

LITERATURVERZEICHNIS

- (1a) R. v. Mises: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. **3**, 406 (1928).
- (1b) R. v. Mises u. J. Ratzersdorfer: Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken, Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. **6**, 181 (1926).
- (2) W. Prager: Die Berechnung der Eigenschwingungszahlen ebener und räumlicher Stabwerke, Zeitschrift f. techn. Physik **10**, 275 (1929), vergl. auch:
K. Hohenemser u. W. Prager: Dynamik der Stabwerke, Berlin (Springer), 1933.
- (3) H. Zimmermann: Knickfestigkeit der Stabverbindungen, Berlin (Ernst & Sohn), 1925, vergl. auch das ausführliche Verzeichnis der zahlreichen einschlägigen Einzelveröffentlichungen des Verfassers auf S. 88.
- (4) F. W. Waltking: Zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen ebener Stabwerke, Ingenieurarchiv **2**, 247 (1931).

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ РАМНЫХ СИСТЕМ

В. ПРАГЕР

(Математический институт университета в Истамбуле)

1. Введение. В настоящей работе разработан метод установления условия устойчивости для определенного класса плоских рамных систем. Этот метод хотя и является менее объемлющим, чем прием, предложенный Р. Мизесом и И. Ратцерсдорфером,⁽¹⁾ однако, в подходящих случаях он обладает большими удобствами при установлении условия устойчивости.

Излагаемый ниже метод был получен путем перенесения метода, предложенного автором⁽²⁾ для составления *частотного уравнения* для плоской рамной системы, в область математически родственной проблемы *установления условия устойчивости для рамных систем*.

Лишь впоследствии была установлена связь метода автора с методом, предложенным Г. Циммерманом,⁽³⁾ так что первый может рассматриваться как развитие последнего.

2. Основное уравнение. Исследуем коэффициент запаса устойчивости σ первоначально прямого, призматического бруска длиной l , который подвергается действию сжимающей силы N , действующей вдоль оси. Мы относим положение и смещения точек бруска к неизменной прямоугольной системе координат x, y , начало которой совпадает с одним из концов бруска, а ось направлена по оси бруса. Если точки оси бруска получают на границе потери устойчивости под влиянием сжимающей силы σN бесконечно малые отклонения η в направлении оси y , то функция $\eta(x)$, как известно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{\sigma N}{EI} \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

в котором E означает модуль упругости материала бруска, а I — момент инерции поперечного сечения бруска относительно главной центральной оси инерции сечения, перпендикулярной к плоскости x, y . Вводя обозначение

$$p^2 = \frac{\sigma N}{EI}, \quad (2)$$

общий интеграл этого дифференциального уравнения можно написать в форме

$$\eta = a + bpx + c \cos px + d \sin px. \quad (3)$$

Из уравнения (3), при обозначении

$$\lambda = pl, \quad (4)$$

получаем для бесконечно малых отклонений концов бруска:

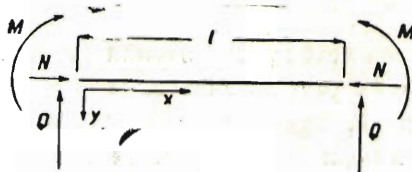
$$\eta(0) = a + c \quad (5)$$

$$\eta(l) = a + b\lambda + c \cos \lambda + d \sin \lambda; \quad (6)$$

для бесконечно малых углов наклона к оси x касательных к упругой линии на концах изогнутого бруска:

$$\eta'(0) = p(b + d) \quad (7)$$

$$\eta'(l) = p(b - c \sin \lambda + d \cos \lambda); \quad (8)$$



Фиг. 1.

для бесконечно малых изгибающих моментов у концов бруска (знаки приняты соответственно фиг. 1):

$$M(0) = -EI\eta''(0) = EI p^2 c, \quad (9)$$

$$M(l) = -EI\eta''(l) = EI p^2 (c \cos \lambda + d \sin \lambda) \quad (10)$$

и для бесконечно малых поперечных сил на концах бруска (знак взят в соответствии с фиг. 1):

$$Q(0) = -EI\eta'''(0) - \sigma N\eta'(0) = -EI p^3 b, \quad (11)$$

$$Q(l) = -EI\eta'''(l) - \sigma N\eta'(l) = -EI p^3 b. \quad (12)$$

Для характеристики способа опирания концов бруска мы вводим следующие вспомогательные величины:

$$e(0) = -\frac{l' M(0)}{\eta'(0)}, \quad e(l) = -\frac{l' M(l)}{\eta'(l)}; \quad (13)$$

$$f(0) = -\frac{l^2 l' Q(0)}{\eta(0)}, \quad f(l) = -\frac{l^2 l' Q(l)}{\eta(l)}, \quad (14)$$

где

$$l' = \frac{l}{EI}. \quad (15)$$

Величины e могут быть названы коэффициентами заземления, величины f — коэффициентами жесткости опирания. При полном заземлении концов бруска $e = \infty$, при шарнирно опертом конце бруска $e = 0$. Для не смещающегося

в направлении оси y конца бруска (абсолютно жесткая опора) $f = \infty$, при свободно перемещающемся в направлении оси y конце бруса $f = 0$. При упругом защемлении e дает меру для коэффициента упругости защемления, при упругой опоре f дает меру коэффициента жесткости опирания. Задавая величины коэффициентов защемления и жесткости опирания для обоих концов бруска, мы совершенно однозначно характеризуем способ закрепления концов бруска.

Если величины смещений, углов наклона касательных, изгибающих моментов и поперечных сил на концах бруса, данных равенствами (5—12), ввести в выражения (13) и (14) коэффициентов защемления и жесткости опирания, то в отношении постоянных интегрирования a, b, c, d получим четыре однородных линейных уравнения. Для того чтобы эти постоянные не равнялись одновременно нулю, иначе говоря, ось бруска заняла положение отличное от положения равновесия (т. е. оси x), определитель этой системы уравнений должен обратиться в нуль.

Таким образом получаем для упруго защемленного обоими концами и лежащего на „упругих опорах“ бруска, для которого коэффициенты защемления суть $e(0)$ и $e(l)$, а коэффициенты жесткости опирания суть $f(0)$ и $f(l)$, следующее условие устойчивости:

$$\begin{aligned}
 & e(0)f(0) \left\{ \frac{1}{\lambda^4} (2 \cos \lambda + \lambda \sin \lambda - 2) e(l)f(l) - \frac{1}{\lambda} e(l) \sin \lambda + \right. \\
 & + \frac{1}{\lambda^3} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) f(l) + \cos \lambda \left. \right\} + e(0) \left\{ \frac{1}{\lambda} e(l)f(l) \sin \lambda - \cos \lambda f(l) \right\} + \\
 & + f(0) \left\{ \frac{1}{\lambda^3} (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) e(l)f(l) - e(l) \cos \lambda + \frac{1}{\lambda} f(l) \sin \lambda - \lambda \sin \lambda \right\} + \\
 & + e(l)f(l) \cos \lambda + \lambda f(l) \sin \lambda = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

В дальнейшем это уравнение (16) мы будем называть *основным*. Оно включает в себе, между прочим, условия устойчивости для известных четырех случаев продольного изгиба: для шарнирно закрепленного обоими концами бруска, для бруска, защемленного одним и свободным другим концом, для защемленного одним и шарнирно опертым другим концом и, наконец, для защемленного обоими концами бруска. Так, например, для бруска, защемленного при $x=0$, со свободным концом при $x=l$, имеем $e(0) = \infty$, $f(0) = \infty$, $e(l) = 0$, $f(l) = 0$. Поэтому в основном уравнении (16) нужно принимать во внимание только тот член, который имеет множителем произведение $e(0)$ и $f(0)$ и не содержит $e(l)$ и $f(l)$. Получаем, таким образом, в качестве условия устойчивости $\cos \lambda = 0$. Из $\lambda = \frac{\pi}{2}$, принимая во внимание (2), (4) и (15), в качестве коэффициента запаса устойчивости при продольном изгибе для закрепленного одним и свободного другим концом бруска получаем:

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{Nl^2} = \frac{\pi^2}{4Nl^2}.$$

Для установления условия устойчивости при продольном изгибе плоской рамной системы, которая на ряду со стержнями, подвергающимися сжатию,

содержит еще стержни или свободные от осевых сил или подвергающиеся растяжению, мы используем ту форму основного уравнения (16), которую оно принимает при $N=0$ или $N<0$. Для бруса, свободного от осевых сил ($\lambda=0$), основное уравнение принимается:

$$e(0)f(0)\left\{-\frac{1}{12}e(l)f(l)-e(l)+\frac{1}{3}f(l)+1\right\}+e(0)\{e(l)f(l)-f(l)\}+ \\ +f(0)\left\{-\frac{1}{3}e(l)f(l)-e(l)+f(l)\right\}+e(l)f(l)=0. \quad (17)$$

Для бруса, подвергающегося растяжению ($\lambda=i\mu$), будем иметь:

$$e(0)f(0)\left\{\frac{1}{\mu^4}(2\operatorname{ch}\mu-\mu\operatorname{sh}\mu-2)-\frac{1}{\mu}e(l)\operatorname{sh}\mu+\right. \\ \left.+\frac{1}{\mu^3}(\mu\operatorname{ch}\mu-\operatorname{sh}\mu)f(l)+\operatorname{ch}\mu\right\}+e(0)\left\{\frac{1}{\mu}e(l)f(l)\operatorname{sh}\mu-f(l)\operatorname{ch}\mu\right\}+ \\ +f(0)\left\{\frac{1}{\mu^3}(\operatorname{sh}\mu-\mu\operatorname{ch}\mu)e(l)f(l)-e(l)\operatorname{ch}\mu+\frac{1}{\mu}f(l)\operatorname{sh}\mu+\mu\operatorname{sh}\mu\right\}+ \\ +e(l)f(l)\operatorname{ch}\mu-f(l)\mu\operatorname{sh}=0. \quad (18)$$

3. Чистый продольный изгиб рамы в плоских рамных системах.

В настоящей работе мы ограничиваемся исследованием явления продольного изгиба, названного Р. Мизесом^(1*) чистым продольным изгибом рамы, при котором расстояния между двумя связанными друг с другом узлами рамы изменяются лишь на величины бесконечно малые по сравнению с прогибами η . Распространение излагаемого здесь приема на общие случаи задачи устойчивости стержневых систем должно быть отложено до следующих сообщений.

Учет продольных удлинений стержней рамы при установлении условия устойчивости может быть произведен подобным же образом, как и учет продольных колебаний в методе, предложенном автором⁽²⁾ для установления частотного уравнения для рамной системы. Влияние продольных колебаний на собственную частоту рамной системы, а также и влияние изменений длины стержней рамы на коэффициент устойчивости при продольном изгибе только тогда малы, когда стержни имеют достаточно большую гибкость.

Различные способы сопряжения стержней рамы с соседними стержнями или с фундаментом можно разбить на три группы. К первой группе мы причисляем те сопряжения, при которых как коэффициенты защемления, так и коэффициенты жесткости опирания сходящихся друг с другом концов стержней могут быть непосредственно заданы. К этой группе принадлежат все виды сопряжений стержней с фундаментом и сопряжения, которые лежат на оси симметрии симметричной рамной системы. Важнейшие случаи этой группы таковы: абсолютно жесткое закрепление конца стержня в фундаменте ($e=\infty$, $f=\infty$); шарнирное (катковое) закрепление конца стержня в теле фундамента ($e=0$, $f=\infty$); свободный конец стержня ($e=0$, $f=0$); промежуточная „опора“ на оси симметрии (при симметричной форме упругой линии $e=\infty$, $f=0$; при

антисимметричной¹ форме упругой линии $e=0, f=\infty$); шарнир Гербера на оси симметрии (при симметричной форме упругой линии $e=0, f=0$; при антисимметричной форме $e=0, f=\infty$); жесткий (в отношении поворота) не подпертый узел сопряжения двух стержней, расположенный на оси симметрии (при симметричной форме упругой линии $e=\infty, f=0$; при антисимметричной форме упругой линии $e=0, f=\infty$).

Ко второй группе мы причисляем те сопряжения, при которых или только коэффициенты защемления или только коэффициенты жесткости опирания сходящихся друг с другом концов стержней могут быть заданы непосредственно. Между непосредственно задаваемыми коэффициентами закрепления сопряженных друг с другом в узле стержней существует одно, относящееся к сопряжениям второго рода соотношение, которое мы в дальнейшем будем называть уравнением (или условием) сопряжения. Важнейшие случаи этой группы сопоставлены в табл. 1. Так как знаки у коэффициентов e и f зависят от выбора положительных направлений осей координат, то эти направления указаны в табл. 1 на рисунках стрелками.

Наконец, к третьей группе мы причисляем те сопряжения, для которых — по крайней мере для одного из сходящихся в нем стержней — не могут быть непосредственно заданы ни коэффициент защемления ни коэффициент жесткости опирания.

Рассмотрим теперь рамную систему, составленную из стержней, для которой мы примем, что она не содержит ни сопряжений третьего рода ни замкнутого стержневого многоугольника.

Из этих двух предположений только второе обусловлено существом развитого здесь метода. От первого из допущений можно избавиться путем обобщения метода, подобно тому как Ф. В. Вальткинг⁽⁴⁾ это сделал при обобщении данного автором⁽²⁾ метода для установления частотного уравнения для плоских рамных систем. Это обобщение будет сделано впоследствии одновременно с изложением приложения метода к общему случаю устойчивости стержневых систем. К фермам, которые содержат замкнутые стержневые многоугольники, предлагаемый здесь, а также и обобщенный метод можно применять только в том случае, если условия симметрии допускают рассмотрение, вместо всей рамной системы, только части ее, которая не содержит никаких замкнутых многоугольников.

Если обозначить через k_n число узлов, в которых сходится по n стержней рассматриваемой системы, будем иметь:



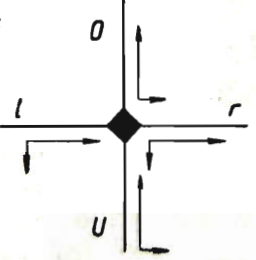
$$2s = \sum nk_n. \quad (19)$$

Если рамная система имеет s стержней, то им соответствуют $4s$ коэффициентов e и f . Если k_1 число одностержневых узлов, то это значит, что имеется по k_1 заданных значений e и f , так как это суть стержни, которыми рамная

¹ Антисимметричной формой упругой линии называется линия, обладающая свойством *лучевой симметрии*, имеющая, следовательно, точку перегиба. Такая упругая линия получается, например, при изгибе шарнирно опертого по концам бруса, нагруженного парой сил. *Прим. ред.*

Сопряжение второго рода

Таблица 1

Соединение	Известные коэффициенты параметры	Уравнение сопряжения
<p>a</p>  <p>Промежуточная опора</p>	$f_l = f_r = \infty$	$\left(\frac{e}{v}\right)_l = \left(\frac{e}{v}\right)_r$
<p>b</p>  <p>Балка Гербера с шарнирами Гербера</p>	$e_l = e_r = 0$	$\left(\frac{f}{lv}\right)_l = \left(\frac{f}{lv}\right)_r$
<p>c</p>  <p>Несмещающийся рамный узел</p>	$f_l = f_r = f_u = f_o = \infty$	$\left(\frac{e}{v}\right)_u + \left(\frac{e}{v}\right)_l = \left(\frac{e}{v}\right)_o + \left(\frac{e}{v}\right)_r$

система соединена с фундаментом, или это суть стержни со свободными концами. В остальных узлах концы стержней сопряжены друг с другом так, что будет известен один из коэффициентов — e или f , так как мы принимаем, что рама не содержит никаких сопряжений третьего рода. Следовательно, из $4s$ коэффициентов только

$$u = 4s - k_1 - \sum nk_n = 2s - k_1 \quad (20)$$

не могут быть заданы непосредственно.

Для каждого стержня имеет место только одно основное уравнение¹ и для каждого узла, за исключением одностержневых, — одно переходное уравнение; таким образом имеем в нашем распоряжении в общем:

$$v = s - k_1 + \sum k_n \quad (21)$$

уравнений.

¹ Типа (16).

Так как на основании принятого условия рамная система не содержит ни одного замкнутого стержневого многоугольника, то должно существовать соотношение

$$\sum k_n = s + 1. \quad (22)$$

Из (20), (21), (22) получается:

$$v = u + 1 \quad (23)$$

Это значит, что из v уравнений могут быть исключены u неизвестных.

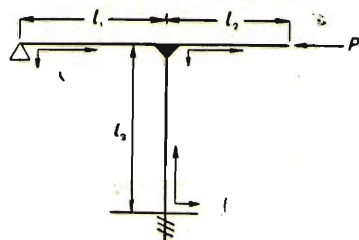
В результате исключения мы и получим искомое условие устойчивости.¹

4. Примеры. а) Нужно составить условие устойчивости для фермы, изображенной на фиг. 2. Для обозначения параметров l, λ, e, f , соответствующих различным стержням, мы применяем индексы, введенные для обозначения стержней на фиг. 2. Непосредственно известными являются следующие коэффициенты:

$$e_1(0) = 0, \quad f_1(0) = \infty, \quad f_1(l_1) = \infty;$$

$$f_2(0) = \infty, \quad e_2(l_2) = 0, \quad f_2(l_2) = 0;$$

$$e_3(0) = \infty, \quad f_3(0) = \infty, \quad f_3(l_3) = \infty.$$



Фиг. 2.

После подстановки этих значений в основные уравнения (16) и (17) для трех стержней они принимают следующий вид:

$$\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1) e_1(l_1) + \frac{1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 = 0,$$

$$e_2(0) \cos \lambda_2 - \lambda_2 \sin \lambda_2 = 0,$$

$$-\frac{1}{l_2} e_3(l_3) + \frac{1}{3} = 0.$$

Если вставить определяемые из этих уравнений значения $e_1(l_1)$, $e_2(l_2)$, $e_3(l_3)$ в условие сопряжения

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) + \frac{1}{l_3'} e_3(l_3) = 0,$$

то получим условие устойчивости

$$\frac{1}{l_1'} \cdot \frac{\lambda_1^2 \sin l_1}{\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1} + \frac{1}{l_2'} \lambda_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - \frac{4}{l_3'} = 0.$$

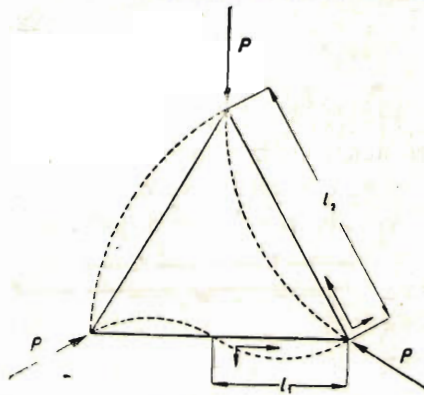
¹ Здесь является уместным выяснить связь нашего метода с методом Циммермана (3). В то время как у Циммермана имеются коэффициенты, аналогичные нашим коэффициентам защемления, у него нет никакого аналога нашим коэффициентам жесткости опирания.

Циммермановское уравнение, заменяющее наше основное уравнение (критерий устойчивости), может быть получено из нашего основного уравнения, в котором следует только положить $f(0) = f(l) = \infty$. Если не рассматривать симметричных систем, то как циммермановский метод, так и здесь изложенный, могут быть использованы для решения задачи устойчивости только тех систем, которые не содержат стержневых многоугольников.

Однако этот класс систем, к которым применим наш метод, ограничивается еще требованием, чтобы он не содержал систем с сопряжениями третьего рода.

В то же время упомянутый выше класс систем должен быть еще более сужен, чтобы оказаться доступным для метода Циммермана, так как для этого должно быть выполнено еще сильнее ограничивающее требование, чтобы во всех узлах перемещения η концов сходящихся в них стержней были равны нулю, т. е. $f = \infty$.

б) Нужно составить условие устойчивости для антисимметричной формы выпучивания, равносторонней треугольной рамой, изображенной на фиг. 3, одинаковые стержни которой подвергаются действию равных сжимающих сил,



Фиг. 3.

величина которых $N = \frac{P}{\sqrt{3}}$. Из условий симметрии можно ограничиться рассмотрением половины рамы, вследствие чего она становится доступной для нашего метода. Имеем:

$$e_1(0) = 0, \quad f_1(0) = \infty, \quad f_1(l_1) = \infty; \\ f_2(0) = \infty, \quad e_2(l_2) = 0, \quad f_2(l_2) = \infty.$$

Основные уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{\lambda_1^3} (\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1) e_1(l_1) + \frac{1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 = 0, \\ -\frac{1}{\lambda_2^3} (\lambda_2 \cos \lambda_2 - \sin \lambda_2) e_2(0) + \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 = 0,$$

а уравнение сопряжения будет таким:

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) = 0;$$

при $\lambda = \lambda_2 = 2\lambda_1$ и $l_2' = 2l_1'$ условие устойчивости принимает форму:

$$\frac{\sin \lambda}{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda} + \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\lambda \cos \frac{\lambda}{2} - 2 \sin \frac{\lambda}{2}} = 0,$$

или

$$\lambda \left(\operatorname{ctg} \lambda + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) = 3.$$

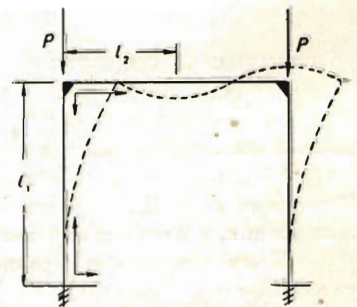
Наименьший корень $\lambda = 1, 2, 3 \pi$ этого уравнения дает коэффициент запаса устойчивости нашей треугольной рамы, равный:

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{Nl} = \frac{1.51\pi^2}{Nl}.$$

Это значит, что коэффициент запаса устойчивости этой рамы превосходит таковой же для отдельного сжатого стержня ее в случае шарнирного закрепления концов его на 51%. Сравнение вышеприведенного краткого решения с таковым же у Циммермана, изложенным на стр. 63 и следующих его книги, (3) позволяет установить превосходство предлагаемого здесь метода.

с) Нужно составить условие устойчивости для изображенной на фиг. 4-симметричной фермы при условии антисимметричной формы упругой линии при выпучивании. Непосредственно известными являются коэффициенты:

$$e_1(0) = \infty, \quad f_1(0) = \infty, \\ f_2(0) = \infty, \quad e_2(l_2) = 0, \quad f_2(l_2) = \infty.$$



Фиг. 4.

Условие равновесия передаваемых ригелю горизонтальных сил, принимая во внимание условия симметрии, дает $Q_1(l_1) = 0$; следовательно, $f_1(l_1) = 0$. Основные уравнения дают:

$$-\frac{1}{\lambda_1} e_1(l_1) \sin \lambda_1 + \cos \lambda_1 = 0,$$
$$\frac{1}{3} e_2(0) + 1 = 0.$$

Вставляя полученные из этих уравнений значения величин $e_1(l_1)$ и $e_2(0)$ в уравнение сопряжения

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) = 0,$$

получаем условия устойчивости:

$$\lambda_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + \frac{3l_1'}{l_2'} = 0.$$

(Литература указана после немецкого текста этой статьи на стр. 23.)