cos\theta}{r},$$
$$\widehat{\theta\theta} = \frac{1-\sigma}{4\pi} \frac{P\cos\theta}{r}, \tag{4.8}$$
$$\widehat{r\theta} = \frac{1-\sigma}{4\pi} \frac{P\sin\theta}{r}.$$

Сравнивая это решение с общим решением (4.4) или с частным (4.5) и (4.6), замечаем, что влияние анизотропии очень мало отражается на напряжениях $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{r\theta}$, тогда как зависимость напряжения $\widehat{rr}$ от угла θ в случае анизотропного тела гораздо сложнее, чем в случае изотропного тела. Зависимость напряжений от расстояния r одинакова в обоих случаях.

Размеры настоящей статьи не позволяют нам остановиться на других частных задачах. Заметим, что получение решения какой-либо частной задачи не из числа элементарных встречает довольно существенные затруднения главным образом вследствие специфичности контурных условий для функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$. Сравнительно нетрудно получить решение для полуплоскости и для плоскости с эллиптическим отверстием; некоторые из этих решений получены автором этой статьи.[1]

Май, 1935 г.

[1] В работе проф. С. Г. Михлина (Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического инст. АН СССР, № 76, 1936), вышедшей после того, как настоящая статья была принята к печати, плоская задача сводится к интегральным уравнениям; вместе с тем вносится исчерпывающая ясность в вопросы существования и единственности решения.

EINE STATISCH FLACHE AUFGABE AUS DER ELASTIZITÄTSTHEORIE EINES ANISOTROPEN KÖRPERS

S. G. LECHNITZKY

(Leningrad)

(Zusammenfassung)

Für Fälle ebener Verformung und flachbeanspruchten Zustandes eines elastischen anisotropen Körpers besitzt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz die Gestaltung (1.2). Die Spannungsfunktion muss aus einer Gleichung mit Einzelresultaten der vierten Reihe abgeleitet werden. Die Gesamtintegrale dieser Gleichung finden ihren Ausdruck durch vier wählbare Funktionen $F(x+s_k y)$, wo s_k die Wurzeln der charakteristischen Gleichung darstellt. Aus energetischen Erwägungen kann man nachweisen, dass diese Wurzeln nicht reell sein können. Durch Einführung zweier vollen Veränderlichen

$$z_i = x_i + s_i y = \xi_i + i\eta_i \quad (i = 1,\ 2)$$

und der mit ihnen verknüpften Grössen in seine Betrachtung leitet der Verfasser den Ausdruck für die Spannungsfunktion in die Form (1.8). Weiterhin ermöglicht dies, die Spannungen und Verschiebungen durch vier Funktionen

$$\Phi_i(z_i) = F_i'(z_i),\ \overline{\Phi}_i(\overline{z}_i) = \overline{F}_i'(\overline{z}_i) \quad (i = 1,\ 2)$$

der obengenannten Veränderlichen [Formeln (2.1) — (2.4)] auszudrücken. Die Grenzbedingungen der Aufgabe werden ebenfalls durch die Funktionen Φ_i und $\overline{\Phi}_i$ ausgedrückt. Ferner untersucht der Verfasser, von der Forderung der Einstelligkeit der Spannungen und Verschiebungen ausgehend, die Frage über den Charakter der Vielstelligkeit der Funktionen $\Phi_i(z_i)$; wobei neben dem vom elastischen Körper eingenommenen Gebiet S der Fläche xy auch die Gebiete Σ_1 und Σ_2 der Ebenen $\xi_i + i\eta_i$ betrachtet werden, welche auf dem Wege der gleichartigen Verformung des Gebietes S entstehen. Zum Schluss wird ein Beispiel des von einer konzentrierten, innerhalb einer unbegrenzten Fläche angelegten Kraft herrührenden Spannungszustandes analysiert. Die Errechnungen für die Halbfläche und Fläche mit elliptischer Oeffnung sind dem Verfasser ebenfalls gelungen und sollen in einer nächstfolgenden Abhandlung veröffentlicht werden.