

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ  
В ЖИДКОСТИ**

**П. К. ИШКОВ**

(Свердловск)

В некоторых технических вопросах бывает важно знать, как влияет на частоту поперечных колебаний стержня жидкость, в которую он погружен.

На основании физических соображений можно качественно оценить это влияние; оно, несомненно, сказывается в уменьшении частот по сравнению с частотами колебаний в пустоте, так как при колебании стержня в жидкости с ним вместе движется и окружающая среда и движение ее создает эффект, который обычно называется влиянием присоединенной массы, т. е. увеличивается как бы масса самого тела, в данном случае стержня, при неизменных упругих свойствах последнего.

Выяснению количественной стороны дела служат настоящая работа, которая распадается на две части: теоретическую и экспериментальную.

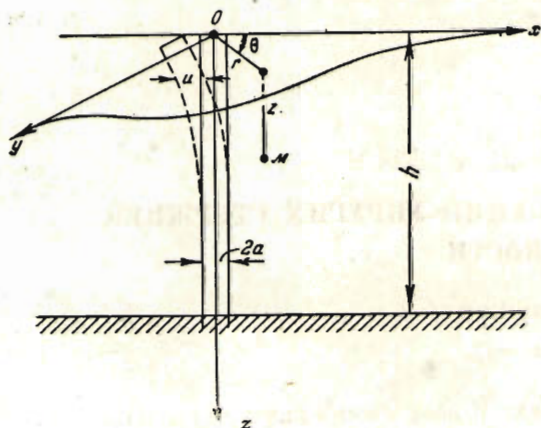
В первой части приближенно решается задача о колебании упругого стержня в покоящейся жидкости и определяются частоты этого колебания, уменьшенные благодаря присутствию жидкой среды.

Эксперименты были проведены в гидродинамической лаборатории механического отделения МГУ и не имели целью систематических массовых испытаний над колебаниями стержней в жидкости. При имевшемся в наличии оборудовании лаборатории пришлось ограничиться немногочисленными испытаниями, которые подтверждают возможность и целесообразность упрощающих предположений, лежащих в основе теоретической части работы.

**Вычисление частот колебаний стержня в жидкости.** Наиболее целесообразной, удовлетворяющей как интересам практики, так и возможностям теории, пришлось считать следующую постановку указанной задачи.

Упругий, тонкий стержень совершает малые колебания в неограниченном слое покоящейся жидкости глубины  $h$ , равной длине стержня; верхняя

граница слоя — свободная поверхность, нижняя — горизонтальное неподвижное дно. Стержень укреплен вертикально, способы закрепления концов могут быть различны. Стержень может быть консолью (фиг. 1), оба конца могут быть просто оперты или оба заделаны, один может быть оперт, а другой заделан и т. д. Поперечное сечение стержня — круг радиуса  $a$ , колебание происходит в плоскости чертежа, все же остальные обозначения и расположение координатных осей видны из чертежа. Жидкость считается идеальной, движение ее трехразмерным и потенциальным, без срыва струй с поверхности стержня.



Фиг. 1.

Таким образом, уменьшение частот колебаний, обусловленное сопротивлением трения окружающей жидкости, считается незначительным, величиной которого можно пренебречь.

Все выкладки сделаны для случая консольного стержня, и из хода вычислений видна возможность применения этого же метода для других способов закрепления концов.

Введем обозначения:  $E$  — модуль Юнга материала стержня,  $\rho_1$  — плотность этого материала,  $F$  — площадь поперечного сечения стержня,

$u$  — упругое, малое перемещение стержня из положения равновесия (параллельное оси  $x$ ),  $I$  — момент инерции площади поперечного сечения стержня.

Если стержень колеблется в пустоте, то перемещение какой-либо точки оси стержня удовлетворяет известному уравнению в частных производных четвертого порядка вида:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \rho_1 F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Интеграл этого уравнения ищут в виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Z_n, \quad (2)$$

где

$$q_n = A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t$$

главная координата, функция только времени, а  $Z_n$  — нормальная функция, зависящая только от  $z$ .

Подставив  $u$  из (2) в уравнение (1), найдем, что  $Z_n$  должно удовлетворять обыкновенному уравнению вида:

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{\rho_1 F p_n^2}{EI} Z_n = 0, \quad (3)$$

где  $p_n^2$  — квадрат неизвестной пока частоты колебания.

Общий интеграл уравнения (3) имеет вид:

$$Z_n = C_1 \cos \frac{k_n}{h} z + C_2 \operatorname{ch} \frac{k_n}{h} z + C_3 \sin \frac{k_n}{h} z + C_4 \operatorname{sh} \frac{k_n}{h} z, \quad (4)$$

где  $k_n$ , ради сокращения, обозначает:

$$k_n = h \sqrt[4]{\frac{\rho_1 p n^2 F}{EI}}.$$

Четыре произвольные постоянные этого интеграла определяются из условия закрепления концов стержня.

Эти условия для определения четырех постоянных  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) дают четыре однородных линейных уравнения; условием существования корней этих уравнений, одновременно отличных от нуля, является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов этих уравнений. Последнее равенство дает уравнение для определения неизвестной частоты.

Так, в случае консольного стержня (фиг. 1) имеем такие четыре условия, на концах:

$$\left. \begin{array}{l} Z_n = 0 \\ \frac{dZ_n}{dz} = 0 \end{array} \right\} \text{при } z = h, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^3 Z_n}{dz^3} = 0 \end{array} \right\} \text{при } z = 0. \quad (5)$$

Частотное уравнение, соответствующее этим граничным условиям, имеет вид:

$$\Delta = \cos k \operatorname{ch} k = -1. \quad (6)$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесчисленное число корней, первые шесть из которых были вычислены с большой степенью точности Rayleigh (The Theory of Sound) и имеют такие значения:

$$\begin{array}{lll} k_1 = 1.875\dots & k_3 = 7.855\dots & k_5 = 14.137\dots \\ k_2 = 4.694\dots & k_4 = 10.996\dots & k_6 = 17.279\dots \end{array}$$

Зная  $k_n$ , частоту определим из соотношения

$$k_n = h \sqrt[4]{\frac{\rho_1 F p n^2}{EI}}, \quad (n=1, 2, 3, \dots \infty).$$

Для этого же случая консольного стержня  $C_{in}$  будут иметь такие значения:

$$\begin{aligned} C_{1n} &= C_{2n}; \quad C_{3n} = C_{4n} \\ C_{1n} &= \cos k_n + \operatorname{ch} k_n, \\ C_{3n} &= \sin k_n - \operatorname{sh} k_n \end{aligned} \quad (7)$$

и нормальная функция  $Z_n$  принимает вид:

$$Z_n = C_{1n} \left( \cos \frac{k_n}{h} z + \operatorname{ch} \frac{k_n}{h} z \right) + C_{3n} \left( \sin \frac{k_n}{h} z + \operatorname{sh} \frac{k_n}{h} z \right). \quad (8)$$

Так решается задача о свободных колебаниях стержня в пустоте, но если он погружен в жидкость, решение усложняется.

В силу предположений, сделанных вначале относительно рода жидкости и характера обтекания стержня, определение движения жидкости, окружающей колеблющийся в ней стержень, сводится к определению потенциала скоростей  $\varphi(r, z, t, \theta)$ , который удовлетворяет в каждой точке внутри жидкости уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (I)$$

при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{при } r \rightarrow \infty); \quad (II)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (\text{при } z = h); \quad (III)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{при } z = 0); \quad (IV)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta \quad (\text{при } r = a). \quad (V)$$

Условие (II) имеет место в силу того, что жидкость предполагается покоящейся на бесконечности, условия же (III) и (V) выражают равенства скоростей жидкости по нормали к твердым стенкам внутри жидкости проекциям скоростей самих стенок на ту же нормаль.

В то время как эти граничные условия являются обычными при изучении движения идеальной жидкости и не требуют оговорок, условие (IV) на свободной поверхности не общеизвестно, а заменяет обычное волновое условие для тяжелой жидкости. Впервые условие (IV) было применено проф. Л. С. Лейбензонем при изучении колебаний плотин, и соображения, оправдывающие применение этого условия для свободной поверхности жидкости, суть следующие.

Известно, что в случае тяжелой и несжимаемой жидкости во всем пространстве, занятом этой жидкостью, имеет место интеграл Лагранжа:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz - \frac{1}{2} q^2 + \psi(t),$$

где  $q$  — скорость жидкости, а  $\psi(t)$  — произвольная функция времени. Пренебрегая силой тяжести, квадратом скорости и отбрасывая  $\psi(t)$  получим:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Так как на свободной поверхности давление остается постоянным (которое, ради простоты вычисления, можно положить равным нулю), получаем  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  при  $z = 0$ .

Возьмем потенциал скоростей в таком виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \sum_{s=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{ns} f(r) \sin \frac{\pi s}{2h} z. \quad (9)$$

При таком  $\varphi$  легко убедиться, что условия (III) и (IV) удовлетворены. Условие (V) будет удовлетворено впоследствии подбором  $A_{ns}$ , а условие (II)

позволит подобрать  $f(r)$  так, чтобы  $\varphi(r, z, t, \theta)$  одновременно удовлетворяло бы уравнению (1). Подставляя  $\varphi$  из (9) в уравнение (1), для  $f(r)$  получаем такое уравнение:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2 s^2}{4h^2} \right) f(r) = 0.$$

Если сделать замену независимой переменной из соотношения

$$r_1 = \frac{\pi s i}{2h} r,$$

то последнее уравнение примет вид:

$$r_1^2 \frac{d^2 f}{dr_1^2} + r_1 \frac{df}{dr_1} + (r_1^2 - 1) f = 0. \quad (10)$$

Стало быть в качестве функции  $f(r_1)$  можно взять функцию Hankel'a первого рода и первого порядка от мнимого аргумента

$$f(r_1) = H_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} r \right) = J_1(r_1) + i Y_1(r_1), \quad (11)$$

где  $J_1(r_1)$  — цилиндрическая функция Bessel'a, а  $Y_1(r_1)$  — цилиндрическая функция Neuman'a.

При таком выборе функции  $f(r)$  потенциал скоростей принимает вид:

$$\varphi = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{s=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{ns} H_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} r \right) \sin \frac{\pi s}{2h} z \quad (12)$$

и удовлетворяет условию (II), так как

$$H_1^{(1)}(ix) \rightarrow 0, \quad \dot{H}_1^{(1)}(ix) \rightarrow 0,$$

если  $x \rightarrow \infty$  (Lahnke und Emden, S. 101).

Дальнейшее решение задачи должно было бы идти в таком порядке.

Определяем упругие смещения  $u$  из уравнения вынужденных колебаний стержня:

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} + \rho_1 F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r=a} a \cos \theta d\theta. \quad (x)$$

Взяв попрежнему

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Z_n,$$

для  $Z_n$  находим уравнение

$$EI \frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \rho_1 F p_n^2 Z_n = \pi a \rho p_n^2 \sum_{s=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{ns} H_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} a \right) \sin \frac{\pi s}{2h} z. \quad (\beta)$$

Общий интеграл этого уравнения равен общему интегралу уравнения ( $\beta$ ) без правой части, сложенному с частным решением полного уравнения.

Стало быть  $Z_n$  выражается через четыре произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и все  $A_{ns}$  ( $s = 1, 3, 5, \dots$ ). Коэффициенты  $A_{ns}$  в силу условия (V) могут быть определены по методу Фурье через все  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Внося их в выражение для  $Z_n$ , требуем, чтобы  $Z_n$  удовлетворяло условиям заделки. Это опять приведет к четырем однородным уравнениям для определения  $C_i$ ; равенство нулю детерминанта из коэффициентов этого уравнения даст уравнение для определения искомой частоты  $p_n$ .

Однако такой путь приводит к большим затруднениям при разрешении частотного уравнения, поэтому был избран другой приближенный путь, в основном сводящийся к следующему.

Допустим, что нормальные функции уравнения ( $z$ ) не существенно отличаются от нормальных функций уравнения (1), т. е. что формы стержня, колеблющегося в жидкости, почти такие же, что и формы стержня, колеблющегося в пустоте.

На этом основании из условия (V) получаем соотношение

$$Z_n = \sum_{s=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{ns} \frac{\pi s i}{2h} \dot{H}_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} a \right) \sin \frac{\pi s}{2h} z. \quad (13)$$

Откуда находим:

$$A_{ns} = \frac{4}{\pi s i \dot{H}_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} a \right)} \int_0^h Z_n \sin \frac{\pi s}{2h} z dz. \quad (14)$$

Для случая консольного стержня (фиг. 1)  $A_{ns}$  имеет вид:

$$A_{ns} = \frac{8h [C_{1n} (P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n} (R_{ns} + T_{ns})]}{\pi s i \dot{H}_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} a \right)}, \quad (15)$$

причем коэффициенты  $P_{ns}$ ,  $Q_{ns}$ ,  $R_{ns}$ ,  $T_{ns}$  имеют такие значения:

$$\begin{aligned} P_{ns} &= \frac{\pi s - 2k_n \sin \frac{\pi s}{2} \sin k_n}{(\pi s)^2 - 4k_n^2}, \\ Q_{ns} &= \frac{\pi s + 2k_n \sin \frac{\pi s}{2} \operatorname{sh} k_n}{(\pi s)^2 + 4k_n^2}, \\ R_{ns} &= \frac{2k_n \sin \frac{\pi s}{2} \cos k_n}{(\pi s)^2 - 4k_n^2}, \\ T_{ns} &= \frac{2k_n \sin \frac{\pi s}{2} \operatorname{ch} k_n}{(\pi s)^2 + 4k_n^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь потенциал скоростей принимает такой вид:

$$\varphi = \frac{8h \cos \theta}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_j \sum_{s=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{C_{1n} (P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n} (R_{ns} + T_{ns})}{s} \frac{\dot{H}_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} r \right)}{\dot{H}_1^{(1)} \left( \frac{\pi s i}{2h} a \right)} \sin \frac{\pi s}{2h} z. \quad (17)$$

Существенно заметить, что каждая из внутренних сумм представляет сумму равномерно сходящегося ряда при любых  $z$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ , так как сходится ряд:

$$\sum_{s=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \left| \frac{C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})}{s} \right|.$$

Отсюда же вытекает, что каждая из этих бесконечных сумм представляет непрерывную функцию, что, таким образом, можно утверждать и про потенциал  $\varphi$ .

Указанное легко обнаружить, если иметь в виду, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H_1^{(1)}(ix) = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

и отсюда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{H_1^{(1)}(ix)}{\dot{H}_1^{(1)}(ix)} = -1,$$

а вблизи  $x=0$  имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} H_1^{(1)}(ix) = -\frac{2}{\pi x}$$

и значит:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{H_1^{(1)}(ix)}{\dot{H}_1^{(1)}(ix)} = -x = 0.$$

Однако, являясь непрерывной функцией  $r$  и  $z$ , функция  $\varphi$  имеет производную по  $r$  с точкой разрыва первого рода при  $z=0$  и  $r=a$ .

Причину разрывности  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  следует видеть в условии  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta$  при  $r=a$  (условие V) и дальнейшем нечетном продолжении функции  $Z_n$ , которая не обращается в нуль в начале координат.

Скачок функции  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  постепенно, по мере роста  $r$ , затухает и при  $r \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  в силу свойств функции  $H_1^{(1)}(ir)$  и ее производной. Так как  $H_1^{(1)}(ir)$  и ее производная при  $r \rightarrow \infty$  обращаются в нуль, условие (II) является выполненным.

Определив движение жидкости вокруг стержня, можно частоту колебаний последнего определить следующим образом.

Составим уравнения движения системы (жидкость — стержень) в форме Лагранжа, считая, что внешние силы отсутствуют.

Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \tag{18}$$

Здесь для системы жидкость — стержень под  $T$  следует понимать живую силу как стержня, так и жидкости, а под  $V$  — потенциальную энергию только стержня. Пренебрежение потенциальной энергией жидкости оправдывается, с одной стороны, условием постоянства давления на свободной поверхности (условие IV), а с другой, конечно, весьма незначительным действием тяжести.

Если координаты  $q_n$  ( $n=1, 2, \dots, \infty$ ) главные для рассматриваемой системы, то уравнение (18) принимает вид:

$$(M_{жн} + m_{сн}) \ddot{q}_n + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0, \quad (19)$$

где  $M_{жн}$  — присоединенная масса жидкости, соответствующая  $n$ -й частоте и равная  $\frac{1}{q_n} \frac{\partial T_{ж}}{\partial \dot{q}_n}$ , а  $m_{сн}$  — обобщенная масса самого стержня, соответствующая той же  $n$ -й частоте.

Если бы стержень колебался в пустоте, то уравнение (19) приняло бы вид:

$$m_{сн} \ddot{q}_n + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \quad (20)$$

Откуда частота колебания была бы вычислена в форме

$$p_{0n}^2 = \frac{1}{m_{сн}} \frac{\partial V}{\partial q_n}. \quad (21)$$

При колебаниях стержня в жидкости вместо уравнения (21) имеет место уравнение

$$p_n^2 = \frac{1}{M_{жн} + m_{сн}} \frac{\partial V}{\partial q_n} = \frac{p_{0n}^2}{1 + \frac{M_{жн}}{m_{сн}}}$$

или

$$p_n^2 = p_{0n}^2 \left( 1 + \frac{\frac{\partial T_{ж}}{\partial \dot{q}_n}}{\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_n}} \right)^{-1}, \quad (22)$$

где  $T_{ж}$  обозначает живую силу только жидкости, а  $T_c$  — живую силу только стержня.

Таким образом, дальнейшие вычисления зависят от определения живой силы жидкости, окружающей стержень.

Живая сила определяется (H. Lamb, Hydrodynamics) по формуле

$$\begin{aligned} 2T_{ж} &= \rho \iiint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \\ &= -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \rho \kappa_1 \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_1 - \rho \kappa_2 \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_2 - \dots, \end{aligned} \quad (23_1)$$

где  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  и т. д. обозначают циклические постоянные. Пространство, занятное жидкостью, двусвязное, но при обходе по контуру, охватывающему стержень,  $\varphi$  оказывается однозначной функцией, а потому формула (23<sub>1</sub>) принимает вид:

$$T_{ж} = -\frac{\rho}{2} \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (23_2)$$



Подставляя сюда  $\varphi$ , для  $T_{ж}$  получаем следующее выражение:

$$T_{ж} = i 8ah^2 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2 \sum_{s=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{[C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]^2}{s} \frac{H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}{\dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)} +$$

$$+ i 8ah^2 \rho \sum_{j, k}^{\infty} \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{s=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{[C_{1k}(P_{ks} + Q_{ks}) + C_{3k}(R_{ks} + T_{ks})][C_{1j}(P_{js} + Q_{js}) + C_{3j}(R_{js} + T_{js})]}{s} \times$$

$$\times \frac{H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}{\dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}. \quad (24)$$

Кинетическая энергия самого стержня вычислится по формуле

$$T_c = \frac{\rho_1 F}{2} \int_0^h \dot{u}^2 dz = \frac{\rho_1 F}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2 \int_0^h Z_n^2 dz. \quad (25)$$

Пусть теперь стержень возбужден так, что существует только первый тип колебаний, либо только второй и т. д.

Тогда выражение живой силы жидкости (24) будет содержать только один член, соответствующий имеющейся форме колебаний.

Такая постановка вопроса соответствует сделанному уже предположению о близости форм колебаний стержня в пустоте и в жидкости и удовлетворяет задаче о расчете такого стержня на резонанс.

Подставляя теперь при таком предположении  $T_{ж}$  и  $T_c$  из (24) и (25) в уравнение (22), получаем  $n$ -ю частоту стержня, колеблющегося в жидкости, в виде

$$p_n^2 = \frac{p_{0n}^2}{1 + \frac{d \cdot h \rho}{F \rho_1} K_n}, \quad (26)$$

где  $d = 2a$  — диаметр стержня, а  $K_n$  имеет значение:

$$K_n = \frac{\sum_{s=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{[C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]^2}{s} \frac{H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}{\frac{1}{i} \dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}}{\frac{4}{h} \int_0^h Z_n^2(z) dz}$$

В случае консольного стержня, у которого конец  $z = h$  заделан, имеем:

$$\int_0^h Z_n^2 dz = \frac{h}{4} [Z_n''(h)]^2 = h \sin^2 k_n \operatorname{sh}^2 k_n$$

(Rayleigh, The Theory of Sound, vol. 1; Тимошенко, Теория колебания в инженерном деле, стр. 226).

На этом основании коэффициент  $K_n$  примет вид:

$$K_n = \frac{8 \sum_{s=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{[C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]^2 \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}{s}}{\sin^2 k_n \operatorname{sh}^2 k_n} \frac{1}{i} \dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right). \quad (27)$$

Чтобы оценить величину коэффициента  $K_n$ , разложим  $Z_n$  в ряд Фурье по  $\sin \frac{\pi s}{2h} z$ , имеем:

$$Z_n = C_{1n} \left( \cos \frac{k_n}{h} z + \operatorname{ch} \frac{k_n}{h} z \right) + C_{3n} \left( \sin \frac{k_n}{h} z + \operatorname{sh} \frac{k_n}{h} z \right) = \sum_{s=1,3,5\dots}^{\infty} a_{ns} \sin \frac{\pi s}{2h} z$$

и, возводя обе части равенства в квадрат и интегрируя в пределах от 0 до  $h$ , получим:

$$\int_0^h Z_n^2 dz = \sum_{s=1,3,5\dots}^{\infty} a_{ns}^2 \frac{h}{2};$$

но из формул (13) и (15) следует, что

$$a_{ns} = 4 [C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]$$

и стало быть:

$$\int_0^h Z_n^2 dz = 8h \sum_{s=1,3,5\dots}^{\infty} [C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]^2;$$

или

$$\sin^2 k_n \operatorname{sh}^2 k_n = 8 \sum_{s=1,3,5\dots}^{\infty} [C_{1n}(P_{ns} + Q_{ns}) + C_{3n}(R_{ns} + T_{ns})]^2. \quad (28)$$

Из (27) и (28) видно, что  $K_n$  меньше единицы, так как отношение

$$\frac{H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}{\frac{1}{i} \dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right)}$$

всегда, при любом  $a$  и  $s$ , положительно, меньше единицы, при неограниченном возрастании  $a$  стремится к единице, а при убывании  $a$  до нуля также стремится к нулю.

Величина  $K_n$  безразмерная и, как видно, зависит от отношения радиуса стержня к его длине.

Для вычисления  $K_n$  приведем некоторые числовые данные.

Как видно из (27), для этой цели нужны:

$$\sin k_n, \cos k_n, \operatorname{sh} k_n, \operatorname{ch} k_n, H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right), \dot{H}_1^{(1)}\left(i \frac{\pi s}{2h} a\right), \frac{H_1^{(1)}}{\dot{H}_1^{(1)}}$$

при различных значениях  $s$ .

$k_n$	$\sin k_n$	$\cos k_n$	$\operatorname{sh} k_n$	$\operatorname{ch} k_n$
1.875	0.964	0.299	3.184	3.237
4.694	-0.999	-0.012	54.695	54.704
7.855	0.999	0.004	287.965	287.985
10.996	-0.999	-0.002	29 937.000	29 937.000
14.137	0.539	0.842	664 541.000	664 541.000
17.279	-0.538	-0.843	16 302 887.000	16 302 887.000

(Hayashi, Sieben und mehrstellige Tafeln der Kreis und Hyperbelfunktionen).

$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$	$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$	$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$	$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$
0.0	$\infty$	1.0	0.3832	2.0	0.0890	3.0	0.0256
0.2	3.0405	1.2	0.2767	2.2	0.0687	3.2	0.0201
0.4	1.3906	1.4	0.2043	2.4	0.0533	3.4	0.0159
0.6	0.8294	1.6	0.1532	2.6	0.0416	3.6	0.0126
0.8	0.5486	1.8	0.1163	2.8	0.0325	3.8	0.0099
						4.0	0.0079

(Lahnke und Emden, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven).

Для производной  $H_1^{(1)}(z)$  по  $z$  имеем:

$$\frac{dH_1^{(1)}(z)}{dz} = H_0^{(1)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(1)}(z)$$

(Watson, Theory of Bessel Functions, p. 74, f. 5).

Из этой формулы имеем:

$$\frac{dH_1^{(1)}(ix)}{idx} = H_0^{(1)}(ix) - \frac{1}{ix} H_1^{(1)}(ix)$$

и окончательно:

$$\frac{dH_1^{(1)}(ix)}{dx} = iH_0^{(1)}(ix) - \frac{1}{x} H_1^{(1)}(ix).$$

Необходимое число точек для построения графика  $\frac{H_1^{(1)}(ix)}{\dot{H}_1^{(1)}(ix)}$  находится в таблице

$x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.4
$\frac{dH_1^{(1)}(ix)}{dx}$	16.316	4.189	1.893	1.047	0.651	0.301	0.156	0.067
$\frac{H_1^{(1)}(ix)}{\dot{H}_1^{(1)}(ix)}$	0.187	0.332	0.438	0.525	0.594	0.675	0.739	0.801

В качестве примера приводим определение  $K_1$ .

Так как  $K_1$  зависит от отношения радиуса стержня к его длине, дадим значения семи первых коэффициентов:

$$\frac{[C_{11}(P_{1s} + Q_{1s}) + C_{31}(R_{1s} + T_{1s})]^2}{s} = \eta_{1s}$$

для  $s = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ .

Вычисления проделаны с точностью до третьего знака (на логарифмической линейке). При заданном отношении  $\frac{a}{h}$  величина  $K_1$  легко находится по формуле (27).

$s$	1	3	5	7	9	11	13
$\mathcal{M}_{1s}$	0.226	0.152	0.014	0.007	0.005	0.003	0.001

Если вычислить понижение первой частоты для стальной трубы  $\frac{a}{h} = 0.017$  напрым.,  $a = 5$  см,  $h = 3$  м с толщиной стенки  $\delta = 5$  мм, то получится:  $K_1 = 0.012$  (не зависит от  $\delta$ ); приняв  $\frac{\rho_1}{\rho} = 7.6$ , получим  $p_1 = 0.88 p_{10}$ , т. е. имеет место понижение частоты на 12%.

Такие же вычисления были проделаны для стержня из резиновой трубки, для которого  $\frac{a}{h} = 0.024$  ( $a = 4$  мм,  $h = 170$  мм,  $\delta = 2.2$  мм) и  $\frac{\rho_1}{\rho} = 1.87$ .

$K_1$  оказалось равным 0.025 и  $p_1 = 0.83 p_{10}$ ; понижение частот составляет 17%. Грубый эксперимент с этим стержнем позволил установить понижение, равное 19%.

Для резинового стержня:  $a = 5$  мм,  $h = 185$  мм и  $\delta = 1.5$  мм; оказалось  $\frac{\rho}{\rho_1} = 0.68$ ,  $K_1 = 0.038$ ,  $p_1 = 0.69 p_{10}$ . Грубый эксперимент с этим стержнем в канале показал понижение частоты на 30%.

## DETERMINATION OF VIBRATION FREQUENCY OF ELASTIC RODS IN LIQUIDS

P. K. ISCHKOW

(Sverdlovsk)

(Summary)

An elastic rod performs small vibrations in the liquid filling an sideless tank the height of which equals the length of the rod. Considering the liquid to be ideal and the motion to be potential the author calculates the field of velocities of this fluid assuming that the fluid does not substantially influence the form of vibrations of the rod.

This calculation allows us to determine the connected mass of fluid for every main form of vibrations and consequently to determine the influence of the fluid on the frequency of free vibrations (see formula (22) and (26)). A number of tests carried out confirmed the author's calculations.