АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ ПОЛИГОНАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

П. П. КУФАРЕВ

(Томск)

Некоторые проблемы математической теории упругости, например, определение напряжений в стержнях полигонального сечения при кручении[1] или изгибе и также известные вопросы гидродинамики[2] приводят к следующей математической задаче.

Пусть дана область B, ограниченная n-сторонним полигоном Γ. Найти гармоническую в B, непрерывную в $B+\Gamma$ функцию $V(x, y)$, которая принимает на ν-той стороне полигона заданные значения:

$$V = P_\nu(s), \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

где $P_\nu(s)$ — полиномы от s и s — длина дуги контура.

Эффективное решение этой задачи может быть выполнено следующим путем: если μ наибольшая из степеней полиномов $P_\nu(s)$, то можно показать, что $\mu+1$-я производная аналитической в B функции

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

(существование которой следует из классических результатов теории потенциала) удовлетворяет на ν-той стороне полигона Γ условию:

$$\mathrm{I}\left[e^{i(\mu+1)\vartheta_\nu}\varphi(z)\right] = 0$$

(ϑ_ν — угол, образуемый ν-той стороной полигона Γ с X).

---

[1] E. Trefftz, Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt, Math. Ann., 22, 1921.

[2] Л. И. Седов, Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности жидкости, Труды ЦАГИ, вып. 187.

Отсюда можно определить $\varphi(z)$, если только известна функция:

$$z(\zeta) = C\int (\zeta-\zeta_1)^{\varkappa_1-1}(\zeta-\zeta_2)^{\varkappa_2-1}\dots(\zeta-\zeta_n)^{\varkappa_n-1}\,d\zeta,$$

отображающая на область B верхнюю полуплоскость H, т. е. если известны точки ζ_ν, соответствующие вершинам полигона при этом отображении.

В определении $z(\zeta)$ состоит основная трудность задачи.

Если ограничиться полигональными областями, стороны контура которых образуют углы $\alpha_\nu = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, то в этом случае $z(\zeta)$ — гиперэллиптический интеграл и, следовательно, необходимо лишь определить точки разветвления его по заданным длинам сторон полигона Γ.

Для решения такой задачи С. Бергман[1] предложил следующий путь. Как известно, в определенных случаях гиперэллиптический интеграл может быть сведен к эллиптическому. Как показано Бергманом, области, отображаемые на полуплоскость посредством сводимого гиперэллиптического интеграла (которые дальше коротко называем T-областями), лежат повсюду плотно, т. е. для всякой области B (рассматриваемого вида) и всякого $\varepsilon > 0$ можно найти близкую область T, длины сторон контура которой отличаются от длин сторон контура области B на величины ε_ν, $|\varepsilon_\nu| < \varepsilon$.[2]

Длины сторон контура области T выражаются как линейные комбинации модулей периодичности эллиптического интеграла (в известных случаях также двух или нескольких эллиптических интегралов). Обратно, если соотношения этого рода между длинами сторон контура T установлены, то можно исследовать форму преобразования, переводящего гиперэллиптический интеграл (отображающий H на T) в эллиптический, и (пользуясь таблицами эллиптических интегралов) определить также модуль k эллиптического интеграла. После этого легко определить также и точки разветвления гиперэллиптического интеграла. Таким образом, возникает задача установить достаточное для практических целей число типов сводимых гиперэллиптических интегралов и соответствующие этим типам соотношения между модулями периодичности.

Бергман указал один тип (T_1) таких интегралов.[3] В развитие этого метода мы даем в § 4 другой тип (T_2) сводимых гиперэллиптических интегралов (отображающих H на T-области).

Наш случай имеет место, если отношения противоположных сторон $AB:CD$, $BC:DE$ (фиг. 2, стр. 56) рациональны. Очевидно, что всякую угловую

---

[1] S. Bergmann, Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasentransformator, Z. A. M. M. 5, стр. 319—331, 1925.

[2] В этом смысле всякую полигональную область B можно апроксимировать через другую полигональную область, которая возникает из H через функцию, сводимую к эллиптическим интегралам.

Когда это обстоятельство может быть использовано для практического проведения отображения, за исключением случая угловой области, ближе не изучено.

Преимущество этого метода состоит в том, что отображающая функция приближенно выражается через эллиптические интегралы, для которых имеются таблицы.

[3] Бергман, уже цитированная работа.

область можно апроксимировать в вышеуказанном смысле уже через T-области этого вида. Однако для практических расчетов применимы пока только случаи, когда отношения сторон равны:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{DE}=\frac{1}{3},$$

так как в других случаях вычисления слишком громоздки.

После того как мы указали путь, посредством которого может быть разрешена существенная математическая трудность в задаче о кручении и изгибе стержней для случая полигонального сечения с прямыми углами, мы позволим себе кратко изложить здесь содержание работы.

В § 1 мы показываем, что $F(z)=U+iV$ непрерывна в замкнутой области B (трудность здесь состоит, очевидно, лишь в изучении поведения $F(z)$ в угловых точках z_ν полигона). Далее мы показываем, что из граничных условий и из непрерывности $F(z)$ в замкнутой области следует, что

$$\varphi(z)=F^{(\mu+1)}(z)$$

имеет вид:

$$\varphi(z)=\varphi^*(\zeta)=R(\zeta)\prod_{\nu=1}^{\nu=n}(\zeta-\zeta_\nu)^{-(\mu+1)\varkappa_\nu+1},$$

причем $R(\zeta)$ — полином с вещественными коэффициентами, степень которого не больше $\mu n-2\mu-2$. После этого остается определить коэффициенты полинома и постоянные, входящие при интегрировании в

$$F(z)=\underbrace{\int dz\int dz\ldots\int}_{\mu+1}\varphi(z)\,dz,$$

Из теорем существования следует, что линейные уравнения, получающиеся для определения этих величин, совместны.

В частном случае кручения, когда $P_\nu(s)=\frac{x^2+y^2}{2}$, можно, как показано в § **2**, **3**, доказать совместность этих уравнений непосредственным вычислением. Результаты § **2**, **3** интересны также в том отношении, что они могут быть использованы при практических вычислениях. В § **4** рассматривается вышеизложенный метод определения функции, отображающей H на B.

Наконец, в § **5** показывается, как результаты предыдущих параграфов могут быть применены к решению задачи об определении напряжений при изгибе стержня полигонального сечения.

§ 1. Об одном частном случае задачи Дирихле. Как известно, решение задачи кручения сводится к нахождению гармонической функции $\psi(x, y)$, удовлетворяющей на контуре области (сечения стержня) условию

$$\psi=\frac{x^2+y^2}{2}. \tag{1}$$

Аналогично (если задача кручения для стержня данного сечения решена) решение задачи изгиба поперечной силой сводится к определению гармонической функции $\chi'(x, y)$, удовлетворяющей контурному условию

$$\chi' = -\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{y^3}{3} - \sigma\frac{x^2 y}{2} + 2(1+\sigma)\int xy\,dx,^{1} \qquad (2)$$

где σ — коэффициент Пуассона.

В случае стержня полигонального сечения $\int xy\,dx$ по какой-либо стороне полигона, очевидно, выразится через полином третьей степени от x, y; таким образом, контурное условие для функции χ' примет вид:

$$\chi' = P_3(x, y),$$

где $P_3(x, y)$ — полином третьей степени, вообще различный для разных сторон полигона.

При этом в указанных задачах как функции ψ или χ', так и сопряженные им гармонические функции (которые просто связаны со смещениями)[2] предполагаются регулярными внутри области и непрерывными внутри области и на контуре.

Обе задачи представляют частные случаи следующей общей задачи.

Пусть в плоскости переменных x, y дана односвязная область B, ограниченная n-сторонним полигоном Γ. *Найти регулярную в B и непрерывную в $B + \Gamma$ гармоническую функцию $V(x, y)$, принимающую на ν-той стороне полигона заданные значения:*

$$V = P_{\mu_\nu}(x, y), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

где $P_{\mu_\nu}(x, y)$ полином степени μ_ν.

Конечно, предполагается, что контурные значения $P_{\mu_\nu}(x, y)$ непрерывны, т. е. что значения полиномов $P_{\mu_{\nu-1}}(x, y)$ и $P_{\mu_\nu}(x, y)$ в угловой точке (x_ν, y_ν) пересечения $\nu - 1$-й и ν-той сторон полигона Γ совпадают:

$$P_{\mu_{\nu-1}}(x_\nu, y_\nu) = P_{\mu_\nu}(x_\nu, y_\nu). \qquad (4)$$

Частный случай этой задачи, когда $P_{\mu_\nu}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ (случай кручения), был рассмотрен Треффцом.[3]

Полигональную область B, как известно, можно конформно отобразить на внутренность круга. При этом заданные на контуре области B непрерывные значения $P_{\mu_\nu}(x, y)$ перейдут в непрерывные значения на контуре круга. Но задача определения регулярной в круге гармонической функции, принимающей на контуре круга заданные непрерывные значения, имеет решение, и притом единственное (которое дается интегралом Пуассона). Отсюда следует,[4] что существует также единственная регулярная в B и непрерывная в $B + \Gamma$ гармоническая функ-

[1] Н. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости стр. 292, 311—313, 1933.

[2] См. предыдущую сноску.

[3] E. Trefftz, Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt, Math. Ann., 22, 1921.

[4] Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного, глава 6, § 4, 5, 1934.

ция $V(x, y)$, принимающая на контуре Γ области B заданные значения $P_{\mu_\nu}(x, y)$. Таким образом, если условия (4) выполнены, то поставленная задача имеет решение, и это решение единственное.

Приведенное общеизвестное рассуждение указывает одновременно общий метод решения задачи. Однако для эффективного решения рассматриваемой задачи целесообразнее итти другим путем.

Для дальнейшего важно иметь в виду, что функция $V(x, y)$, являющаяся решением задачи, не только непрерывна, но и регулярна в точках контура Γ, за исключением, может быть, угловых точек.

Это непосредственно следует из теорем об аналитическом продолжении гармонической функции через дугу аналитической кривой,[1] если заметить еще, что каждая сторона полигона Γ является дугой аналитической кривой и что значения $P_{\mu_\nu}(x, y)$, принимаемые функцией $V(x, y)$ на ν-той стороне полигона Γ, являются для каждой стороны аналитическими функциями от длины s дуги контура Γ.

Введем в рассмотрение аналитическую функцию комплексного переменного $z = x + iy$:

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \tag{5}$$

мнимая часть которой равна $V(x, y)$ (если $V(x, y)$ известна, то функция $F(z)$ определяется по условиям Коши-Риманна с точностью до произвольной вещественной постоянной).

Из регулярности $V(x, y)$ в B и не угловых точках Γ следует, что $F(z)$ также регулярна в B и на контуре Γ, за исключением, может быть, угловых точек контура. Таким образом, особыми точками $F(z)$ могут являться только угловые точки Γ. Далее легко видеть, что угловая точка $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ не может быть ни полюсом ни простой логарифмической точкой,[2] ибо тогда предельные значения, к которым стремится $V(x, y)$ при приближении точки z к контуру, не были бы непрерывны в точке z_ν.

Наконец, можно показать, что *точка z_ν не может быть существенно особой точкой для $F(z)$.*

Рассмотрим для этого функцию

$$\Phi(z) = F(z) - f_\nu(z) = F(z) - \chi_\nu^{(1)}(z) - \chi_\nu^{(2)}(z)\log(z - z_\nu),$$

где $\chi_\nu^{(1)}$, $\chi_\nu^{(2)}$ — полиномы от z, и определим коэффициенты полиномов $\chi_\nu^{(1)}(z)$, $\chi_\nu^{(2)}(z)$ так, чтобы мнимая часть $f_\nu(z)$ принимала вдоль ν-той и соответственно $\nu - 1$-й сторон полигона Γ значения, равные значениям $P_{\mu_\nu}(x, y)$ и $P_{\mu_{\nu-1}}(x, y)$.

Легко видеть, что этому условию можно всегда удовлетворить. В самом деле, пусть ϑ_ν — угол, который образует ν-тая сторона полигона с осью X (фиг. 1), s — длина дуги контура, отсчитываемая от точки z_ν, и m — наибольшее из чисел $\mu_{\nu-1}$, μ_ν. Тогда на ν-той стороне полигона

$$x = x_\nu + s\cos\vartheta_\nu,\quad y = y_\nu + s\sin\vartheta_\nu$$

и, следовательно,

$$P_{\mu_\nu}(x, y) = \beta_\nu^{(0)} s^m + \beta_\nu^{(1)} s^{m-1} + \ldots + \beta_\nu^{(m)}.$$

[1] Гурса, Курс мат. анализа, т. III, ч. I, стр. 164, 1933.

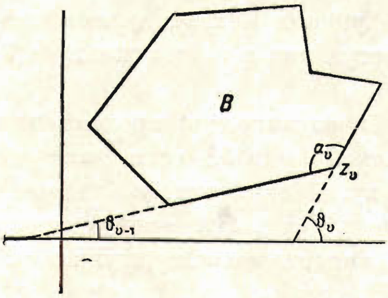
[2] Где функция ведет себя, как $\log(z - z_\nu)$.

Аналогично на $\nu-1$-й стороне:

$$P_{\mu_{\nu-1}}(x, y) = \beta_{\nu-1}^{(0)} s^m + \beta_{\nu-1}^{(1)} s^{m-1} + \ldots + \beta_{\nu-1}^{(m)},$$

причем $\beta_\nu^{(m)} = \beta_{\nu-1}^{(m)}$.

Пусть, наконец, α_ν — угол полигона в точке z_ν.



Фиг. 1.

Необходимо рассмотреть два случая.

Если ни одно из чисел $\frac{r\alpha_\nu}{\pi}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, m$ не является целым числом, то существует единственная функция $f_\nu(z)$, которая удовлетворяет поставленным условиям, именно:

$$f_\nu(z) = -\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\begin{vmatrix} \beta_\nu^{(m-k)} & e^{-ik\vartheta_\nu} \\ \beta_{\nu-1}^{(m-k)} & e^{-ik(\vartheta_\nu+\alpha_\nu)} \end{vmatrix}}{\sin k\alpha_\nu}(z-z_\nu)^k + \beta_\nu^{(m)}.$$

Если же $\frac{\alpha_\nu}{\pi} = \frac{p}{q}$, где p, q — взаимно простые целые числа, и $q \leqslant m$, то можно принять:

$$f_\nu(z) = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \rho q}}^{k=m} \frac{\begin{vmatrix} \beta_\nu^{(m-k)} & e^{-ik\vartheta_\nu} \\ \beta_{\nu-1}^{(m-k)} & e^{-ik(\vartheta_\nu+\alpha_\nu)} \end{vmatrix}}{\sin k\alpha_\nu}(z-z_\nu)^k + \beta_\nu^{(m)} +$$

$$+ i\sum_{\rho=1}^{\rho=\rho_m}\left[\frac{\vartheta_\nu+\alpha_\nu}{\alpha_\nu} e^{-i\rho q\vartheta_\nu}\beta_\nu^{(m-\rho q)} - \frac{\vartheta_\nu}{\alpha_\nu} e^{-i\rho q(\vartheta_\nu+\alpha_\nu)}\beta_{\nu-1}^{(m-\rho q)}\right](z-z_\nu)^{\rho q} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_\nu}\log(z-z_\nu)\sum_{\rho=1}^{\rho=\rho_m}\left[e^{-i\rho q(\vartheta_\nu+\alpha_\nu)}\beta_{\nu-1}^{(m-\rho q)} - e^{-i\rho q\vartheta_\nu}\beta_\nu^{(m-\rho q)}\right](z-z_\nu)^{\rho q},$$

причем

$$\rho_m q \leqslant m < (\rho_m + 1) q,$$

и для логарифма следует взять ту ветвь, мнимая часть которой на ν-той стороне полигона равна $i\vartheta_\nu$.

Пусть при отображении полигона на верхнюю полуплоскость плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ точки z_ν переходят в точки ζ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) вещественной оси плоскости. Как известно, отображающая функция $z(\zeta)$ (см. 13) регулярна во всех точках плоскости ζ, кроме точек ζ_ν, которые являются точками разветвления функции $z(\zeta)$. Поэтому функция $\Phi[z(\zeta)]$ регулярна в точках верхней полуплоскости и на вещественной оси плоскости ζ, за исключением, может быть, точек ζ_ν. По построению она принимает на отрезках $(\zeta_{\nu-1}, \zeta_\nu)$ и $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$ вещественные значения. Отсюда, по принципу симметрии функция $\overline{\Phi} = \overline{\Phi[z(\zeta)]}$, регулярная в нижней полуплоскости, является аналитическим продолжением функции $\Phi[z(\zeta)]$ через отрезки $(\zeta_{\nu-1}, \zeta_\nu)$ и $(\zeta_\nu, \zeta_{\nu+1})$, и определенная таким образом во всей плоскости ζ функция $\Phi[z(\zeta)]$ однозначна в окрестности ζ_ν.

Если теперь z_ν — существенно особая точка $\Phi(z)$, то ζ_ν — существенно особая точка $\Phi[z(\zeta)]$, очевидно, изолированная. По теореме Вейерштрасса в сколь угодно малой окрестности точки ζ_ν функция $\Phi[z(\zeta)]$ принимает значения, сколь угодно близкие к любым наперед заданным значениям α, $\overline{\alpha}$, и по симметрии в сколь угодно малой окрестности ζ_ν в верхней полуплоскости Φ принимает значения, сколь угодно близкие к одному из значений α, $\overline{\alpha}$. Отсюда следует, что $\Phi[z(\zeta)]$ и $F[z(\zeta)]$, а следовательно и мнимая часть $\mathbf{I}[F(z)]$ функции $F(z)$ не стремятся к определенным предельным значениям, когда $z(\zeta)$ стремится к z_ν изнутри области B. Но это противоречит предположению, что $V(x, y)$ принимает на всем контуре Γ заданные непрерывные значения.

Из условия непрерывности $V(x, y)$ на контуре полигона вытекает также, что точки z_ν могут быть только такими точками разветвления, для которых $F(z)$ остается непрерывной в этих точках.

Итак, угловые точки контура Γ могут быть или регулярными точками или точками разветвления для функции $F(z)$, и в этих точках (а следовательно, вообще на контуре) функция $F(z)$ непрерывна.

Из сказанного следует, что поставленная задача эквивалентна следующей задаче (имеющей, если не учитывать различия на произвольную вещественную постоянную, единственное решение):

Найти регулярную в B и непрерывную в $B + \Gamma$ аналитическую функцию $F(z)$, мнимая часть $V(x, y)$ которой удовлетворяет на ν-той стороне полигона Γ контурному условию

$$V = \mathbf{I}[F(z)] = P_{\mu_\nu}(x, y) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{3}$$

Пусть μ — наибольшее из чисел μ_ν. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда все полиномы P_{μ_ν} имеют одинаковую степень μ, ибо можно всегда возвратиться от этого случая к общему, полагая соответствующие коэффициенты полиномов равными нулю.

Пусть теперь s — длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой точки его. Тогда на ν-той стороне полигона

$$x = s\cos\vartheta_\nu + \text{const}, \quad y = s\sin\vartheta_\nu + \text{const} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$V = \mathbf{I}[F(z)] = b_\nu^{(0)} s^\mu + b_\nu^{(1)} s^{\mu-1} + \ldots + b_\nu^{(\mu)} \equiv Q_\nu(s), \tag{7}$$

причем в точке $z_\nu (s = s_\nu)$

$$Q_{\nu-1}(s_\nu) = Q_\nu(s_\nu). \tag{8}$$

Из (7) следует, что $\mu+1$-я производная от V равна нулю. С другой стороны, так как на ν-той стороне полигона Γ

$$dz = e^{i\vartheta_\nu} ds, \tag{9}$$

то

$$\frac{d^{\mu+1} V}{ds^{\mu+1}} = \frac{d^{\mu+1}}{ds^{\mu+1}} \mathbf{I}[F(z)] = \mathbf{I}\left[\frac{d^{\mu+1}}{ds^{\mu+1}} F(z)\right] = \mathbf{I}\left[e^{i(\mu+1)\vartheta_\nu} \frac{d^{\mu+1} F}{dz^{\mu+1}}\right]. \tag{10}$$

Таким образом, $\mu+1$-я производная функции $F(z)$

$$\varphi(z)=\frac{d^{\mu+1} F}{dz^{\mu+1}} \tag{11}$$

должна удовлетворять на ν-той стороне полигона условию

$$\mathbf{I}\left[e^{i(\mu+1)\vartheta_\nu}\varphi(z)\right]=0. \tag{12}$$

Иначе говоря, аргумент функции $\varphi(z)$ должен равняться на ν-той стороне $m_\nu\pi-(\mu+1)\vartheta_\nu$ и при переходе через угловую точку z_ν изменяться на $(m_\nu-m_{\nu-1})\pi-(\mu+1)(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1})$ (m_ν — целые числа).

Из этого условия легко найти вид функции $\varphi(z)$, если предварительно отобразить полигональную область B на верхнюю полуплоскость плоскости вспомогательной переменной $\zeta=\xi+i\eta$.

Пусть

$$\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3<\ldots<\zeta_n$$

точки вещественной оси плоскости ζ, соответствующие угловым точкам z_1, z_2, $z_3, \ldots z_n$ полигона Γ. Отображение дается, как известно, формулой Шварца-Кристоффеля:

$$z=Ne^{\vartheta_n i}\int(\zeta-\zeta_1)^{\varkappa_1-1}(\zeta-\zeta_2)^{\varkappa_2-1}\ldots(\zeta-\zeta_n)^{\varkappa_n-1}\,d\zeta, \tag{13}$$

где N — вещественная постоянная, и

$$\alpha_\nu=\varkappa_\nu\pi=\pi-(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1}) \tag{14}$$

угол полигона в точке z_ν.

В новой переменной легко построить функцию, удовлетворяющую условиям (12). Действительно, так как аргумент выражения

$$(\zeta-\zeta_\nu)^{\frac{\mu+1}{\pi}(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1})}$$

при переходе через точку ζ_ν изменяется на $-(\mu+1)(\vartheta_\nu-\delta_{\nu-1})$, то такой функцией является произведение:

$$\Omega(\zeta)=e^{-(\mu+1)\vartheta_n i}(\zeta-\zeta_1)^{(\mu+1)\frac{\vartheta_1-\vartheta_n}{\pi}}(\zeta-\zeta_2)^{(\mu+1)\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\pi}}\ldots(\zeta-\zeta_n)^{(\mu+1)\frac{\vartheta_n-\vartheta_{n-1}}{\pi}} \tag{15}$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\varphi^*(\zeta)}{\Omega(\zeta)}=Q(\zeta), \tag{16}$$

где

$$\varphi^*(\zeta)=\varphi[z(\zeta)].$$

Так как

$$\operatorname{arc} Q(\zeta)=\operatorname{arc}\varphi^*(\zeta)-\operatorname{arc}\Omega(\zeta)$$

на вещественной оси плоскости ζ равен $k\pi$ (k — целое число), то $Q(\zeta)$ вещественно на вещественной оси плоскости ζ.

Исследуем, какие особенности может иметь $Q(\zeta)$.

Как было выше показано, функция $F(z)$ регулярна во всех точках $B+\Gamma$, отличных от z_ν, и точки z_ν не являются существенно особыми точками $F(z)$. Теми же свойствами обладает, следовательно, и функция $\varphi(z)$, как производная $F(z)$. Так как, далее, функция $z(\zeta)$ регулярна во всех точках верхней полуплоскости ζ, отличных от ζ_ν (которые являются точками разветвления для $z(\zeta)$), то функция $\varphi^*(\zeta)=\varphi[z(\zeta)]$ также регулярна во всех точках полуплоскости, отличных от ζ_ν.

По принципу симметрии отсюда следует, что

$$Q(\zeta)=\frac{\varphi^*(\zeta)}{\Omega(\zeta)}$$

регулярна во всех точках плоскости ζ, отличных от ζ_ν и ∞ $\left(\text{точка } \infty \text{ может быть особой для } \frac{1}{\Omega(\zeta)}\right)$, причем эти точки не являются существенно особыми для $Q(\zeta)$. Очевидно также, что точки ζ_ν и ∞ не могут быть точками разветвления $Q(\zeta)$, ибо в таком случае $Q(\zeta)$ не могло бы быть вещественным на всей вещественной оси плоскости ζ. Таким образом, точки ζ_ν и ∞ могут быть только полюсами $Q(\zeta)$, т. е. $Q(\zeta)$ — рациональная функция:

$$Q(\zeta)=\frac{R(\zeta)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}(\zeta-\zeta_\nu)^{p_\nu}}, \tag{17}$$

где p_ν — целые числа и $R(\zeta)$ — полином от ζ с вещественными коэффициентами, относительно которого пока можем считать, что он не имеет точки ζ_ν нулями.

Из формул (15), (16), (17), замечая еще, что по (14) $(\mu+1)\frac{\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1}}{\pi}$ отличается от $-(\mu+1)\varkappa_\nu$ на целое число, получим окончательно для $\varphi^*(\zeta)$ выражение

$$\varphi(z)=\varphi^*(\zeta)=R(\zeta)\,e^{-(\mu+1)\vartheta_n i}\prod_{\nu=1}^{\nu=n}(\zeta-\zeta_\nu)^{-(\mu+1)\varkappa_\nu+k_\nu}, \tag{18}$$

где k_ν — целые числа.

Остается выяснить, какие ограничения должны быть наложены на степень полинома $R(\zeta)$ и на числа k_ν, чтобы функция $F(z)$ была непрерывна в $B+\Gamma$.

Потребуем прежде всего, чтобы функция $F(z)$ была ограничена в точках ζ_ν. Так как в окрестности ζ_ν

$$\frac{d^{\mu+1}F}{dz^{\mu+1}}=\varphi(z)=c'(\zeta-\zeta_\nu)^{k_\nu-(\mu+1)\varkappa_\nu}[1+c_1(\zeta-\zeta_\nu)+\ldots]$$

и

$$(z-z_\nu)=c''(\zeta-\zeta_\nu)^{\varkappa_\nu}[1+d_1(\zeta-\zeta_\nu)+\ldots],$$

то (если $k_\nu-r\varkappa_\nu-1\neq-1$ ни при каком целом $r\geqslant1$)

$$F(z)=\underbrace{\int dz\int dz\ldots\int}_{\mu+1}\varphi(z)\,dz=$$

$$=c'''\int(\zeta-\zeta_\nu)^{\varkappa_\nu-1}d\zeta\int(\zeta-\zeta_\nu)^{\varkappa_\nu-1}d\zeta\ldots\int(\zeta-\zeta_\nu)^{k_\nu-(\mu+1)\varkappa_\nu}(\zeta-\zeta_\nu)^{\varkappa_\nu-1}d\zeta+\ldots$$

или

$$F(z)=c\int(\zeta-\zeta_\nu)^{k_\nu-1}d\zeta+\ldots=\begin{array}{ll}c\log(\zeta-\zeta_\nu)+\ldots & \text{при } k_\nu=0.\\ c_1(\zeta-\zeta_\nu)^{k_\nu}+\ldots & \text{при } k_\nu\neq0.\end{array}$$

Отсюда следует, что для ограниченности функции $F(z)$ в точках z_ν необходимо:

$$k_\nu \geqslant 1.$$

(Если же при некоторых $r \geqslant 1$ $k_\nu - r\varkappa_\nu - 1 = -1$, то $r\varkappa_\nu$ должно быть целым числом, не меньшим единицы, и опять $k_\nu = r\varkappa_\nu \geqslant 1$.)

Включая теперь, в том случае, если $k_\nu > 1$, члены вида $(\zeta - \zeta_\nu)^{k_\nu - 1}$ в полином $R(\zeta)$, можем представить (18) в виде:

$$\varphi(z) = R(\zeta)\, e^{-(\mu+1)\vartheta_n i} \prod_{\nu=1}^{n} (\zeta - \zeta_\nu)^{1-(\mu+1)\varkappa_\nu}. \tag{19}$$

Потребуем, наконец, чтобы $F(z)$ была ограничена в точках $B + \Gamma$, отличных от z_ν. Так как $\frac{dz}{d\zeta}$ при $z \neq \zeta_\nu$ регулярна, то достаточно потребовать, чтобы при $\zeta \neq \zeta_\nu$ была ограничена функция $\varphi(z) = \frac{d^{\mu+1} F}{dz^{\mu+1}}$. При $\zeta < \infty$ $\varphi(z)$ регулярна. В окрестности же точки ∞ по (18) имеем:

$$\varphi(z) = c\zeta^{m-(\mu+1)\sum\limits_{\nu=1}^{n} \varkappa + n} \left[1 + \frac{c_1}{\zeta} + \cdots \right],$$

где m — степень полинома $R(\zeta)$. Следовательно, $\varphi(z)$ будет ограничена при $\zeta = \infty$, если будет:

$$m - (\mu + 1) \sum_{\nu=1}^{n} \varkappa_\nu + n \leqslant 0.$$

Отсюда, замечая еще, что $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \varkappa_\nu = n - 2$, имеем:

$$m \leqslant \mu n - 2\mu - 2. \tag{20}$$

Итак, наибольшая возможная степень полинома $R(\zeta)$ равна $\mu n - 2\mu - 2$ и можно положить:

$$R(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{\mu n - 2\mu - 2}\zeta^{\mu n - 2\mu - 2} \tag{21}$$

Интегрируя $\varphi(z)$ по z $\mu + 1$ раз, найдем $F(z)$. Так как при каждом интегрировании входят две произвольные постоянные (комплексная постоянная интегрирования), то в результате решение будет зависеть от $\mu n + 1$ произвольных постоянных. Это дает возможность удовлетворить контурным условиям (4) или (7).

В самом деле, так как по (9) при интегрировании по ν-той стороне

$$\int \mathbf{I}[f(z)]\, ds = \mathbf{I}\left[e^{-i\vartheta_\nu} \int f(z)\, dz \right],$$

то интегрируя (по ν-той стороне) уравнение (12), которому построенная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет, $\mu + 1$ раз, найдем:

$$\mathbf{I}[F(z)] = B_\nu^{(0)} s^\mu + B_\nu^{(1)} s^{\mu-1} + \ldots + B_\nu^{(\mu)}.$$

Итак, мнимая часть $F(z)$ будет выражаться на Γ как раз в требуемом виде. Коэффициенты $B_\nu^{(r)}$ будут, очевидно, линейными функциями $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu n-2\mu-2}$ и $2\mu-1$ постоянных интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_{2\mu-1}$ (не 2μ, ибо вещественная часть произвольной постоянной последнего интегрирования не войдет в $\mathbf{I}\,[F(z)]$), т. е. $B_\nu^{(r)}$, будут зависеть от μn постоянных решения. Для удовлетворения условий (7) необходимо потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$B_\nu^{(r)}(a_0, a_1, \ldots, a_{\mu n-2\mu-2};\ c_1, c_2, \ldots, c_{2\mu-1}) = b_\nu^{(r)} \begin{cases} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ r = 0, 1, \ldots, \mu. \end{cases} \tag{22}$$

Эти соотношения дают $(\mu+1)\,n$ (линейных) уравнений для определения μn постоянных a_s, c_k. Но n из этих уравнений являются следствиями остальных. Действительно, коэффициенты $b_\nu^{(r)}$ удовлетворяют условиям (8), выражающим непрерывность контурных заданий. Эти условия дают возможность определить n из этих коэффициентов, например, $b_\nu^{(\mu)}$ через остальные, и, следовательно, могут быть записаны в виде:

$$b_\nu^{(\mu)} = \Phi_\nu(b_p^{(q)}), \quad (p = 1, 2, \ldots, n;\ q = 0, 1, \ldots, \mu-1).$$

С другой стороны, определенная нами функция $F(z)$, как показано выше, непрерывна в $B+\Gamma$, и, следовательно, ее мнимая часть непрерывна на Γ. Но это означает, что между $B_\nu^{(r)}$ выполняются те же самые соотношения:

$$B_\nu^{(\mu)} = \Phi_\nu(B_p^{(q)}).$$

Но в таком случае n из уравнений (22):

$$B_\nu^{(\mu)} = b_\nu^{(\mu)}, \ (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

являются следствиями остальных, ибо, если

$$B_p^{(q)} = b_p^{(q)}, \ (p = 1, 2, \ldots, n;\ q = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1), \tag{22$_1$}$$

то

$$B_\nu^{(\mu)} = \Phi_\nu(B_p^{(q)}) = \Phi_\nu(b_p^{(q)}) = b_\nu^{(\mu)}.$$

Итак, среди уравнений (22) не больше μn независимых.

Эти μn уравнений определяют константы a_s, c_k, если только они независимы.

Непосредственно доказать независимость уравнений (22_1), повидимому, трудно. Ниже мы приводим такое доказательство для одного частного случая. Однако из вышеизложенного уже следует, что эти уравнения должны быть *независимы*. В самом деле, так как выше было показано, что *поставленная задача имеет решение и это решение единственно, и что функция $\varphi(z)$ должна иметь вид* (19), *то отсюда следует, что константы a_s, c_k должны определяться, и притом определяться единственным образом.*

Конечно, в конкретной задаче не обязательно определять константы именно этим путем, из уравнений (22).

Заметим в заключение, что μ-тая производная от $F(z)$ выражается по (12) и (19) интегралом

$$\frac{d^\mu F}{dz^\mu} = \int \varphi(z)\,dz = Ne^{-\mu\vartheta_n i} \int \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\zeta - \zeta_\nu)^{\mu \varkappa_\nu}} + c_1 + ic_2. \tag{23}$$

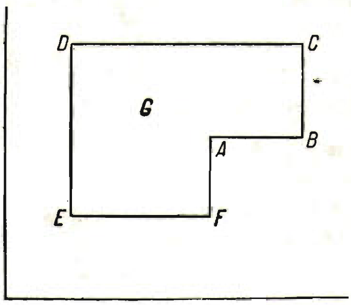
§ 2. О кручении стержня углового сечения. В частности, из (22) имеем для случая кручения формулу:

$$\frac{d^2F}{dz^2} = S + iT = e^{-2\vartheta_n i}\int \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\zeta_1)^{2\varkappa_1}(\zeta-\zeta_2)^{2\varkappa_2}\dots(\zeta-\zeta_n)^{2\varkappa_n}}, \tag{23'}$$

причем степень полинома $R(\zeta)$ не больше $2n-6$. Роль функции $F(z)$ здесь играет комплексный потенциал кручения:

$$F(z) = \varphi + i\psi.$$

Треффц,[1] Шмиден[2] решили указанным методом несколько простейших задач, именно, случаи углового, T-образного, коробчатого сечений с бесконечными сторонами. Мы хотим рассмотреть здесь следующий по сложности случай стержня углового сечения (с конечными сторонами).



Фиг. 2.

Пусть при конформном отображении полигона G (фиг. 2) на верхнюю полуплоскость ζ точкам $B(z_1)$, $C(z_2)$, $D(z_3)$, $E(z_4)$, $F(z_5)$, $A(z_0)$ соответствуют на вещественной оси плоскости ζ точки $e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5 < e_0$. Если расположить полигон так, чтобы сторона AB была параллельна оси X, то отображение полигона по (13) производится функцией:

$$Z = N\int \frac{(\zeta - e_0)\,d\zeta}{u}, \tag{24}$$

$$u = \sqrt{(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)\dots(\zeta-e_5)(\zeta-e_0)}. \tag{25}$$

Вторая производная функции кручения по (23) выразится:

$$F''(z) = S + iT = \int \frac{a_0 + a_1\zeta + \dots + a_6\zeta^6}{(\zeta-e_0)^3(\zeta-e_1)\dots(\zeta-e_5)}\,d\zeta + \beta_1 + i\beta_1',$$

или

$$S + iT = \sum_{k=0}^{k=5} \alpha_k \log(\zeta - e_k) + \beta_1 + i\beta_1' + \frac{\beta_2}{\zeta - e_0} + \frac{\beta_3}{(\zeta-e_0)^2},$$

(где α_k, β_2, β_3 — константы, зависящие от $a_0, a_1, \dots, a_6$), причем, так как под интегралом степень числителя была на 2 меньше степени знаменателя,

$$\sum_{k=0}^{k=5} \alpha_k = 0.$$

Для определения констант заметим, что, дифференцируя два раза по s контурное условие (7), которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\mathbf{I}[F(z)] = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}s^2 + b_\nu^{(1)}s + b_\nu^{(2)}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots, 6),$$

получим:

$$\mathbf{I}[e^{2i\vartheta_\nu}(S+iT)] = 1. \tag{26}$$

---

[1] См. уже цитированную работу Треффца.

[2] C. Schmieden, Über die Torsion von Walzeisen-Profilen, Z. A. M. M., 10, S. 251, 1930.

Так как ϑ_ν равно $k\pi$ для горизонтальных и $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ для вертикальных сторон полигона, то в раскрытом виде эти условия имеют вид: $T=+1$ на горизонтальных сторонах, т. е. для интервалов $(e_0-\infty-e_1)$, $(e_2 e_3)$, $(e_1 e_5)$; $T=-1$ на вертикальных сторонах, т. е. для интервалов $(e_1 e_2)$, $(e_3 e_4)$, $(e_5 e_0)$.

Эти условия определяют константы α_k и β_1':

$$\alpha_k=(-1)^k \frac{2}{\pi}, \quad \beta_1'=1.$$

Следовательно,

$$S+iT=-\frac{2}{\pi}\log\sigma(\zeta)+i+\beta_1+\frac{\beta_2}{\zeta-e_0}+\frac{\beta_3}{(\zeta-e_0)^2}, \tag{27}$$

где

$$\sigma(\zeta)=\frac{(\zeta-e_0)(\zeta-e_2)(\zeta-e_4)}{(\zeta-e_1)(\zeta-e_3)(\zeta-e_5)}. \tag{28}$$

Для определения константы β_k воспользуемся известным обстоятельством, что на горизонтальных сторонах обращается в нуль компонент напряжения τ_{yz}, а на вертикальных — τ_{xz}.[1]

Напряжения выражаются через комплексную функцию кручения так:

$$\tau_{xz}-i\tau_{yz}=G\vartheta\left[\frac{dF}{dz}-i\bar{z}\right],^{2} \tag{29}$$

где G — модуль сдвига, ϑ — угол закручивания на единицу длины.

Так как функция

$$\frac{dF}{dz}=\int(S+iT)\,dz,$$

как легко проверить, непрерывна в выходящих вершинах полигона (т. е. при $\zeta=e_1, e_2, \ldots, e_5$), то из условий:

$$\tau_{yz}=0$$

на горизонтальных сторонах и

$$\tau_{xz}=0$$

на вертикальных, следует, что в точках пересечения сторон $z=z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$

$$[\tau_{xz}-i\tau_{yz}]_{z=z_\nu}=0, \qquad (\nu=1, 2, \ldots, 5). \tag{30}$$

Поэтому и подавно:

$$[\tau_{xz}-i\tau_{yz}]_{z=z_{\nu+1}}-[\tau_{xz}-i\tau_{yz}]_{z=z_\nu}=\int\limits_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}(S+iT)\,dz-i(\bar{z}_{\nu+1}-\bar{z}_\nu)=0, \quad (\nu=1, 2, 3, 4).$$

Замечая, что на основании условия (26)

$$i\int\limits_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}T\,dz-i(\bar{z}_{\nu+1}-\bar{z}_\nu)=0,$$

имеем окончательно четыре уравнения:

$$\int\limits_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}S\,dz=0, \qquad (\nu=1, 2, 3, 4). \tag{31}$$

---

[1] См. уже цитированную книгу Мусхелишвили, стр. 286.

[2] Там же, стр. 294.

Если подставить сюда

$$S = -\frac{2}{\pi}\log|\sigma(\zeta)| + \beta_1 + \frac{\beta_2}{\zeta - e_0} + \frac{\beta_3}{(\zeta - e_0)^2}$$

и

$$dz = N\frac{\zeta - e_0}{u}\,d\zeta,$$

то в раскрытом виде эти уравнения запишутся так:

$$\frac{2}{\pi}\int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}}\log|\sigma|\frac{\zeta - e_0}{u}\,d\zeta = \beta_1\int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}}\frac{\zeta - e_0}{u}\,d\zeta + \beta_2\int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}}\frac{d\zeta}{u} + \beta_3\int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}}\frac{d\zeta}{(\zeta - e_0)u}. \tag{32}$$

Таким образом, имеем для определения трех констант четыре уравнения. Докажем совместность их.

§ 3. Доказательство совместности уравнений для определения констант. Построим прежде всего Риманнову поверхность, на которой функции, входящие под интегралы в уравнения (32), были бы однозначны.

Функции:

$$(\zeta - e_0)^p\frac{1}{u}, \quad (p \text{ — целое число}),$$

однозначны на двулистной поверхности Риманна, листы которой соединены вдоль отрезков $(e_1 e_2)$, $(e_3 e_4)$, $(e_5 e_0)$. Но функция

$$\log\sigma\frac{\zeta - e_0}{u}$$

на такой поверхности еще не однозначна, так как, например, при обходе вокруг точки e_ν по замкнутой кривой $\log\sigma$ изменяется на $4\pi i$. Однако при обходе по контуру, заключающему внутри две точки e_ν, $e_{\nu+1}$, $\log\sigma$, как видно из (28), возвращается в точку, от которой обход был начат, с прежним значением. Поэтому, если выделить точки e_ν попарно купюрами γ_1, γ_2, γ_3 (фиг. 3), то на рассматриваемой поверхности Риманна с такими купюрами функция $\log\sigma\frac{\zeta - e_0}{u}$ также будет однозначна.

Наконец, проведем еще известным образом купюры a_1, a_2, b_1, b_2 так, чтобы после этого поверхность Риманна стала односвязной.[1]

Рассмотрим на поверхности Риманна, построенной таким образом, интегралы:

$$w_1 = \int_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u}\frac{(\zeta - e_0)\,d\zeta}{u}, \quad w_2 = \int_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u}\frac{d\zeta}{u}, \quad w_3 = \int_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u}\frac{d\zeta}{(\zeta - e_0)u},$$
$$w_4 = \int_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u}\frac{d\zeta}{(\zeta - e_0)^2 u}, \quad Q = \int_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u}\log\sigma\frac{\zeta - e_0}{u}\,d\zeta \tag{33}$$

(ζ_a, u_a — некоторая точка поверхности).

---

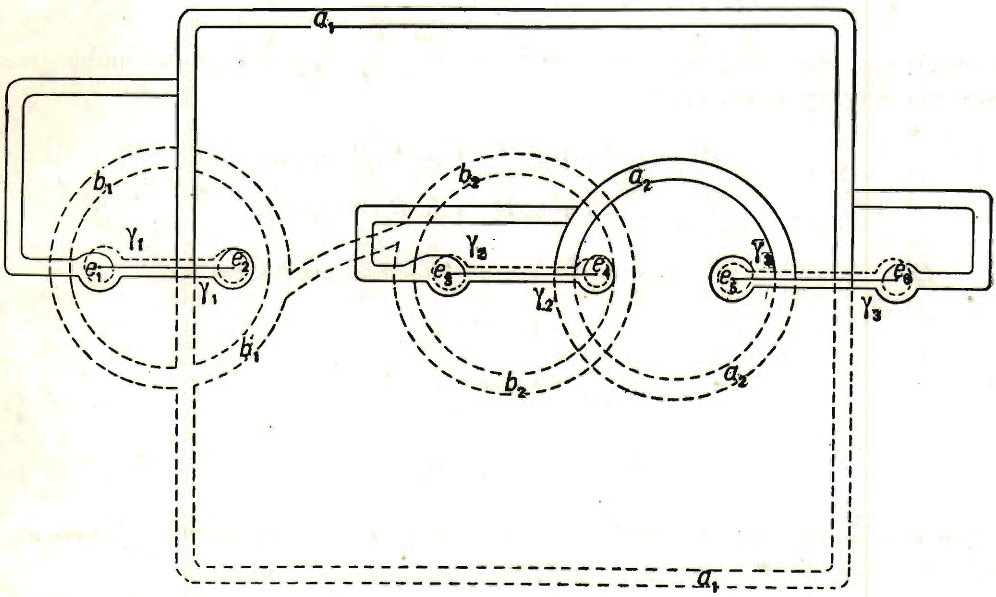
[1] P. Appell et E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, стр. 121. Paris, 1895. В дальнейшем цитируется сокращенно: A. G.

Обозначим модули периодичности интеграла w_k через A_{k1}, A_{k2}, B_{k1}, B_{k2},[1] модули периодичности интеграла Q через $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}'_2$. Как известно, A_{kl} или соответственно B_{kl} равно интегралу $\int dw_k$, распространенному по внутреннему краю купюры b_l или соответственно по внешнему краю купюры a_l:

$$A_{kl} = \int\limits_{b_l \,\mathrm{int}} dw_k, \quad B_{kl} = \int\limits_{a_l \,\mathrm{ext}} dw_k. \tag{34}$$

Аналогично

$$\mathfrak{A}'_l = \int\limits_{b_l \,\mathrm{int}} dQ, \quad \mathfrak{B}'_l = \int\limits_{a_l \,\mathrm{ext}} dQ. \tag{35}$$



Фиг. 3.

Но эти интегралы могут быть выражены через интегралы по отрезкам $(e_\nu, e_{\nu+1})$, именно:

$$\begin{gathered} A_{k1} = 2\int\limits_{e_1}^{e_2} dw_k, \quad A_{k2} = 2\int\limits_{e_3}^{e_4} dw_k, \\ B_{k1} = 2\int\limits_{e_2}^{e_3} dw_k + 2\int\limits_{e_4}^{e_5} dw_k, \quad B_{k2} = 2\int\limits_{e_4}^{e_5} dw_k \end{gathered} \tag{36}$$

и аналогично

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}'_1 = 2\int\limits_{e_1}^{e_2} dQ, \quad \mathfrak{A}'_2 = 2\int\limits_{e_3}^{e_4} dQ, \\ \mathfrak{B}'_1 = 2\int\limits_{e_2}^{e_3} dQ + 2\int\limits_{e_4}^{e_5} dQ, \quad \mathfrak{B}'_2 = 2\int\limits_{e_4}^{e_5} dQ. \end{gathered} \tag{37}$$

[1] A. G., стр. 135.

Следовательно, уравнения (32) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_l &= \beta_1 A_{1l} + \beta_2 A_{2l} + \beta_3 A_{3l},\\ \mathfrak{B}_l &= \beta_1 B_{1l} + \beta_2 B_{2l} + \beta_3 B_{3l},\end{aligned} \qquad l=1,\ 2 \tag{38}$$

где

$$\mathfrak{A}_1 = 2\int_{e_1}^{e_2} \log|\sigma| \frac{(\zeta-e_0)\,d\zeta}{u}, \qquad \mathfrak{A}_2 = 2\int_{e_3}^{e_4} \log|\sigma| \frac{(\zeta-e_0)\,d\zeta}{u}$$

$$\mathfrak{B}_1 = 2\int_{e_2}^{e_3} \log|\sigma| \frac{(\zeta-e_0)\,d\zeta}{u} + 2\int_{e_4}^{e_5} \log|\sigma| \frac{(\zeta-e_0)\,d\zeta}{u}, \qquad \mathfrak{B}_2 = 2\int_{e_4}^{e_5} \log|\sigma| \frac{(\zeta-e_0)\,d\zeta}{u}. \tag{39}$$

Для доказательства совместности уравнений (38) рассмотрим вспомогательную систему уравнений:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_l &= \beta_1 A_{1l} + \beta_2 A_{2l} + \beta_3 A_{3l} + \beta_4 A_{4l},\\ \mathfrak{B}_l &= \beta_1 B_{1l} + \beta_2 B_{2l} + \beta_3 B_{3l} + \beta_4 B_{4l}.\end{aligned} \qquad l=1,\ 2 \tag{40}$$

Если будет доказано, что, во-первых, определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}\\ B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42}\end{vmatrix} \tag{41}$$

не равен нулю, т. е. что уравнения системы совместны, и во-вторых, что β_4 *равна нулю, то тем самым будет доказана совместность уравнений* (38) *или* (32).

Для доказательства первого предложения введем в рассмотрение нормальные интегралы первого рода:[1]

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= \frac{2\pi i A_{22}}{A} w_1 - \frac{2\pi i A_{12}}{A} w_2,\\ w^{(2)} &= -\frac{2\pi i A_{21}}{A} w_1 + \frac{2\pi i A_{11}}{A} w_2,\end{aligned} \qquad A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{vmatrix} \neq 0\,[2] \tag{42}$$

и второго рода:[3]

$$\begin{aligned} w^{(3)} &= w_3 - \frac{A_{31}}{2\pi i} w^{(1)} - \frac{A_{32}}{2\pi i} w^{(2)} = w_3 + \frac{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{31}\\ A_{22} & A_{32}\end{vmatrix}}{A} w_1 - \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{31}\\ A_{12} & A_{32}\end{vmatrix}}{A} w_2,\\ w^{(4)} &= w_4 - \frac{A_{41}}{2\pi i} w^{(1)} - \frac{A_{42}}{2\pi i} w^{(2)} = w_4 + \frac{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{41}\\ A_{22} & A_{42}\end{vmatrix}}{A} w_1 - \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{41}\\ A_{12} & A_{42}\end{vmatrix}}{A} w_2.\end{aligned} \tag{43}$$

---

[1] A. G. стр. 148.
[2] A. G., стр. 149.
[3] A. G., стр. 154.

Обозначим модули периодичности для них соответственно через A^{kl}, B^{kl} и определитель, составленный из них, через

$$D' = \begin{vmatrix} A^{11} & A^{21} & A^{31} & A^{41} \\ A^{12} & A^{22} & A^{32} & A^{42} \\ B^{11} & B^{21} & B^{31} & B^{41} \\ B^{12} & B^{22} & B^{32} & B^{42} \end{vmatrix} \tag{44}$$

Тогда имеем:

$$D' = D \cdot \Delta,$$

где Δ — определитель преобразования, осуществляемого системой уравнений (42) и (43).

Но, как легко проверить,

$$\Delta = \frac{1}{A}.$$

Далее, как известно, для нормальных интегралов первого рода $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ модули периодичности A^{12}, A^{21} равны нулю,[1] а для нормальных интегралов второго рода $w^{(3)}$, $w^{(4)}$ модули периодичности A^{kl} также равны нулю,

$$A^{kl} = 0, \quad k \neq l,$$

между тем как модуль периодичности B^{kl} равен вычету произведения $w^{(l)} \dfrac{dw^{(k)}}{d\zeta}$ в особой точке интеграла e_0[2],

$$B^{kl} = R_{l_0}\left[w^{(l)} \frac{dw^{(k)}}{d\zeta}\right].$$

Таким образом, получаем:

$$D = A \begin{vmatrix} R_{e_0}\left[w^{(1)} \dfrac{dw^{(3)}}{d\zeta}\right] & R_{e_0}\left[w^{(1)} \dfrac{dw^{(4)}}{d\zeta}\right] \\ R_{e_0}\left[w^{(2)} \dfrac{dw^{(3)}}{d\zeta}\right] & R_{e_0}\left[w^{(2)} \dfrac{dw^{(4)}}{d\zeta}\right] \end{vmatrix}. \tag{45}$$

Подсчитаем эти вычеты.

Вблизи точки e_0 имеем следующие разложения для рассматриваемых функций:

$$\frac{(\zeta - e_0)^p}{u} = C_0 (\zeta - e_0)^{p - \frac{1}{2}} + C_1 (\zeta - e_0)^{p + \frac{1}{2}} + \ldots,$$

где

$$C_0 = \prod_{k=1}^{k=5} (e_0 - e_k)^{-\frac{1}{2}}, \qquad C_1 = -\frac{1}{2C_0} \sum_{k=1}^{k=5} (e_0 - e_k)^{-2}.$$

Следовательно, в окрестности e_0

$$\frac{dw_3}{d\zeta} = \frac{1}{u(\zeta - e_0)} = C_0 (\zeta - e_0)^{-\frac{3}{2}} + C_1 (\zeta - e_0)^{-\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$w_2 = \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{\zeta, u} \frac{d\zeta}{u} = \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_0} + \int\limits_{e_0}^{\zeta, u} = w_2^{(0)} + 2C_0 (\zeta - e_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} C_1 (\zeta - e_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

$$w_2 \frac{dw_3}{d\zeta} = C_0 w_2^{(0)} (\zeta - e_0)^{-\frac{3}{2}} + 2C_0^2 (\zeta - e_0)^{-1} + C_1 w_2^{(0)} (\zeta - e_0)^{-\frac{1}{2}} + \ldots$$

---

[1] A. G., стр. 152.

[2] A. G. стр. 156.

Отсюда вытекает, что[1]

$$R_{e_0}\left[w_2 \frac{dw_3}{d\zeta}\right] = 4C_0^2.$$

Аналогично получается:

$$\begin{gathered} R_{e_0}\left[w_1 \frac{dw_4}{d\zeta}\right] = \frac{4}{3} C_0^2, \quad R_{e_0}\left[w_2 \frac{dw_4}{d\zeta}\right] = 4C_0 C_1, \\ R_{e_0}\left[w_1 \frac{dw_3}{d\zeta}\right] = R_{e_0}\left[w_1 \frac{dw_2}{d\zeta}\right] = R_{e_0}\left[w_1 \frac{dw_1}{d\zeta}\right] = R_{e_0}\left[w_2 \frac{dw_1}{d\zeta}\right] = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

На основании соотношений (42), (43) отсюда следует:

$$\begin{gathered} R_{e_0}\left[w^{(1)} \frac{dw^{(3)}}{d\zeta}\right] = -\frac{2\pi i A_{12}}{A} 4C_0^2, \quad \mathbf{R}_{e_0}\left[w^{(2)} \frac{dw^{(3)}}{d\zeta}\right] = \frac{2\pi i A_{11}}{A} 4C_0^2, \\ R_{e_0}\left[w^{(1)} \frac{dw^{(4)}}{d\zeta}\right] = \frac{2\pi i A_{22}}{A} \frac{4}{3} C_0^2 - \frac{2\pi i A_{12}}{A} 4C_0 C_1, \\ R_{e_0}\left[w^{(2)} \frac{dw^{(4)}}{d\zeta}\right] = -\frac{2\pi i A_{21}}{A} \frac{4}{3} C_0^2 + \frac{2\pi i A_{11}}{A} 4C_0 C_1. \end{gathered} \tag{47}$$

Подставляя в (45), получим окончательно:

$$D = \frac{64}{3} \pi^2 C_0^4 = \frac{64}{3} \pi^2 \prod_{k=1}^{k=5} (e_0 - e_k)^{-2} > 0. \tag{48}$$

Для доказательства второго предложения (что $\beta_4 = 0$) рассмотрим интеграл

$$\int_R w_1 \, dQ, \tag{49}$$

распространенный по всему контуру R рассматриваемой поверхности Римана с купюрами. Так как точки e_ν выделены купюрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, и, следовательно, внутри области, ограниченной контуром R, нет особых точек, то этот интеграл равен нулю.

С другой стороны:

$$\int_R w_1 \, dQ = \int_{R'} w' \, dQ + \sum_{r=1}^{3} \int_{\gamma_r} w_1 \, dQ, \tag{50}$$

где R' — совокупность купюр a_l, b_l.

Интеграл по R', как известно, равен:[2]

$$\int_{R'} w_1 \, dQ = A_{11} \mathfrak{B}_1' - B_{11} \mathfrak{A}_1' + A_{12} \mathfrak{B}_2' - B_{12} \mathfrak{A}_2'. \tag{51}$$

---

[1] A. G., стр. 29.
[2] A. G., стр. 140.

Что же касается интегралов по купюрам γ_r, то замечая, что, например, при полном обходе точки e_1 $\log\sigma$ уменьшается на $4\pi i$, между тем как u и w_1 возвращаются к прежним значениям, имеем:

$$\int\limits_{\gamma_1} w_1\,dQ = \int\limits_{\gamma_1} w_1 \log\sigma\, dw_1 = \int\limits_{e_1}^{e_2} w_1 \log\sigma\, dw_1 + \\ + \int\limits_{e_2}^{e_1} w_1(\log\sigma - 4\pi i)\,dw_1 = 4\pi i\int\limits_{e_1}^{e_2} w_1\,dw_1. \tag{52}$$

(Интегралы по бесконечно малым окружностям около точек e_1, e_2, как легко видеть, исчезают.)

Таким образом, получим:

$$S_1 = \sum_{r=1}^{3}\int\limits_{\gamma_r} w_1\,dQ = 4\pi i\left\{\int\limits_{e_1}^{e_2} w_1\,dw_1 + \int\limits_{e_3}^{e_4} w_1\,dw_1 + \int\limits_{e_5}^{e_0} w_1\,dw_1\right\}. \tag{53}$$

Эту сумму можно легко выразить через модули периодичности интеграла w_1.

В самом деле:

$$\frac{S_1}{2\pi i} = 2\sum_{\nu=1,3,5}\int\limits_{e_\nu}^{e_{\nu+1}} w_1\,dw_1 = \sum\left[\left(\int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_{\nu+1}} dw_1\right)^2 - \left(\int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_\nu} dw_1\right)^2\right] = \\ = \sum\left[\int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_{\nu+1}} dw_1 + \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_\nu} dw_1\right]\int\limits_{e_\nu}^{e_{\nu+1}} dw_1.$$

Подставляя

$$\int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_\nu} dw_1 = \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_2} dw_1 + \int\limits_{e_2}^{e_\nu} dw_1, \qquad \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_{\nu+1}} dw_1 = \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_1} dw_1 + \int\limits_{e_1}^{e_{\nu+1}} dw_1$$

и группируя соответственным образом члены, получим:

$$2\sum_{\nu=1,3,5}\int\limits_{e_\nu}^{e_{\nu+1}} w_1\,dw_1 = \left[\int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_1} dw_1 + \int\limits_{\zeta_a, u_a}^{e_2} dw_1\right]\left[\int\limits_{e_1}^{e_2} dw_1 + \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1 + \int\limits_{e_5}^{e_0} dw_1\right] + \\ + \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1\left[\int\limits_{e_2}^{e_3} dw_1 + \int\limits_{e_1}^{e_4} dw_1\right] + \int\limits_{e_5}^{e_0} dw_1\left[\int\limits_{e_2}^{e_5} dw_1 + \int\limits_{e_1}^{e_0} dw_1\right].$$

Но, как известно,[1]

$$\int\limits_{e_1}^{e_2} dw_1 + \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1 + \int\limits_{e_5}^{e_0} dw_1 = 0, \tag{54}$$

следовательно,

$$\frac{S_1}{2\pi i} = \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1\left[\int\limits_{e_2}^{e_3} dw_1 + \int\limits_{e_1}^{e_4} dw_1\right] - \left[\int\limits_{1}^{e_2} dw_1 + \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1\right]\left[\int\limits_{e_2}^{e_5} dw_1 + \int\limits_{e_2}^{e_3} dw_1 + \int\limits_{e_4}^{e_5} dw_1\right].$$

[1] Гурса, Курс анализа, т. 2, ч. I, стр. 192, 1923.

Это выражение легко преобразуется к виду:

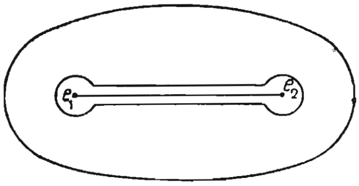
$$\frac{S_1}{\pi i} = -2 \int\limits_{e_3}^{e_4} dw_1 \cdot 2 \int\limits_{e_4}^{e_5} dw_1 - 2 \left[\int\limits_{e_2}^{e_3} dw_1 + \int\limits_{e_4}^{e_5} dw_1 \right] \cdot 2 \int\limits_{e_1}^{e_2} dw_1,$$

или по (36):

$$S_1 = -\pi i (A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12}). \tag{55}$$

По (50) и (51) получается, таким образом, следующее соотношение:

$$A_{11} \mathfrak{B}_1' - B_{11} \mathfrak{A}_1' + A_{12} \mathfrak{B}_2' - B_{12} \mathfrak{A}_2' - \pi i (A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12}) = 0. \tag{56}$$



Фиг. 4.

Положим, что аргумент $\log \sigma$ при приближении к разрезу снизу, в нижнем листе, равен $m\pi$. Тогда, сводя кривую b_1 int к кривой, показанной на фиг. 4, и замечая, что, при обходе по этой кривой **вокруг** e_2, dw_1 меняет знак, имеем [см. (35), (36), (39)]:

$$\mathfrak{A}_1' = \int\limits_{b_1 \text{ int}} \log \sigma \, dw_1 = \int\limits_{e_1}^{e_2} (\log|\sigma| + m\pi i) \, dw_1 + \int\limits_{e_2}^{e_1} [\log|\sigma| + (m+2)\pi i](-dw_1) =$$

$$= 2 \int\limits_{e_1}^{e_2} \log|\sigma| \, dw_1 + (2m+2)\pi i \int\limits_{e_1}^{e_2} dw_1 = \mathfrak{A}_1 + (m+1)\pi i A_{11}.$$

Аналогично, учитывая, что при приближении к внутренней точке отрезка (e_4, e_5) в верхнем листе аргумент $\log \sigma$ равен $(m+1)\pi$, имеем:

$$\mathfrak{B}_2 = \int\limits_{a_2 \text{ ext}} \log \sigma \, dw_1 = \int\limits_{e_4}^{e_5} [\log|\sigma| + (m+1)\pi i] \, dw_1 + \int\limits_{e_5}^{e_4} [\log|\sigma| + (m+3)\pi i](-dw_1) =$$

$$= 2 \int\limits_{e_4}^{e_5} \log|\sigma| \, dw_1 + (2m+4)\pi i \int\limits_{e_4}^{e_5} dw_1 = \mathfrak{B}_2 + (m+2)\pi i B_{12},$$

и также:

$$\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2 + (m+1)\pi i A_{12}, \quad \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1 + (m+2)\pi i B_{11}.$$

Подставляя эти выражения в (56), приходим к уравнению

$$A_{11} \mathfrak{B}_1 - B_{11} \mathfrak{A}_1 + A_{12} \mathfrak{B}_2 - B_{12} \mathfrak{A}_2 = 0. \tag{57}$$

Но отсюда следует, что β_4 *должно равняться нулю*. В самом деле, если подставить в (57) выражения (40) и воспользоваться известными соотношениями:[1]

$$\begin{aligned} &A_{11} B_{21} - B_{11} A_{21} + A_{12} B_{22} - B_{12} A_{22} = 0, \\ &A_{11} B_{31} - B_{11} A_{31} + A_{12} B_{32} - B_{12} A_{32} = R_{e_0} \left[w_1 \frac{dw_3}{d\zeta} \right] = 0, \\ &A_{11} B_{41} - B_{11} A_{41} + A_{12} B_{42} - B_{12} A_{42} = R_{e_0} \left[w_1 \frac{dw_4}{d\zeta} \right] = \frac{4}{3} C_0^2, \end{aligned} \tag{58}$$

то окажется, что левая часть уравнения (57) равна

$$\frac{4}{3} C_0^2 \beta_4.$$

Итак,

$$\beta_4 = 0. \tag{59}$$

[1] A. G., стр. 143.

§ 4. Об отображении углового сечения на полуплоскость. Несмотря на кажущуюся простоту формул предыдущих параграфов, практическое применение их для полигона, число n сторон которого больше четырех, чрезвычайно затрудняется тем обстоятельством, что при $n > 4$ точки $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в которые переходят при отображении на полуплоскость вершины полигона, неизвестны и, собственно, не существует эффективного метода их нахождения. С. Бергманом предложен метод, который принципиально дает возможность с любой точностью решить задачу для данного углового сечения. Именно, в работе „Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasentransformator“ [1] Бергман показывает, что всякий полигон углового сечения может быть апроксимирован другим полигоном, стороны которого сколь угодно мало отличаются от сторон данного, и для которого соответствующий гиперэллиптический интеграл (24) сводится к эллиптическому (а, следовательно, и точки $e_1, e_2, \ldots e_5, e_0$ выражаются через точки разветвления эллиптического интеграла).

Следуя этому методу, Бернштейн, [2] исходя из известного, исследованного в работе Бергмана гиперэллиптического интеграла, сводящегося к эллиптическим, провел полностью решение для случая симметричного сечения.

Также следуя этой идее, мы хотим здесь исследовать преобразования, переводящие эллиптический интеграл в такой гиперэллиптический, который отображает на полуплоскость полигон, сколь угодно мало отличающийся от данного углового сечения.

Отметим прежде всего следующее предложение:

Если отношения $CD:AB$, $BC:DE$ сторон полигона T (углового сечения) *рациональны:*

$$\frac{CD}{AB} = \frac{m}{n}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{p}{q}, \tag{60}$$

(где m, n, p, q — *целые числа*), *то гиперэллиптический интеграл*

$$z = N \int \frac{\zeta - e_0}{u} d\zeta, \tag{24}$$

отображающий полигон на верхнюю полуплоскость ζ, сводится к эллиптическому

$$z = c \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{61}$$

рациональной подстановкой

$$t = R(\zeta). \tag{62}$$

Действительно, так как стороны полигона равны:

$$BC = -iN \int_{e_1}^{e_2} \frac{\zeta - e_0}{u} d\zeta, \quad CD = -N \int_{e_2}^{e_3} \frac{\zeta - e_0}{u} d\zeta,$$

$$DE = iN \int_{e_3}^{e_4} \frac{\zeta - e_0}{u} d\zeta, \quad EF = N \int_{e_4}^{e_5} \frac{\zeta - e_0}{u} d\zeta,$$

то, обозначая

$$\omega_1 = 2\frac{CD}{m}, \quad \omega_2 = 2i\frac{DE}{p}, \tag{63}$$

[1] S. Bergmann, цитировано на стр. 46.

[2] Zu dem Torsionsproblem im Winkeleisen. Еще не опубликованная работа.

получим по (36) для модулей периодичности интеграла (24) выражения:

$$A_{11}=q\omega_2, \quad A_{12}=-p\omega_2, \quad B_{11}=-n\omega_1, \quad B_{12}=(m-n)\,\omega_1.$$

Следовательно, высказанное предложение является частным случаем теоремы Абеля:[1] *если модули периодичности гиперэллиптического интеграла первого рода*

$$z=\int\varphi(\zeta,\,u)\,d\zeta$$

выражаются только через два различных периода $\omega_1=\alpha_1+i\beta_1$, $\omega_2=\alpha_2+i\beta_2$, *то интеграл можно свести к эллиптическому*

$$\int\frac{dt}{\sqrt{At^4+A_1t^3+\ldots+A_4}} \tag{64}$$

рациональной подстановкой

$$t=\Phi(\zeta,\,u)=R(\zeta)+uR_1(\zeta).$$

Обращая соотношение (64), имеем:

$$t=\lambda(z),$$

где $\lambda(z)$ — какая-либо однозначная двоякопериодическая функция с периодами ω_1, ω_2 и с двумя простыми полюсами в параллелограме периодов. По сути теоремы Абеля[2] можно принять:

$$t=\operatorname{sn}\left(\frac{z}{c};\,\omega_1,\,\omega_2\right), \tag{65}$$

где c — вещественная, постоянная, определяющаяся как функция ω_1, ω_2.

Очевидно, можно положить, что точка $A(z_0)$ имеет координаты $\frac{1}{2}s\omega_1$, 0 (где s — целое число). Кроме того, мы попрежнему считаем, что сторона AB параллельна оси X. В таком случае при изменении ζ по вещественной оси z принимает значения, отличающиеся от вещественных или чисто мнимых на целое число полупериодов $\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$. Но при таких значениях z $\operatorname{sn}\frac{z}{c}$ или вещественно или чисто мнимое. Таким образом,

$$t=R(\zeta)+uR_1(\zeta)$$

должно быть вещественным или чисто мнимым при вещественных значениях ζ. В частности, при

$$e_0<\zeta<\infty \quad \text{и} \quad -\infty<\zeta<e_1,$$

когда соответствующая точка z находится на стороне AB (т. е. на оси X), t должно быть вещественным, и при $e_1<\zeta<e_2$ — чисто мнимым.

Отсюда следует, во-первых, что рациональные функции $R(\zeta)$, $R_1(\zeta)$ должны иметь вещественные коэффициенты (иначе, например, t не было бы вещественно при $e_0<\zeta<\infty$), и во-вторых, что $R(\zeta)$ равно нулю, ибо в противном случае, например, при $e_1<\zeta<e_2$, когда u имеет мнимое значение, t не было бы чисто мнимым числом.

---

[1] A. G., стр. 368.

[2] См. доказательство теоремы, A. G., стр. 369.

Итак, интеграл (24) может быть преобразован к эллиптическому подстановкой

$$t = uR_1(\zeta). \tag{66}$$

Но далее, если существует подстановка вида

$$\tau = uR_1(\zeta),$$

преобразующая интеграл (24) в эллиптический, то существует также подстановка вида

$$t = R(\zeta),$$

также преобразующая этот интеграл в эллиптический. Это очевидно, так как например, подстановка

$$t = \frac{1+k\tau^2}{1-k\tau^2} = \frac{1+ku^2R_1^2}{1-ku^2R_1^2} = R(\zeta)$$

переводит интеграл

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$$

снова в эллиптический

$$-i\frac{1}{1+k}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left[1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 t^2\right]}}.$$

Следовательно, интеграл (24) при выполнении условий (60) может быть всегда преобразован к эллиптическому подстановкой только типа (62). Заметим, что приведенная при доказательстве подстановка

$$t = \frac{1+k\tau^2}{1-k\tau^2}$$

соответствует переходу от функции sn с периодами ω_1, ω_2 к функции с периодами $\frac{\omega_2}{i}$, $i\frac{\omega_1}{2}$. Таким образом, доказано только, что существует подстановка

$$t = R(\zeta),$$

преобразующая рассматриваемый гиперэллиптический интеграл к эллиптическому с периодами $-i\omega_2$, $\frac{i\omega_1}{2}$. Но можно также доказать, что существует подстановка вида $t = R(\zeta)$, преобразующая интеграл (24) к эллиптическому с периодами ω_1, ω_2.

В самом деле, положим, что точка $A(z_0)$ имеет координаты $\frac{1}{4}\omega_1$, 0. Тогда на основании соотношения

$$\operatorname{sn}\left(\frac{zi+\frac{1}{4}\omega_1}{c}\right) = \frac{\operatorname{cn}\frac{iz}{c}}{\operatorname{dn}\frac{iz}{c}}$$

$\operatorname{sn}\left(\frac{z}{c};\ \omega_1,\ \omega_2\right)$ будет принимать вещественные значения, когда точка z находится на стороне AF. Так как на стороне AB $\operatorname{sn}\frac{z}{c}$ будет также вещественно, а на других сторонах полигона z принимает значения, отличающиеся от значений z на сторонах AB и AF на целое число полупериодов $\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$, то вообще $\operatorname{sn}\frac{z}{c}$ будет вещественно, когда точка находится на контуре полигона. Отсюда аналогично предыдущему получим, что подстановка

$$t=\Phi(\zeta,\ u)$$

должна будет иметь вид (62).

Мы привели первое доказательство для того, чтобы отметить также возможность подстановки (66).

Для упрощения дальнейшего положим, что входящая вершина A полигона T отображена в точку $e_0=\infty$. В таком случае:

$$z=N\int\frac{d\zeta}{u},\tag{67}$$

где u равно теперь:

$$u=\sqrt{(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)\ldots(\zeta-e_5)}.\tag{68}$$

Положим:

$$t=R(\zeta)=\frac{P_\mu(\zeta)}{Q_\nu(\zeta)}=\frac{\zeta^\mu+\alpha_1\zeta^{\mu-1}+\ldots+\alpha_\mu}{\zeta^\nu+\beta_1\zeta^{\nu-1}+\ldots+\beta_\nu},$$

где $P_\mu(\zeta)$ и $Q_\nu(\zeta)$ — полиномы, степени которых обозначены соответственно через μ и ν. Выполняя эту замену в интеграле (61) и сравнивая с (67), получим:

$$c^2(P'Q-Q'P)^2\cdot\prod_{s=1}^{s=5}(\zeta-e_s)=(Q-P)(Q+P)(Q-kP)(Q+kP)N^2.\tag{69}$$

Степени в левой и правой части равенства могут быть равны только тогда, когда $\mu=\nu$ и степень $Q-P$ равна $\mu-3$. Следовательно,

$$t=\frac{\zeta^\mu+\alpha_1\zeta^{\mu-1}+\alpha_2\zeta^{\mu-2}+\alpha_3\zeta^{\mu-3}+\ldots+\alpha_\mu}{\zeta^\mu+\alpha_1\zeta^{\mu-1}+\alpha_2\zeta^{\mu-2}+\beta_3\zeta^{\mu-3}+\ldots+\beta_\mu}=\frac{P_\mu(\zeta)}{Q_\mu(\zeta)}\tag{70}$$

и

$$\frac{dt}{d\zeta}=\frac{P'Q-Q'P}{Q^2}=\frac{3(\beta_3-\alpha_3)\zeta^{2\mu-4}+\ldots+\beta_\mu\alpha_{\mu-1}-\alpha_\mu\beta_{\mu-1}}{\zeta^{2\mu}+2\alpha_1\zeta^{2\mu-1}+\ldots+\beta_\mu^2}.\tag{71}$$

Равенства (69) и (70) показывают, что полином

$$(Q^2-P^2)(Q^2-k^2P^2)$$

должен иметь $2\mu-4$ двойных корней. Если еще присоединить сюда условие равенства коэффициентов при высшей степени $\zeta^{4\mu-3}$ в левой и правой части равенства (69), то это дает для определения $2\mu-1$ коэффициентов N, α_s, β_s, $(2\mu-3)$ условий. Если алгебраические уравнения вида

$$f_r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_\mu;\ \beta_3,\ \beta_4,\ldots,\ \beta_\mu;\ N,\ k)=0,\qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ 2\mu-3),\tag{72}$$

которые получаются при формулировании этих условий, разрешимы относительно α_s, β_s, N, то коэффициенты α_s, β_s, N определяются из (72) как функции двух из них и модуля эллиптического интеграла k.

Так как, наоборот, всякий двойной корень полинома

$$(Q^2-P^2)(Q^2-k^2P^2)$$

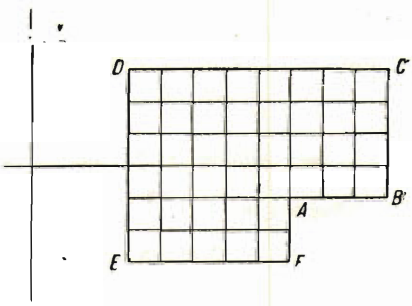
входит в $P'Q-Q'P$, то этих условий достаточно, чтобы удовлетворить равенству (69).

Выясним теперь, *какова должна быть степень* μ, *чтобы подстановка* (70) *преобразовывала в эллиптический — интеграл, отображающий на верхнюю полуплоскость полигон* T *с заданным рациональным отношением сторон* $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$.

Уравнения (63) показывают, что полигон T может быть разделен на конечное число $mp-nq$ одинаковых прямоугольников со сторонами $\frac{1}{2}\omega_1$ и $\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{i}$ (фиг. 5). Из (61), (65) следует далее, что каждый из этих прямоугольников представляет четверть параллелограма периодов для функции

$$t=\operatorname{sn}\frac{z}{c},$$

отображающей верхнюю полуплоскость t на один из таких прямоугольников (если только поместить начало координат плоскости в середину нижней стороны этого прямоугольника), причем вершинам прямоугольника соответствуют точки $t=\pm 1$, $\pm\frac{1}{k}$. Во всех угловых точках прямоугольников, и только в этих точках, полигона T производная



Фиг. 5.

$$\frac{dt}{dz}=\frac{1}{c}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

равна нулю. Следовательно, производная

$$\frac{dt}{d\zeta}=\frac{dt}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta}=\frac{N}{c}\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)\dots(\zeta-e_5)}}$$

также равна нулю во всех этих точках, кроме выходящих вершин полигона. В выходящих вершинах $\frac{dt}{d\zeta}\neq 0$, ибо в окрестности e_s имеем на основании (24) и (61) следующие разложения для $t-t_s$ $\left(t_s=\pm 1 \text{ или } \pm\frac{1}{k}\right)$ и $\zeta-e_s$ по степеням $z-z_s$:

$$t-t_s=c'(z-z_s)^2+\dots, \qquad (c'\neq 0),$$
$$\zeta-e_s=c''(z-z_s)^2+\dots, \qquad (c''\neq 0),$$

откуда:

$$\lim_{\zeta\to e_s}\frac{t-t_s}{\zeta-e_s}=C\neq 0.$$

Во входящей вершине $A(\zeta=\infty)$ полигона условие $\frac{dt}{d\zeta}=0$ по (71) будет всегда выполняться. Из остальных точек, в которых $\frac{dt}{d\zeta}=0$, $2(m+p)-6$ точек лежит на контуре полигона, и им соответствует вещественное значение ζ.

Но другим точкам, лежащим внутри полигона, в количестве $(m-1)(p-1)-nq$ соответствуют комплексные значения

$$\zeta_r=\xi_r+i\eta_r$$

из верхней полуплоскости ζ. Так как $t=R(\zeta)$ — рациональная функция с вещественными коэффициентами, то точки

$$\bar{\zeta}_r=\xi_r-i\eta_r$$

также должны быть нулями $\frac{dt}{d\zeta}$. Итак, производная $\frac{dt}{d\zeta}$ имеет точно

$$2(m+p)-6+2[(m-1)(p-1)-nq]=2(mp-nq-2)$$

нулей (не считая $\zeta=\infty$).

Но по (71) эти нули все должны быть нулями $P'Q-Q'P$, и, как видно из доказательства, больше нулей $P'Q-Q'P$ не должно иметь. Следовательно, степень $2\mu-4$ полинома $P'Q-Q'P$ должна равняться $2(mp-nq-2)$, откуда

$$\mu=mp-nq. \tag{73}$$

Итак, *интеграл* (24), *отображающий полигон T с заданными рациональными отношениями сторон $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ $(m>n,\ p>q)$ на верхнюю полуплоскость ζ, может быть преобразован к эллиптическому подстановкой вида* (70), *если*

$$\mu=mp-nq.$$

Так как всякое целое число $\mu\geqslant 3$ можно представить в виде (73) (не обязательно считать пары чисел m, n; p, q взаимно простыми), то отсюда, между прочим, следует, что уравнения (72) разрешимы относительно α_s, β_s, N.

Практически задача сводится, следовательно, к решению алгебраических уравнений (72) и, конечно, вообще оказывается очень трудной. Довольно просто получается решение для $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, равных 2, 3. Мы приводим здесь подстановки для этих случаев.

1) Подстановка

$$t=\frac{\zeta^3+\alpha\zeta^2-\frac{1}{1+k}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^3}{\zeta^3+\alpha\zeta^2-\frac{k}{1+k}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^3}$$

преобразует интеграл (61) в

$$\frac{c\sqrt{6}}{3(1+k)}\alpha\sqrt{\alpha}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta+\alpha)\left(\zeta-\frac{1}{3}\alpha\right)\left[\zeta^3+\alpha\zeta^2-\frac{2k}{(1+k)^2}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^3\right]}}.$$

2) Подстановка

$$t^2=\frac{4\zeta^3-3\alpha^2\zeta-\alpha^3}{4\zeta^3-3\alpha^2\zeta-\alpha^3(2k^2-1)}$$

переводит интеграл (61) в

$$3\alpha\sqrt{\alpha c}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-\alpha^2)\left[4\zeta^3-3\alpha^2\zeta-\alpha^3(2k^2-1)\right]}}.$$

3) Подстановка

$$t^2 = \frac{(\zeta - p\alpha_1)^2 (\zeta - p\alpha_2)^2}{(\zeta - p)^2 (\zeta - p\beta_1)(\zeta - p\beta_2)},$$

причем α_1, α_2 — корни уравнения

$$\alpha^2 - \frac{\sigma + 2}{2}\alpha + \frac{4}{k^2(\sigma + 2)} = 0$$

и β_1, β_2 — корни уравнения

$$\beta^2 - \sigma\beta + \frac{16}{k^2(\sigma + 2)^2} = 0,$$

где σ — вещественный корень уравнения

$$(4 - \sigma)(\sigma + 2)^2 = \frac{32}{k^2},$$

переводит интеграл (61) в

$$\frac{3p\sqrt{p}c}{\sqrt{k}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - p\beta_1)(\zeta - p\beta_2)\left[\zeta - \frac{p}{8}(4-\sigma)\right]\left\{\left[\zeta - \frac{p}{2}(\sigma + 2)\right]^2 + \frac{p^2}{4}(4-\sigma)(\sigma+2)\right\}}}.$$

§ 5. **О решении задачи изгиба.** В этом параграфе мы хотим применить общие рассуждения § 1 к решению задачи изгиба.

В этом случае функция

$$F(z) = \chi + i\chi' \tag{74}$$

удовлетворяет на ν-той стороне полигона контурному условию (2):

$$\mathbf{I}[F(z)] = -\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{y^3}{3} - \sigma\frac{x^2 y}{2} + 2(1+\sigma)\int xy\,dx. \tag{2}$$

Дифференцируя по s, получим согласно (12), (6):

$$\mathbf{I}\left[e^{i\vartheta_\nu}\frac{dF}{dz}\right] = -\left[\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2 + \frac{1}{2}\sigma x^2\right]\sin\vartheta_\nu + (2+\sigma)\,xy\cos\vartheta_\nu, \tag{75_1}$$

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\vartheta_\nu}\frac{d^2F}{dz^2}\right] = x\sin 2\vartheta_\nu + 2y\cos 2\vartheta_\nu + \sigma y, \tag{75_2}$$

$$\mathbf{I}\left[e^{3i\vartheta_\nu}\frac{d^3F}{dz^3}\right] = \sigma\sin\vartheta_\nu + \sin 3\vartheta_\nu + \sin\vartheta_\nu\cos 2\vartheta_\nu = d_\nu = \text{const}, \tag{75_3}$$

$$\mathbf{I}\left[e^{4i\vartheta_\nu}\frac{d^4F}{dz^4}\right] = 0. \tag{75_4}$$

Отсюда по общим формулам (22), (18) третья производная от $F(z)$ равна:

$$\frac{d^3F}{dz^3} = e^{-3i\vartheta_n}\int \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta - \zeta_\nu)^{3\varkappa_\nu}} + C_1 + C_1' i, \tag{76}$$

где $R(\zeta)$ — полином с вещественными коэффициентами, степень которого не выше $3n - 8$;

$$R(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{3n-8}\zeta^{3n-8}.$$

Легко проверить, что выражение (76) удовлетворяет условиям (75_3) при соответственном выборе констант a_s, C_1, C_1'. В самом деле, на ν-той стороне полигона

$$F'''(z) = F'''(z_\nu) + e^{-3i\vartheta_n} \int\limits_{\zeta_\nu}^{\zeta} \frac{R(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{s=1}^{n} (\zeta - \zeta_s)^{3\varkappa_s}}.$$

Так как, если z принадлежит ν-той стороне, ζ вещественно и

$$\zeta_\nu < \zeta < \zeta_{\nu+1},$$

то аргумент интеграла в (7) равен:

$$-3\vartheta_n - \sum_{s=\nu+1}^{s=n} 3\varkappa_s \pi,$$

или по (14):

$$-3\vartheta_n - \sum_{s=\nu+1}^{s=n} 3(\pi - \vartheta_s + \vartheta_{s-1}) = m\pi - 3\vartheta_\nu.$$

Отсюда и следует, что

$$\mathrm{I}\left[e^{3i\vartheta_\nu} \frac{d^3 F}{dz^3}\right] = \mathrm{I}\,[e^{3i\vartheta_\nu} F'''(z_\nu)] = c_\nu = \text{const}.$$

Значение этой константы зависит, очевидно, от коэффициентов полинома $R(\zeta)$ и C_1, C_1' и вообще при произвольных a_s, C_1, C_1' не равно d_ν. Требуя, чтобы d_ν и c_ν были равны, мы получаем n линейных относительно a_s, C_1, C_1' уравнений. Конечно, этих уравнений недостаточно для определения a_s и постоянных интегрирования, и для полного определения их необходимо использовать еще условия (74), (75_1), (75_2).

В качестве примера рассмотрим случай, когда полигон Γ равносторонний треугольник.

Как известно, указанная выше математическая постановка задачи изгиба получается в том случае, когда система сил, действующих на основание стержня, эквивалентна силе, проходящей через центр тяжести сечения в направлении одной из главных осей инерции сечения в центре тяжести, причем это направление принято за ось X. Но для равностороннего треугольника эллипс инерции в центре тяжести — круг, и поэтому в данном случ е формулы этого параграфа применимы для произвольного направления силы.

Пусть высота треугольника образует с направлением силы (осью X, фиг. 6) угол α.

Пусть, далее, ζ_1, ζ_2, ζ_3 — точки, соответствующие вершинам треугольника. Если положим для упрощения формул, что точке z_1 соответствует $\zeta_1 = \infty$, и заметим, кроме того, что по симметрии можно тогда считать

$$\zeta_3 = -\zeta_2 = 1,$$

то функцию, отображающую треугольник на верхнюю полуплоскость, можем представить в виде:

$$z = z_3 + Ne^{\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) i} \int_1^\zeta \frac{d\zeta}{(\zeta - 1)^{\frac{2}{3}} (\zeta + 1)^{\frac{2}{3}}}, \tag{77}$$

где N — вещественная константа, которая легко может быть найдена. Именно, если L — длина стороны треугольника, то, интегрируя по любой из сторон, имеем:

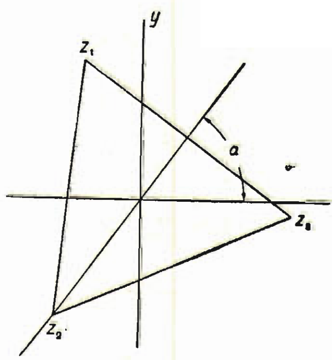
$$L = N \int_{-\infty}^{-1} \frac{d\zeta}{|\zeta^2 - 1|^{\frac{2}{3}}} = N \int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{|\zeta^2 - 1|^{\frac{2}{3}}} = N \int_1^\infty \frac{d\zeta}{|\zeta^2 - 1|^{\frac{2}{3}}}. \tag{78}$$

По общей формуле (76), переводя только точку ζ_1 в бесконечность преобразованием известного вида, легко показать также, что $F'''(z)$ в этом случае выразится так:

$$\frac{d^3 F}{dz^3} = e^{-3i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \left\{ \int\int \frac{(\alpha_0' + \alpha_1' \zeta)\, d\zeta}{(\zeta - 1)(\zeta + 1)} + \beta + i\beta' \right\},$$

или

$$\frac{d^3 F}{dz^3} = e^{-3i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \{a_1 \log(\zeta - 1) + a_2 \log(\zeta + 1) + \beta + i\beta'\}. \tag{79}$$



Фиг. 6.

Условия (75_3) дают возможность определить постоянные a_1, a_2, β'. Так как в нашем случае (фиг. 6):

$$\vartheta_1 = \alpha + \frac{7}{6}\pi, \quad \vartheta_2 = \alpha - \frac{\pi}{6}, \quad \vartheta_3 = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

то, если обозначить

$$a_1 \log(\zeta - 1) + a_2 \log(\zeta + 1) + \beta + i\beta' = \varphi(\zeta), \tag{80}$$

эти условия запишутся в виде:

$$\mathrm{I}\,[\varphi(\zeta)] = d_\nu, \tag{81}$$

причем по (75_3):

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{2} \cos 3\alpha, \\ d_2 &= -\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{2} \cos 3\alpha, \\ d_3 &= -\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \cos\alpha - \frac{3}{2} \cos 3\alpha. \end{aligned} \tag{82}$$

Из условий (81) легко найдем:

$$a_1 = \frac{d_2 - d_3}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right),$$
$$a_2 = \frac{d_1 - d_2}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)\sin\alpha, \quad \beta' = d_3. \tag{83}$$

Для определения константы β можно воспользоваться условиями (75_2). Если отсчитывать дугу s на ν-той стороне от точки

$$z_\nu = x_\nu + iy_\nu,$$

т. е. если положить

$$x = s\cos\vartheta_\nu + x_\nu, \quad y = s\sin\vartheta_\nu + y_\nu,$$

то эти условия запишутся:

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\vartheta_\nu}\frac{d^2F}{dz^2}\right] = d_\nu s + g_\nu, \tag{84}$$

где

$$g_\nu = x_\nu \sin 2\vartheta_\nu + 2y_\nu \cos 2\vartheta_\nu + \sigma y_\nu. \tag{85}$$

Так как

$$z_1 = \frac{L\sqrt{3}}{3}e^{\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)i}, \quad z_2 = \frac{L\sqrt{3}}{3}e^{(\alpha+\pi)i}, \quad z_3 = \frac{L\sqrt{3}}{3}e^{\left(\alpha + \frac{5}{3}\pi\right)i},$$

то после элементарных вычислений для g_ν получаются выражения:

$$g_1 = \frac{L\sqrt{3}}{12}\{3(\sqrt{3}\cos 3\alpha - \sin 3\alpha) - 2(1-\sigma)\sin\alpha + 2\sqrt{3}\,\sigma\cos\alpha\},$$
$$g_2 = \frac{L\sqrt{3}}{12}\{3(\sqrt{3}\cos 3\alpha - \sin 3\alpha) + (1-4\sigma)\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha\}, \tag{86}$$
$$g_3 = \frac{L\sqrt{3}}{12}\{3(\sqrt{3}\cos 3\alpha - \sin 3\alpha) + (1+2\sigma)\sin\alpha + (1-2\sigma)\sqrt{3}\cos\alpha\}.$$

Полагая

$$F''(z) = F''(z_\nu) + \int_{z_\nu}^{z}\frac{d^3F}{dz^3}dz$$

и замечая, что на основании (75_3), (9) на ν-той стороне

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\vartheta_\nu}\int_{z_\nu}^{z}\frac{d^3F}{dz^3}dz\right] = \mathbf{I}\left[\int_{z_\nu}^{z}e^{3i\vartheta_\nu}\frac{d^3F}{dz^3}|dz|\right] = d_\nu s,$$

можем переписать условия (84) так:

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\vartheta_\nu}F''(z_\nu)\right] = g_\nu. \tag{87}$$

Но по (79)

$$F''(z_2) = F''(z_1) + \int_{z_1}^{z_2}\frac{d^3F}{dz^3}dz = F''(z_1) + e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\vartheta_1 i}\int_{z_1}^{z_2}\varphi(\zeta)|dz|,$$

$$F''(z_3) = F''(z_1) + \int_{z_1}^{z_2}\frac{d^3F}{dz^3}dz + \int_{z_2}^{z_3}\frac{d^3F}{dz^3}dz =$$
$$= F''(z_1) + e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\vartheta_1 i}\int_{z_1}^{z_2}\varphi(\zeta)|dz| + e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\vartheta_2 i}\int_{z_2}^{z_3}\varphi(\zeta)|dz|.$$

Положим еще

$$F''(z_1)=e^{-2i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}(\lambda_1+i\mu_1), \quad \varphi(\xi)=u+iv. \tag{88}$$

Подставляя эти выражения в (87), получим следующие уравнения:

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\left(\vartheta_1-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}(\lambda_1+i\mu_1)\right]=g_1,$$

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\left(\vartheta_2-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}(\lambda_1+i\mu_1)\right]+\mathbf{I}\left[e^{\left(2\vartheta_2+\vartheta_1-\frac{3\pi}{2}-3\alpha\right)i}\int\limits_{z_1}^{z_2}(u+iv)\,|dz|\right]=g_2,$$

$$\mathbf{I}\left[e^{2i\left(\vartheta_3-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}(\lambda_1+i\mu_1)\right]+\mathbf{I}\left[e^{\left(2\vartheta_3+\vartheta_1-\frac{3\pi}{2}-3\alpha\right)i}\int\limits_{z_1}^{z_2}(u+iv)\,|dz|\right]+$$
$$+\mathbf{I}\left[e^{\left(2\vartheta_3+\vartheta_2-\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)i}\int\limits_{z_2}^{z_3}(u+iv)\,|dz|\right]=g_3$$

или

$$\begin{gathered}\mathbf{I}\left[e^{\frac{4\pi i}{3}}(\lambda_1+i\mu_1)\right]=g_1,\\ \mathbf{I}\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}(\lambda_1+i\mu_1)\right]+\mathbf{I}\left[e^{-\frac{2\pi i}{3}}\int\limits_{z_1}^{z_2}(u+iv)\,|dz|\right]=g_2,\\ \mathbf{I}\left[\lambda_1+i\mu_1\right]+\mathbf{I}\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}\int\limits_{z_1}^{z_2}(u+iv)\,|dz|\right]+\mathbf{I}\left[e^{-\frac{2\pi i}{3}}\int\limits_{z_2}^{z_3}(u+iv)\,|dz|\right]=g_3.\end{gathered} \tag{89}$$

Подставляя, наконец,

$$u=a_1\log|\zeta-1|+a_2\log|\zeta+1|+\beta, \quad |dz|=N\frac{d\zeta}{|\zeta^2-1|^{\frac{2}{3}}}$$

и имея в виду, что на ν-той стороне

$$v=\mathbf{I}\,[\varphi(\zeta)]=d_\nu, \quad \int\limits_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}v\,|dz|=d_\nu L,$$

получаем окончательно три уравнения:

$$\begin{gathered}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1=g_1,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta L-\frac{1}{2}d_1L-\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{z_1}^{z_2}[a_1\log|\zeta-1|+a_2\log|\zeta+1|]\,|dz|=g_2,\\ \mu_1-\frac{1}{2}(d_1+d_2)L+\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\int\limits_{z_1}^{z_2}[a_1\log|\zeta-1|+a_2\log|\zeta+1|]\,|dz|-\right.\\ \left.-\int\limits_{z_2}^{z_3}[a_1\log|\zeta-1|+a_2\log|\zeta+1|]\,|dz|\right\}=g_3\end{gathered} \tag{90}$$

относительно трех неизвестных β, λ_1, μ_1, откуда, пользуясь еще формулами (78), (82), (86), найдем:

$$\beta=\frac{3}{2}\sin 3\alpha-\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{3}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}{\pi\int\limits_1^\infty\frac{d\zeta}{|\zeta^2-1|^{\frac{2}{3}}}}\int\limits_1^\infty\left\{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\log|\zeta-1|-\sin\alpha\log|\zeta+1|\right\}\frac{d\zeta}{|\zeta^2-1|^{\frac{2}{3}}},$$

$$\frac{1}{L}\lambda_1=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 3\alpha+\frac{3}{4}\sin 3\alpha+\frac{1}{4}(1-2\sigma)\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 3\alpha+ \tag{91}$$

$$+\frac{\sqrt{3}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}{2\pi\int\limits_1^\infty\frac{d\zeta}{|\zeta^2-1|^{\frac{2}{3}}}}\left\{\int\limits_1^\infty-\int\limits_\infty^{-1}\right\}$$

$$\frac{1}{L}\mu_1=-\frac{3}{4}\cos 3\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 3\alpha+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin\alpha+\frac{1}{2}(1-2\sigma)\cos\alpha-$$

$$-\frac{3\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}{2\pi\int\limits_1^\infty\frac{d\zeta}{|\zeta^2-1|^{\frac{2}{3}}}}\left\{\int\limits_1^\infty-\int\limits_{-\infty}^{-1}\right\}.$$

(В формулах для λ_1 и μ_1 выражения, стоящие под интегралами, такие же как в формуле для β).

Так как таким образом определено не только β, но и значение $F''(z)$ в точке z_1, то тем самым полностью определена не только третья производная $F(z)$, но и вторая. Интегрируя еще раз, найдем первую производную:

$$F'(z)=F'(z_1)+\int\limits_{z_1}^{z}F''(z)\,dz.$$

(Для определения вещественной и мнимой части $F'(z)$ следует использовать условия (75_1). Легко показать на основании общих рассуждений § 1, что из трех уравнений одно будет следствием двух других).

Томск. Н. И. И. М. М.
при Т. Г. У. им. Куйбышева.

TORSION AND BENDING OF MEMBERS OF POLYGONAL SECTION

P. P. KUFAREV

(Tomsk)

(Summary of contents)

Some questions of the theory of elasticity (torsion, bending of members of polygonal section) and hydrodynamics lead to the following mathematical problem:

Let be given a domain B bounded by n-sided polygon Γ. To find a harmonic in B, continuous in $B+\Gamma$ function $V(x, y)$, which takes on the ν-th side of polygon the given values

$$V = P_\nu(s), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad (3)$$

where $P_\nu(s)$ — polynomials from s, and s — length of arc of circuit.

The following method of solving of the problem is examined in this work.

If μ — the greatest of degrees of the polynomials $P_\nu(s)$, then $\mu+1$st derivative $\varphi(z)$ of an analytic in B function

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

satisfies on the ν-th side of polygon Γ the condition

$$\mathrm{I}\,[e^{i(\mu+1)\vartheta_\nu}\varphi(z)] = 0$$

(ϑ_ν — angle from X-axis to the ν-th side of polygon Γ).

Besides this it may be shown that $F(z)$ is continuous in $B+\Gamma$ (s. § 1).

It is then easy to define a form of function $\varphi(z)$, if the function $z(\zeta)$ representing domain B on the upper semiplane is known. Namely, from the boundary conditions and the continuity of $F(z)$ on the circuit of polygon we conclude that

$$\varphi(z) = \varphi^*(\zeta) = R(\zeta)\prod_{\nu=1}^{\nu=n}(\zeta - \zeta_\nu)^{1-(\mu+1)\varkappa_\nu},$$

where $\alpha_\nu = \varkappa_\nu \pi$ are the angles of polygon, ζ_ν the points of real axis of the semiplane corresponding to the vertexes of polygon and $R(\zeta)$-polynomial the degree of which is not greater than $\mu n - 2\mu - 2$.

Now we have only to define the coefficients of polynom $R(\zeta)$ and the constants of integration included in the expression of $F(z)$.

Boundary conditions (3) render possible the composition of a sufficient number of equations for of evaluating these constants. From the existence theorem and uniqueness of solution follows that these equations are compatible.

The direct proof of the compatibility of equations for defining the constants is of a practical interest.

In § 3 such proof is given for the case of torsion when

$$P_\nu(s) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Relations obtained are applicable for practical calculations.

The main difficulty of solution is the definiition of the function

$$z(\zeta)=Ne^{i\vartheta_n}\int(\zeta-\zeta_1)^{\varkappa_1-1}(\zeta-\zeta_2)^{\varkappa_2-1}\dots(\zeta-\zeta_n)^{\varkappa_n-1}\,d\zeta$$

representing polygonal domain B on the upper semiplane, namely in defining the branch-points ζ_ν of function if the lengths of sides of polygon are given.

For the case of domains, the sides of which make angles

$$\alpha_\nu=\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2},$$

S. Bergman has proposed a method principally rendering possible the solving with any degree of precision the given problem. For this class of domains representing function $z(\zeta)$ is expressed by hyperelliptical integral.

In known cases hyperelliptical integrals may be reduced to elliptical. Bergmann showed that any domain B of an examined class may be approximated by the other domain T of this class (in the sense that the sides of polygon T however small, differ from the sides of domain B) for which the corresponding hyperelliptical integral (representing domain T on the semiplane) is reduced to elliptical and consequently its branch-points are expressed by the known branch-points of elliptical integrals; hence branch-points may likewise be expressed also through the lengths of polygon sides.

For the possibility of application of this method it is important to investigate the types of domains represented on the semiplane by hyperelliptical integrals which can be reduced to the elliptical.

Bergman pointed out one type (T_1) of such domain for the case of angular section. In § 4 of the given work another type (T_2) is examined also for the case of angular section. A case was investigated when the ratios of opposite sides $AB:CD$, $BC:DE$ (s. fig. 2) are rational

$$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n},\quad \frac{BC}{DE}=\frac{q}{p},\quad (m,\ n,\ p,\ q\text{ — integers}).$$

In this case the corresponding hyperelliptical integral can be transformed to the elliptical

$$z=c\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

by the rational substitution

$$t=\frac{P_\mu(\zeta)}{Q_\mu(\zeta)}$$

where $P_\mu(\zeta)$ and $Q_\mu(\zeta)$ are the polynomials of the same degree μ, where

$$\mu=mp-nq.$$

It is evident that any domain (angular section) may be approximated by the domain of this type (T_1).

Though for practical calculations only those cases are applicable where ratios of sides equal $1:2$, $1:3$, as in more complicated cases the calculations are too cumbrous.

In the last § 5 of this work is shown how the foregoing considerations can be applied to the solutions of problems of bending the members of polygonal section.