

ТЕОРИЯ ГИРО-ГОРИЗОНТА АНШЮТЦА

Б. В. БУЛГАКОВ

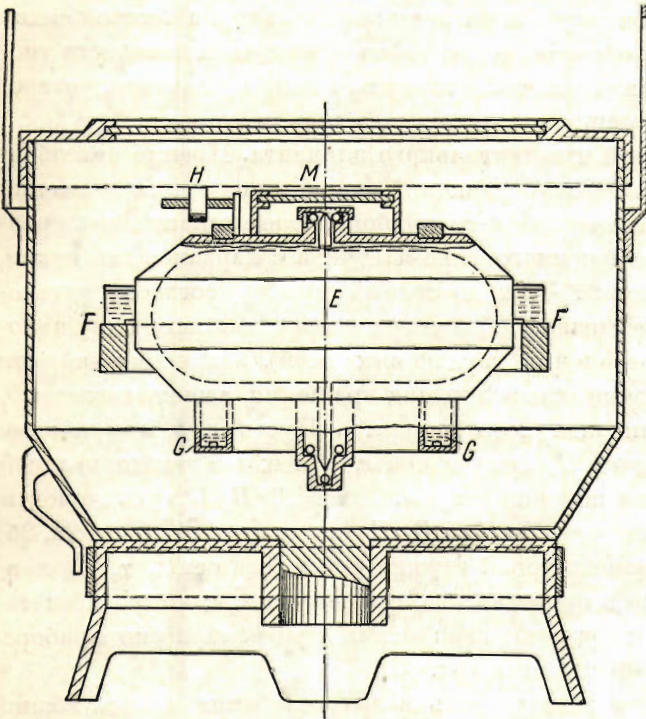
(Москва)

Настоящая работа содержит теорию искусственного гиросtatического горизонта для определения широт системы Аншютца (Anschütz). В § 1 приведено описание и чертеж прибора, заимствованные у E. S. Ferry, Applied Gyrodynamics, pp. 116—118, New York, 1933; в остальных параграфах я вывожу и интегрирую уравнения движения и получаю этим путем количественные соотношения, уточняющие общие качественные характеристики прибора.

§ 1. Назначение и конструкция прибора. Широта какого-либо места определяется по высоте над горизонтом одного из небесных светил. Для измерения высоты светила мы должны иметь горизонтальную плоскость, от которой производится отсчет. Для этой цели может служить естественная линия горизонта в тех случаях, когда она видима. На суше мы можем также пользоваться свободной поверхностью какой-нибудь жидкости или плоскостью, перпендикулярной к отвесу, если только жидкость или отвес не находятся в состоянии ускоренного движения. В море на корабле ни один из двух последних способов не применим, так как и свободная поверхность жидкости и отвес подвергаются действию сил инерции, происходящих от ускорений судна, к которым относятся ускорения при килевой и бортовой качке, а также при изменении скорости и курса.

Эти силы в меньшей степени влияют на положение оси вращения гиросtatического маятника, которая в нормальном состоянии направлена по вертикали, чем на положение свободной поверхности жидкости или отвеса. Отдельный импульс смещает немного ось вращения, а также производит прецессионное движение определенного периода. Если период прецессии велик по сравнению с периодом сил инерции при килевой и бортовой качке, то действия отдельных импульсов в течение периода прецессии почти всецело взаимно уравновешиваются. Так, при периоде прецессии, не меньшем одного часа,

отклонение оси вращения гирос-маятника вследствие килевой и бортовой качки будет очень мало. Ошибка, происходящая от прецессии, может быть почти совершенно исключена, если определить среднее положение оси вращения из двух наблюдений, второе из которых производится по истечении половины периода прецессии после первого. Для удобства этой последней процедуры желательно, чтобы период прецессии был как можно короче. Большой период прецессии можно получить, монтируя прибор таким образом, чтобы центр



Фиг. 1.

тяжести прецессирующей системы находился на малом расстоянии от точки опоры. Для получения малого полупериода при определении среднего положения из двух наблюдений следовало бы, наоборот, поместить центр тяжести на большом расстоянии от точки опоры. В приборе Аншютца эти противоречивые требования примиряются следующим образом.

Зеркало M (фиг. 1) укрепляется на гирос-камере, установленной в кардановом подвесе, две оси которого расположены на равной высоте над центром тяжести волчка вместе с камерой. В нормальном положении ось волчка вертикальна. Футляр, в котором укреплен карданов подвес, может быть повернут в азимуте до тех пор, пока карданова ось FF , более близкая к центру тяжести, не окажется в одной плоскости с наблюдаемым светилем. Так как силы, приложенные в центре тяжести, имеют малые моменты вокруг оси FF , более близкой к центру тяжести, действуя на коротком плече, то прецессионное движение вокруг другой кардановой оси EE , возникающее благодаря этим моментам, будет также малым. Таким образом, эти моменты дают лишь небольшой наклон оси вращения в вертикальной плоскости наблюдаемого светила. С другой стороны, так как момент вокруг другой оси EE , более удаленной от центра тяжести, сравнительно велик, то период прецессии будет малым, как это и нужно для определения среднего положения из двух наблюдений.

Погашение колебаний оси вращения достигается благодаря трению жидкости, движущейся в круговой трубке GG , концентрической с осью вращения, укрепленной на гирос-камере. Наклон оси вследствие вращения земли пред-

отвращается моментом, который вызывает такую же прецессию к востоку. Этот момент производится весом гайки H , которая может быть установлена как в любом положении в азимуте, так и на любом расстоянии от оси. В зависимости от направления вращения волчка гайка должна находиться либо к северу, либо к югу от оси, а ее расстояние от оси определяется в зависимости от широты. При подготовке инструмента для измерения высоты какого-либо светила необходимо повернуть его в азимуте так, чтобы карданова ось, ближайшая к центру тяжести волчка с камерой, оказалась в одной вертикальной плоскости с светилом, затем повернуть горизонтальное кольцо, на котором сидит установочная гайка H , таким образом, чтобы гайка оказалась в плоскости географического меридиана и с надлежащей стороны от оси, и, наконец, установить гайку на расстоянии от оси, соответствующем широте места.

§ 2. Уравнение колебаний чувствительного элемента. Прежде чем обратиться к выводу дифференциальных уравнений, характеризующих движения чувствительного элемента рассматриваемого прибора, полезно напомнить уравнения малых колебаний обыкновенного гиро-маятника с кардановыми осями, пересекающимися в одной точке. Этот последний прибор согласно установившейся терминологии представляет собой твердое тело, имеющее одну неподвижную точку O (точку пересечения кардановых осей), эллипсоид инерции которого относительно этой точки есть эллипсоид вращения, а центр тяжести O_c лежит на оси симметрии эллипсоида („оси фигуры“). Пусть x, y, z — главные оси инерции относительно точки O , причем оси x, y лежат в экваториальной плоскости, а ось z направлена по оси фигуры. Если A, B, C суть моменты инерции, относящиеся к этим осям, то $A = B$. Пусть далее $O\xi\eta\zeta$ (фиг. 2а, 2б) есть система координат, началом которой служит точка O , а оси ξ, η, ζ сохраняют постоянную ориентацию в пространстве, причем оси ξ, η можно представить себе совпадающими с координатными осями при равновесии прибора, а ось ζ — направленной по вертикали вверх.

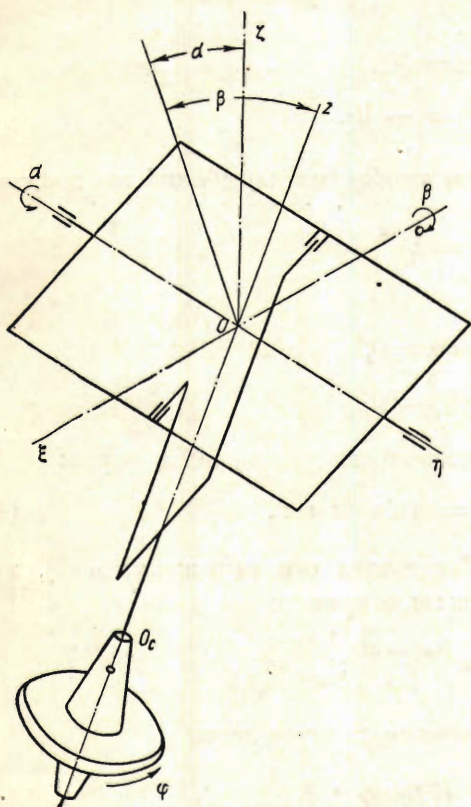
Так как мы будем рассматривать лишь малые колебания, то ось z лишь мало отклоняется от оси ζ . Каждое данное положение оси z можно определить малыми углами α, β , на которые нужно повернуть ось ζ соответственно вокруг осей $+\eta, -\xi$, чтобы привести ее в совпадение с осью z .¹ Третий угол, определяющий положение волчка в пространстве, есть угол его поворота φ вокруг оси фигуры.

Для получения уравнений движения волчка воспользуемся принципом Даламбера, согласно которому суммы моментов внешних сил и сил инерции относительно осей ξ, η должны быть равно нулю. Если l есть расстояние OO_c от неподвижной точки O до центра тяжести O_c , а Q — вес волчка, то моменты силы тяжести относительно осей ξ, η суть $lQ\beta, -lQ\alpha$. Полный момент сил инерции, как известно из теории волчка, состоит из маятниковых моментов, которые возникают независимо от того, вращается ли волчок вокруг своей оси или нет, и так называемых гиростатических моментов. Маятниковые моменты

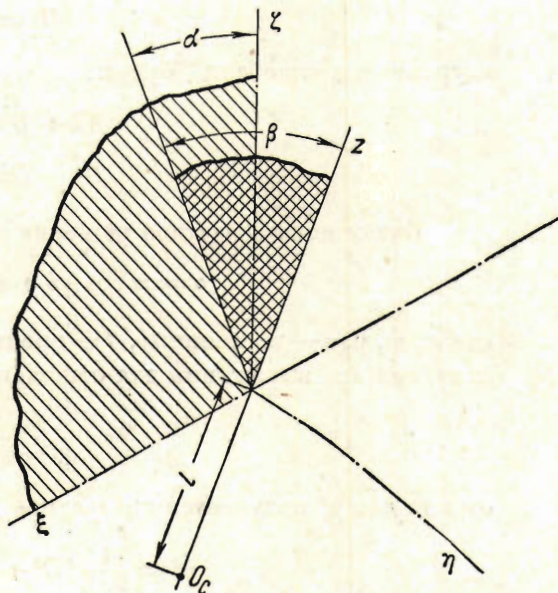
¹ Система координат — правая и все вращения и моменты считаются положительными против стрелки часов. Ось поворота β на рис. 2а не совсем совпадает с осью ξ , но при малых углах α, β это несущественно.

по осям ξ, η , равные произведениям моментов инерции на соответствующие угловые ускорения, взятые с обратными знаками, будут $A\ddot{\beta}, -A\ddot{\alpha}$. Гиростатические моменты равны произведениям *собственного момента* волчка $D = C\dot{\varphi}$ на угловые скорости прецессий $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$, совершаемых осью фигуры; направления этих моментов определяются тем условием, что они должны стремиться совмещать

ось фигуры с осью соответствующей прецессии. Поэтому прецессии $\dot{\alpha}$, направленной по оси η , соответствует гиростатический момент $D\dot{\alpha}$ по оси $-\xi$, а прецессии $\dot{\beta}$, направленной по оси $-\xi$, — момент $D\dot{\beta}$ по оси $-\eta$.



Фиг. 2а.



Фиг. 2б.

Таким образом, уравнения движения гирос-маятника будут:

$$\begin{aligned} lQ\dot{\beta} + A\ddot{\beta} - D\dot{\alpha} + M_{\xi} &= 0, \\ -lQ\dot{\alpha} - A\ddot{\alpha} - D\dot{\beta} + M_{\eta} &= 0, \end{aligned}$$

где M_{ξ}, M_{η} — моменты всех неучтенных выше внешних сил, которые могут действовать на волчок одновременно с силой тяжести. Иначе,

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + D\dot{\beta} + lQ\alpha &= M_{\eta}, \\ A\ddot{\beta} - D\dot{\alpha} + lQ\beta &= -M_{\xi}. \end{aligned} \tag{1}$$

А теперь нетрудно перейти к уравнению для гирос-горизонта Аншютца. Для этого последнего расстояния центра тяжести от кардановых осей ξ, η не одинаковы; обозначая их соответственно через q, p , мы должны заменить этими величинами плечо l в уравнениях (1). Кроме того, если, кроме массы самого

волчка, учесть еще массу карданова подвеса и гиро-камеры, то ясно, что во вращениях α , β принимают участие различные инертные массы, поэтому вместо одной величины A мы должны ввести вновь две различные величины A , B .

Таким образом, уравнения колебаний чувствительного элемента гиро-горизонта А н ш ю т т ца будут:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + D\dot{\beta} + pQ\alpha &= M_{\eta}, \\ B\ddot{\beta} - D\dot{\alpha} + qQ\beta &= -M_{\xi}. \end{aligned} \quad (2)$$

§ 3. Свободные колебания. В случае свободных колебаний мы должны положить

$$M_{\xi} = M_{\eta} = 0,$$

и уравнения колебаний будут:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + D\dot{\beta} + pQ\alpha &= 0, \\ B\ddot{\beta} - D\dot{\alpha} + qQ\beta &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать частное решение этих линейных уравнений в форме:

$$\alpha = u \cos(\mu t + \varepsilon), \quad \beta = w \sin(\mu t + \varepsilon), \quad (4)$$

где u , w , μ , ε — постоянные, t — время. Подставляя эти выражения в (3), мы получаем два выражения для отношения $w:u$, а именно:

$$\frac{w}{u} = \frac{D\mu}{A\mu^2 - pQ} = \frac{B\mu^2 - qQ}{D\mu};$$

отсюда для μ^2 получается квадратное уравнение, которое дает:

$$\mu^2 = \frac{1}{2AB} [D^2 + (Aq + Bp)Q \pm R],$$

где

$$R = \pm \sqrt{D^4 + 2(Aq + Bp)QD^2 + (Aq - Bp)^2 Q^2}. \quad (5)$$

Для биномов

$$A\mu^2 - pQ, \quad B\mu^2 - qQ,$$

входящих в выражения для $w:u$, получается:

$$\begin{aligned} A\mu^2 - pQ &= \frac{\pm 1}{2B} \{ \pm [D^2 + (Aq - Bp)Q] + R \}, \\ B\mu^2 - qQ &= \frac{\pm 1}{2A} \{ \pm [D^2 + (-Aq + Bp)Q] + R \}, \end{aligned}$$

причем следует заметить, что обе фигурные скобки всегда положительны.

Так как из выражения для $w:u$ при $D\mu > 0$ вытекает:

$$\frac{w}{u} = \pm \sqrt{\frac{D\mu}{A\mu^2 - pQ} \frac{B\mu^2 - qQ}{D\mu}},$$

где знак перед радикалом одинаков со знаком, взятым в формуле для μ^2 , то, обозначая

$$r = \frac{u}{\sqrt{\pm 2AB(B\mu^2 - qQ)}} = \frac{\pm u}{\sqrt{\pm 2AB(A\mu^2 - pQ)}},$$

мы имеем:

$$u = r \sqrt{\pm 2AB(B\mu^2 - qQ)}, \quad u = \pm r \sqrt{\pm 2AB(A\mu^2 - pQ)}.$$

Выписывая отдельно величины, соответствующие нижним и верхним знакам, мы получаем для угловой частоты колебаний два возможных значения:

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{D^2 + (Aq + Bp)Q - R}{2AB}}, \\ \mu' &= \sqrt{\frac{D^2 + (Aq + Bp)Q + R}{2AB}}, \end{aligned} \quad (6)$$

причем мы условимся приписывать μ и μ' тот же знак, какой имеет D . Для констант u , u' получаются две системы значений:

$$\begin{aligned} u &= r \sqrt{B[R - D^2 + (Aq - Bp)Q]}, \\ u &= -r \sqrt{A[R - D^2 - (Aq - Bp)Q]}, \\ u' &= r' \sqrt{B[R + D^2 - (Aq - Bp)Q]}, \\ u' &= r' \sqrt{A[R + D^2 + (Aq - Bp)Q]}, \end{aligned} \quad (7)$$

где r , r' остаются произвольными.

Общее решение уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= u \cos(\mu t + \epsilon) + u' \cos(\mu' t + \epsilon'), \\ \beta &= u \sin(\mu t + \epsilon) + u' \sin(\mu' t + \epsilon') \end{aligned} \quad (8)$$

и содержит четыре произвольные постоянные: r , r' , ϵ , ϵ' .

Для наглядного истолкования результатов удобен следующий способ представления. Если из некоторой точки пространства провести полупрямую, параллельную мгновенному положению положительной оси z , то в пересечении с единичной сферой, имеющей центром ту же точку пространства, эта полупрямая дает некоторую точку E , которая при движении волчка будет описывать сферическую кривую. При малых углах α , β часть сферы вблизи ее верхнего полюса P можно заменить касательной плоскостью, проведенной через P . Тогда α , β можно рассматривать как прямоугольные координаты точки E в этой плоскости, отнесенные к осям, параллельным ξ , η .

При таком представлении решение (8) определяет движение точки E , получающееся путем суперпозиции двух эллиптических движений: некоторая точка N движется вокруг полюса P по эллипсу с полуосями u , u' , а точка E обращается вокруг N по другому эллипсу с полуосями u' , u . Периоды обращения по этим эллипсам суть:

$$T = \frac{2\pi}{\mu}, \quad T' = \frac{2\pi}{\mu'},$$

а эксцентрисические аномалии

$$\mu t + \epsilon, \quad \mu' t + \epsilon'$$

растут пропорционально времени. Так как $\mu < \mu'$, то $T > T'$, т. е. первое движение есть сравнительно *медленная прецессия*, а второе — *быстрая нутация*.

Приближенное решение для быстро вращающегося волчка с большим собственным моментом $D = C\dot{\phi}$ можно получить, пренебрегая, как это обычно делается в теории технических волчков, *маятниковыми членами* $A\ddot{\alpha}$, $B\ddot{\beta}$. Мы найдем тогда:

$$\mu = \frac{Q\sqrt{pq}}{D} \quad (9)$$

и

$$\frac{w}{u} = -\sqrt{\frac{q}{p}},$$

так что

$$u = r\sqrt{q}, \quad w = -r\sqrt{p}; \quad (10)$$

общее решение имеет форму (4) и включает только две произвольные постоянные: r , ϵ . Мы имеем, следовательно, прецессионное движение с периодом

$$T = \frac{2\pi D}{Q\sqrt{pq}} \quad (11)$$

по эллипсу, полуоси которого обратно пропорциональны корням квадратным из величин p , q . Направление прецессионного обращения противоположно направлению собственного вращения. Нутации это приближенное решение не дает.

Другое приближение, не столь грубое, можно получить, если не пренебрегать совсем маятниковыми членами, а считать лишь, что при большом D с отношениями

$$l = \frac{AqQ}{D^2}, \quad m = \frac{BpQ}{D^2} \quad (12)$$

можно обращаться, как с величинами малыми. Мы имеем тогда, разлагая в ряды:

$$\begin{aligned} R &= D^2 \sqrt{1 + 2(l+m) + (l-m)^2} = \\ &= D^2 [1 + l + m - 2lm + 2lm(l+m) + \dots], \\ \mu &= \frac{D}{\sqrt{2AB}} \sqrt{1 + l + m - \frac{R}{D^2}} \simeq \frac{Q\sqrt{pq}}{D} \left[1 - \frac{1}{2}(l+m) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mu' = \frac{D}{\sqrt{2AB}} \sqrt{1 + l + m + \frac{R}{D^2}} \simeq \frac{D}{\sqrt{AB}} \left[1 + \frac{1}{2}(l+m) \right]. \quad (14)$$

Для отношения $\mu' : \mu$, определяющего число нутаций на один прецессионный оборот, находим:

$$\frac{\mu'}{\mu} \simeq \frac{1}{\sqrt{lm}} (1 + l + m). \quad (15)$$

Затем:

$$\begin{aligned} u &= C\sqrt{q} \left(1 - \frac{1}{2}m \right), & u' &= C'\sqrt{B} \left(1 + \frac{1}{2}m \right), \\ w &= -C\sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{2}l \right), & w' &= C'\sqrt{A} \left(1 + \frac{1}{2}l \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $Q = r \sqrt{2ABQ}$, $Q' = r' D \sqrt{2}$ — новые произвольные постоянные. Общее решение можно взять в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= Q \sqrt{q} \cos(\mu t + \epsilon) + Q' \sqrt{B} \cos(\mu' t + \epsilon'), \\ \xi &= -Q \sqrt{p} \sin(\mu t + \epsilon) + Q' \sqrt{A} \sin(\mu' t + \epsilon'). \end{aligned} \quad (17)$$

Определяя произвольные постоянные через начальные значения углов α , β и их первых производных при $t=0$, мы имеем сначала:

$$\begin{aligned} Q \cos \epsilon &= \frac{\alpha_0 \mu' \sqrt{A} - \dot{\beta}_0 \sqrt{B}}{\mu' \sqrt{Aq} + \mu \sqrt{Bp}}, & Q' \cos \epsilon' &= \frac{\alpha_0 \mu \sqrt{p} + \dot{\beta}_0 \sqrt{q}}{\mu' \sqrt{Aq} + \mu \sqrt{Bp}}, \\ Q \sin \epsilon &= \frac{-\beta_0 \mu' \sqrt{B} - \dot{\alpha}_0 \sqrt{A}}{\mu' \sqrt{Aq} + \mu \sqrt{Bp}}, & Q' \sin \epsilon' &= \frac{\beta_0 \mu \sqrt{q} - \dot{\alpha}_0 \sqrt{p}}{\mu' \sqrt{Aq} + \mu \sqrt{Bp}} \end{aligned}$$

или, замечая, что так как $\mu : \mu'$ мало, то в знаменателях можно сохранить лишь члены, содержащие μ' :

$$\begin{aligned} Q \cos \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\alpha_0 - \frac{\dot{\beta}_0}{\mu'} \sqrt{\frac{B}{A}} \right), & Q' \cos \epsilon' &= \frac{1}{\mu' \sqrt{A}} \left(\alpha_0 \mu \sqrt{\frac{p}{q}} + \dot{\beta}_0 \right), \\ Q \sin \epsilon &= -\frac{1}{\sqrt{p}} \left(\beta_0 + \frac{\dot{\alpha}_0}{\mu'} \sqrt{\frac{A}{B}} \right), & Q' \sin \epsilon' &= \frac{1}{\mu' \sqrt{B}} \left(\beta_0 \mu \sqrt{\frac{q}{p}} - \dot{\alpha}_0 \right). \end{aligned}$$

Ограничиваясь для простоты случаем, когда

$$\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0,$$

так что начальная скорость точки E равна нулю, мы получаем:

$$Q = \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{q} + \frac{\beta_0^2}{p}}, \quad Q' = \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\frac{\alpha_0^2 p}{Aq} + \frac{\beta_0^2 q}{Bp}} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{w'}{w} &= \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\frac{1}{Aq} \frac{Bp^2 \alpha_0^2 + Aq^2 \beta_0^2}{p\alpha_0^2 + q\beta_0^2}} (1 + m), \\ \frac{w'}{w} &= -\frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\frac{1}{Bp} \frac{Bp^2 \alpha_0^2 + Aq^2 \beta_0^2}{p\alpha_0^2 + q\beta_0^2}} (1 + l). \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда видно, что размеры эллипса нутации вообще малы по сравнению с размерами эллипса прецессии, ибо отношения соответственных полуосей суть величины порядка малого отношения $\mu : \mu'$.

Для периодов прецессии и нутации мы имеем выражения

$$T = \frac{2\pi D}{Q \sqrt{pq}} \left[1 + \frac{1}{2} (l + m) \right], \quad T' = \frac{2\pi \sqrt{AB}}{D} \left[1 - \frac{1}{2} (l + m) \right], \quad (20)$$

так что период прецессии можно считать обратно пропорциональным среднему геометрическому \sqrt{pq} от плечей p , q ; для получения малого периода достаточно сделать большим одно из этих плечей.

Выражение для T в основном согласуется с полученным ранее более грубым выражением (11).

§ 4. **Вынужденные колебания.** Рассмотрим теперь вынужденные колебания, которые совершает прибор в случае, когда его футляр получает от судна какие-либо ускорения.

Обозначая через a , b проекции ускорения на оси ξ , η , мы должны, кроме действующих на волчок моментов силы тяжести, учесть еще и моменты сил инерции, происходящие от ускорения, а именно:

$$M_{\xi} = -qQ \frac{b}{g}, \quad M_{\eta} = pQ \frac{a}{g}. \quad (21)$$

Ускорение предположим периодическим (качка) и возьмем a , b в виде:

$$a = W \cos \Psi \sin nt, \quad b = W \sin \Psi \sin nt, \quad (22)$$

где W — наибольшая величина ускорения, Ψ — его азимут, n — угловая частота.

Уравнения колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned} (A\ddot{\alpha} + pQ\alpha) + D\dot{\beta} &= pQ \frac{W}{g} \cos \Psi \sin nt, \\ -D\dot{\alpha} + (B\ddot{\beta} + qQ\beta) &= qQ \frac{W}{g} \sin \Psi \sin nt. \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая

$$\alpha = \mathcal{K} \frac{W}{g} \sin(nt + \gamma), \quad \beta = \mathcal{Z} \frac{W}{g} \sin(nt + \delta), \quad (24)$$

подставляя в (23) и вводя величины

$$\mu = \frac{Q \sqrt{pq}}{D}, \quad \mu' = \frac{D}{\sqrt{AB}},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cos \gamma &= \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{n^2}{\mu\mu'} \sqrt{\frac{Bp}{Aq}} \right) \cos \Psi, \\ \mathcal{K} \sin \gamma &= -\frac{1}{\Delta} \frac{n}{\mu} \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \Psi, \\ \mathcal{Z} \cos \delta &= \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{n^2}{\mu\mu'} \sqrt{\frac{Aq}{Bp}} \right) \sin \Psi, \\ \mathcal{Z} \sin \delta &= \frac{1}{\Delta} \frac{n}{\mu} \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \Psi, \\ \Delta &= \left(1 - \frac{n^2}{\mu\mu'} \sqrt{\frac{Aq}{Bp}} \right) \left(1 - \frac{n^2}{\mu\mu'} \sqrt{\frac{Bp}{Aq}} \right) - \frac{n^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если пренебречь здесь членами, содержащими в знаменателе большую величину μ' , что равносильно отбрасыванию маятниковых членов в уравнениях (23), то мы найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{\cos^2 \Psi + \left(\frac{n}{\mu} \right)^2 \frac{q}{p} \sin^2 \Psi}, \\ \mathcal{Z} &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{\sin^2 \Psi + \left(\frac{n}{\mu} \right)^2 \frac{p}{q} \cos^2 \Psi}, \\ \Delta &= 1 - \left(\frac{n}{\mu} \right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Угол $\vartheta = \frac{W}{g}$ представляет собой статическое отклонение отвеса под действием ускорения W ; отвлеченные величины \mathcal{K} , \mathcal{Z} представляют собой, как видно из (24), коэффициенты динамического увеличения или уменьшения этого угла в приборе Аншютца.

§ 5. **Практические выводы.** Пусть ось ξ есть именно та карданова ось, которая устанавливается в вертикальной плоскости наблюдаемого светила. Согласно сказанному выше мы должны стремиться получить сравнительно небольшой период прецессии $T = \frac{2\pi}{\mu}$, что может быть достигнуто надлежащим подбором произведения плечей pq . С другой стороны, для получения малых отклонений α в плоскости светила делают q , т. е. плечо моментов вокруг оси ξ , малым по сравнению с p . Правильность этого соображения должна подтверждаться малостью динамического коэффициента \mathcal{K} , соответствующего углу α .

Рассматривая первое из выражений (26) и сравнивая его с выражением

$$\mathcal{K}_0 = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\cos^2 \Psi + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2 \sin^2 \Psi}, \quad (27)$$

которое получилось бы при $p=q$, т. е. для обыкновенного gyro-маятника, мы видим, что и действительно $\mathcal{K} < \mathcal{K}_0$, ибо мы сделали $\frac{q}{p} < 1$; в этом и заключается преимущество прибора Аншютца. Оно мало существенно лишь при малых $|\sin \Psi|$, т. е. для ускорений, направления которых мало отклоняются от вертикальной плоскости наблюдаемого светила. Во всех остальных случаях и в особенности для ускорений, почти перпендикулярных к этой плоскости, это преимущество может быть путем надлежащего подбора отношения $\frac{q}{p}$ сделано весьма существенным.

Мы приходим, таким образом, к общему заключению, что, подбирая произведение pq , мы можем получить желательную величину периода прецессии, а подбирая отношения $\frac{q}{p}$, — получить приемлемую величину динамического коэффициента \mathcal{K} . Но выбором величин pq , $\frac{q}{p}$ определяются и сами плечи p , q .

THEORY OF THE ANSCHÜTZ GYRO-HORIZON

B. W. BULGAKOV

(Moscow)

(Summary)

The latitude of a place is determined from the altitude of a celestial body. The instrument of *Anschütz* serves to fix the position of the horizontal plane by the altitude measurements on a ship when the apparent horizon is invisible. It can be described as a gyro-pendulum mounted in gimbals in such a way that the gimbal axes do not intersect but are in the different distances p , q from the

centre of gravity of the gyro (fig. 1). The author of the article shows, how the equations of motion of the gyro can be formed (eq. 2) and proceeds to their integration. It is shown also that the period of precession is inversely proportional to \sqrt{pq} so that a short period can be obtained by making one of the arms p, q comparatively long. Such a period is adequate for the elimination of the influence of precession from the results of observations. On the other hand, it is shown that if the other arm is made comparatively short, the inclination of the gyro axis in the vertical plane of the observed celestial body will be very small as compared with the analogous inclination in the case of the ordinary gyro-pendulum. These two peculiarities with regard to period and inclination constitute the great advantage of the Anschütz gyro-horizon.
