

## DIE KNICKSICHERHEIT EBENER RAHMEN TRAGWERKE

W. PRAGER

(Mathematisches Institut der Universität Istanbul)

**1. Einleitung.** In der vorliegenden Abhandlung wird ein Verfahren zur Aufstellung der Knickbedingung für eine bestimmte Klasse von ebenen Rahmentragwerken entwickelt. Dieses Verfahren ist zwar weniger umfassend als das von R. v. Mises und J. Ratzersdorfer <sup>(1)</sup> angegebene, ermöglicht jedoch in den ihm zugänglichen Fällen eine bequemere Aufstellung der Knickbedingung.

Das im folgenden dargestellte Verfahren wurde ausgearbeitet als Uebertragung eines vom Verfasser <sup>(2)</sup> angegebenen Verfahrens zur Aufstellung der Frequenzgleichung eines ebenen Rahmentragwerks auf das mathematisch verwandte Problem der Aufstellung der Knickbedingung. Erst nachträglich wurde die Beziehung zu dem von H. Zimmermann <sup>(3)</sup> angegebenen Verfahren erkannt, als dessen Erweiterung das hier mitgeteilte angesehen werden kann.

**2. Die Grundgleichung.** Wir untersuchen die Knicksicherheit  $\sigma$  eines ursprünglich geraden, prismatischen Stabes von der Länge  $l$ , der durch eine axiale Druckkraft  $N$  beansprucht wird. Wir beziehen die Lage und die Verschiebungen der Stabpunkte auf ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem  $x, y$ , dessen Ursprung mit einem der Stabendpunkte und dessen  $x$ -Achse mit der Stabachse zusammenfällt. Erfahren die Punkte der Stabachse unter dem Einfluss der Druckkraft  $\sigma N$  an der Knickgrenze unendlich kleine Auslenkungen  $\eta$  in Richtung der  $y$ -Achse, so genügt die Funktion  $\eta(x)$  bekanntlich der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{\sigma N}{EI} \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0,$$

in der  $E$  den Elastizitätsmodul des Stabmaterials und  $I$  das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts in Bezug auf die zur  $x, y$  Ebene senkrechte Hauptschwerachse bedeuten.



Mit

$$(2) \quad p^2 = \frac{\sigma N}{EI}$$

kann das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung geschrieben werden in der Form

$$(3) \quad \eta = a + bpx + c \cos px + d \sin px.$$

Aus (3) erhält man mit

$$(4) \quad \lambda = pl$$

für die unendlich kleinen Auslenkungen der Stabenden

$$(5) \quad \eta(0) = a + c,$$

$$(6) \quad \eta(l) = a + b\lambda + c \cos \lambda + d \sin \lambda,$$

für die unendlich kleinen Neigungen der Endtangente der Biegelinie gegen die  $x$ -Achse

$$(7) \quad \eta'(0) = p(b + d),$$

$$(8) \quad \eta'(l) = p(b - c \sin \lambda + d \cos \lambda),$$

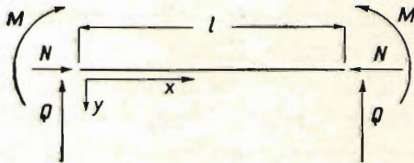


Fig. 1.

für die unendlich kleinen Biegemomente an den Stabenden (Vorzeichenfestsetzung entsprechend Fig. 1)

$$(9) \quad M(0) = -EI\eta''(0) = EI p^2 c,$$

$$(10) \quad M(l) = -EI\eta''(l) = EI p^2 (c \cos \lambda + d \sin \lambda)$$

und für die unendlich kleinen Querkräfte an den Stabenden (Vorzeichenfestsetzung entsprechend Fig. 1)

$$(11) \quad Q(0) = -EI\eta'''(0) - \sigma N\eta'(0) = -EI p^3 b,$$

$$(12) \quad Q(l) = -EI\eta'''(l) - \sigma N\eta'(l) = -EI p^3 b.$$

Zur Kennzeichnung der Art der Lagerung der Stabenden führen wir die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$(13) \quad e(0) = -\frac{l M(0)}{\eta'(0)}, \quad e(l) = -\frac{l M(l)}{\eta'(l)},$$

$$(14) \quad f(0) = -\frac{l^2 Q(0)}{\eta(0)}, \quad f(l) = -\frac{l^2 Q(l)}{\eta(l)},$$

wo

$$(15) \quad l = \frac{l}{EI}$$

ist. Die Größen  $e$  können als Einspannungskoeffizienten, die Größen  $f$  als Stützungskoeffizienten bezeichnet werden. Bei starr eingespanntem Stabende ist  $e = \infty$ , bei frei drehbarem Stabende  $e = 0$ . Bei in  $y$ -Richtung nicht verschieblichem Stabende ist  $f = \infty$ , bei in dieser Richtung frei verschieblichem Stabende  $f = 0$ . Bei elastischer Einspannung gibt  $e$  ein Mass für die Elastizität der Einspannung, bei elastischer Stützung  $f$  ein Mass für die Elastizität der

Stützung. Durch Angabe der Werte der Einspannungs- und Stützungskoeffizienten für die beiden Stabenden ist die Art der Lagerung eines Stabes in eindeutiger Weise gekennzeichnet.

Führt man in die Definitionsgleichung (13) und (14) der Einspannungs- und Stützungskoeffizienten die Ausdrücke (5) bis (12) für Auslenkungen, Tangentenneigungen, Biegemomente und Querkräfte an den Stabenden ein, so erhält man vier in den Integrationskonstanten  $a, b, c, d$  homogene lineare Gleichungen. Die Integrationskonstanten können nur dann nicht sämtlich verschwinden, d. h. die Stabachse kann nur dann eine mit der  $x$ -Achse nicht zusammenfallende Gleichgewichtslage annehmen, wenn die Koeffizientendeterminante dieser vier Gleichungen in  $a, b, c, d$  verschwindet. Man erhält so für den beiderseits elastisch eingespannten und elastisch gestützten Stab mit den Einspannungskoeffizienten  $e(0), e(l)$  und den Stützungskoeffizienten  $f(0), f(l)$  die Knickbedingung

$$(16) \quad e(0)f(0) \left\{ \frac{1}{\lambda^4} (2 \cos \lambda + \lambda \sin \lambda - 2) e(l)f(l) - \frac{1}{\lambda} e(l) \sin \lambda + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda^3} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) f(l) + \cos \lambda \right\} + e(0) \left\{ \frac{1}{\lambda} e(l)f(l) \sin \lambda - \cos \lambda f(l) \right\} + \\ + f(0) \left\{ \frac{1}{\lambda^3} (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) e(l)f(l) - e(l) \cos \lambda + \frac{1}{\lambda} f(l) \sin \lambda - \lambda \sin \lambda \right\} + \\ + e(l)f(l) \cos \lambda + \lambda f(l) \sin \lambda = 0.$$

Wir werden die Gleichung (16) im folgenden als Grundgleichung bezeichnen. Sie enthält unter anderem die Knickbedingungen für die bekannten vier Fälle des eingespannt-freien, des gelenkig-gelenkig gestützten, des eingespannt-gelenkig gestützten und des eingespannt-eingespannten Stabes. Für den bei  $x=0$  eingespannten, bei  $x=l$  freien Stab ist z. B.  $e(0)=\infty, f(0)=\infty, e(l)=0, f(l)=0$ . In der Grundgleichung (16) ist daher nur dasjenige Glied zu berücksichtigen, welches  $e(0)$  und  $f(0)$ , nicht aber  $e(l)$  und  $f(l)$  als Faktoren besitzt. Man erhält so als Knickbedingung  $\cos \lambda = 0$ . Aus  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich unter Berücksichtigung von (2), (4) und (15) die Knicksicherheit des eingespannt-freien Stabes zu

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{Nl} = \frac{\pi^2}{4Nl}.$$

Bei der Aufstellung der Knickbedingung eines ebenen Rahmentragwerkes, welches neben auf Druck beanspruchten Stäben auch von Axialkräften freie oder auf Zug beanspruchte Stäbe enthält, benötigen wir die Formen, welche die Grundgleichung (16) für  $N=0$  oder für  $N < 0$  annimmt. Für einen von Axialkräften freien Stab ( $\lambda=0$ ) gilt

$$(17) \quad e(0)f(0) \left\{ -\frac{1}{12} e(l)f(l) - e(l) + \frac{1}{3} f(l) + 1 \right\} + e(0) \{ e(l)f(l) - f(l) \} + \\ + f(0) \left\{ -\frac{1}{3} e(l)f(l) - e(l) + f(l) \right\} + e(l)f(l) = 0$$



und für einen auf Zug beanspruchten Stab ( $\lambda = i\mu$ ) gilt

$$\begin{aligned}
 e(0)f(0) \left\{ \frac{1}{\mu^4} (2 \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu - 2) - \frac{1}{\mu} e(l) \operatorname{sh} \mu + \frac{1}{\mu^3} (\mu \operatorname{ch} \mu - \right. \\
 \left. - \operatorname{sh} \mu) f(l) + \operatorname{ch} \mu \right\} + e(0) \left\{ \frac{1}{\mu} e(l) f(l) \operatorname{sh} \mu - f(l) \operatorname{ch} \mu \right\} + \\
 (18) \quad + f(0) \left\{ \frac{1}{\mu^3} (\operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) e(l) f(l) - e(l) \operatorname{ch} \mu + \frac{1}{\mu} f(l) \operatorname{sh} \mu + \right. \\
 \left. + \mu \operatorname{sh} \mu \right\} + e(l) f(l) \operatorname{ch} \mu - \mu f(l) \operatorname{sh} \mu = 0.
 \end{aligned}$$

**3. Die reine Rahmenknickung ebener Tragwerke.** In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die Untersuchung des von R. v. Mises<sup>(1a)</sup> als reine Rahmenknickung bezeichneten Knickvorgangs, bei welchem der Abstand zweier durch einen Stab miteinander verbundenen Rahmenknoten sich nur ändert um Beträge, die unendlich klein sind im Verhältnis zu den Durchbiegungen  $\eta$ . Die Erweiterung des hier mitgeteilten Verfahrens auf den Fall der allgemeinen Stabwerkknickung soll einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben. Die Berücksichtigung der Längenänderungen der Rahmenstäbe bei der Aufstellung der Knickbedingung kann in ähnlicher Weise erfolgen wie die Berücksichtigung der Längsschwingungen bei dem vom Verfasser<sup>(2)</sup> angegebenen Verfahren zur Aufstellung der Frequenzgleichung eines ebenen Rahmentragwerks.<sup>1</sup>

Die verschiedenen Arten der Verbindung eines Rahmenstabes mit anschliessenden Stäben oder mit dem Fundament lassen sich in drei Gruppen einteilen. Zur ersten Gruppe zählen wir diejenigen Verbindungen, bei denen sowohl die Einspannungskoeffizienten als auch die Stützungskoeffizienten der dort zusammentreffenden Stabenden unmittelbar angegeben werden können. Zu dieser Gruppe gehören alle Arten der Verbindung eines Stabes mit dem Fundament und Verbindungen, welche auf der Symmetrieachse eines symmetrischen Systems liegen. Die wichtigsten Fälle dieser Gruppe sind: starre Einspannung des Stabendes im Fundament ( $e = \infty, f = \infty$ ), gelenkige Lagerung des Stabendes am Fundament ( $e = 0, f = \infty$ ), freies Stabende ( $e = 0, f = 0$ ), Zwischenlager auf Symmetrieachse (bei symmetrischer Knickform  $e = \infty, f = \infty$ , bei gegensymmetrischer Knickform  $e = 0, f = \infty$ ), biegesteife, nicht unterstützte Verbindung zweier Stabenden auf der Symmetrieachse (bei symmetrischer Knickform  $e = \infty, f = 0$ , bei gegensymmetrischer Knickform  $e = 0, f = \infty$ ).

Zur zweiten Gruppe zählen wir diejenigen Verbindungen, bei welchen entweder die Einspannungskoeffizienten oder die Stützungskoeffizienten der dort miteinander verbundenen Stabenden unmittelbar angegeben werden können. Zwischen den nicht unmittelbar angebbaren Koeffizienten der miteinander verbundenen Stabenden besteht an einer Verbindung der zweiten Art eine Beziehung, die wir im folgenden als Uebergangsgleichung bezeichnen wollen. Die

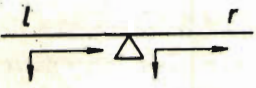
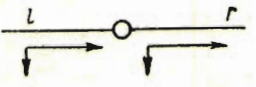
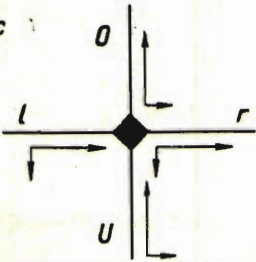
<sup>1</sup> Wie der Einfluss der Längsschwingungen auf die Eigenfrequenzen eines Rahmentragwerks, so ist auch der Einfluss der Längenänderungen der Rahmenstäbe auf die Knicksicherheit nur dann klein, wenn die Stäbe sehr schlank sind.



wichtigsten Fälle dieser Gruppe sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Da die Vorzeichen der Koeffizienten  $e$  und  $f$  von der Wahl der positiven Richtungen der Koordinatenachsen abhängen, sind diese Richtungen in den Abbildungen der Tabelle 1 durch Pfeile angegeben.

Tabelle 1

## Verbindungen zweiter Art

Verbindung	Bekannte Koeffizienten	Übergangsgleichung
Zwischenlager <i>a</i> 	$f_l = f_r = \infty$	$\left(\frac{e}{V}\right)_l = \left(\frac{e}{V}\right)_r$
Gerbergelenk <i>b</i> 	$e_l = e_r = 0$	$\left(\frac{f}{\mathcal{L}V}\right)_l = \left(\frac{f}{\mathcal{L}V}\right)_r$
Unverschieblicher Rahmenknoten <i>c</i> 	$f_l = f_r = f_u = f_o = \infty$	$\left(\frac{e}{V}\right)_u + \left(\frac{e}{V}\right)_l =$ $= \left(\frac{e}{V}\right)_o + \left(\frac{e}{V}\right)_r$

Zur dritten Gruppe schliesslich zählen wir diejenigen Verbindungen, bei welchen zum mindesten für eines der dort miteinander verbundenen Stabenden weder der Einspannungs- noch der Stützungskoeffizient unmittelbar angegeben werden kann.

Wir betrachten nun ein aus  $s$  Stäben bestehendes ebenes Rahmentragwerk, von dem wir voraussetzen wollen, dass es weder Verbindungen der dritten Art noch ein geschlossenes Stabpolygon enthält. Von diesen beiden Voraussetzungen ist nur die zweite durch die Natur des hier entwickelten Verfahrens bedingt. Die erste lässt sich vermeiden durch eine Erweiterung des Verfahrens, wie sie in ähnlicher Weise F. W. Waltking<sup>(4)</sup> für das vom Verfasser<sup>(2)</sup> angegebene Verfahren zur Aufstellung der Frequenzgleichung ebener Rahmentragwerke

vorgeschlagen hat. Diese Erweiterung soll zusammen mit der Anwendung des Verfahrens auf die allgemeine Stabwerkknickung in einer späteren Veröffentlichung dargestellt werden. Auf Tragwerke, welche geschlossene Stabpolygone enthalten, lässt sich dagegen sowohl das hier dargestellte als auch das erweiterte Verfahren nur dann anwenden, wenn Symmetrieeigenschaften es erlauben anstelle des ganzen Tragwerks einen Teil zu untersuchen, der kein geschlossenes Stabpolygon enthält.

Bezeichnet  $k_n$  die Anzahl der  $n$ -stäbigen Knotenpunkte des betrachteten Tragwerks, so gilt

$$(19) \quad 2s = \sum nk_n.$$

Den  $s$  Tragwerkstäben entsprechen  $4s$  Koeffizienten  $e$  und  $f$ . Die  $k_1$  einstäbigen Knoten sind Knoten, in denen das Tragwerk mit dem Fundament verbunden ist, oder freie Stabenden, dort ist sowohl  $e$  wie  $f$  bekannt. An den übrigen Knoten sind von den miteinander verbundenen Stabenden entweder die Koeffizienten  $e$  oder die  $f$  bekannt, da wir annehmen, dass das Stabwerk keine Verbindungen der dritten Art enthält. Somit können von den  $4s$  Koeffizienten nur

$$(20) \quad u = 4s - k_1 - \sum nk_n = 2s - k_1$$

nicht unmittelbar angegeben werden.

Für jeden Stab steht nun eine Grundgleichung und für jeden Knoten mit Ausnahme der einstäbigen eine Übergangsgleichung zur Verfügung, im ganzen also

$$(21) \quad v = s - k_1 + \sum k_n$$

Gleichungen. Da nach Voraussetzung das Tragwerk kein geschlossenes Stabpolygon enthält, gilt

$$(22) \quad \sum k_n = s + 1.$$

Aus (20), (21), (22) ergibt sich

$$(23) \quad v = u + 1,$$

d. h. aus den Gleichungen können die  $v$  Unbekannten eliminiert werden. Das Eliminationsergebnis ist die gesuchte Knickbedingung.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Wir sind nunmehr in der Lage, das Verhältnis unseres Verfahrens zu dem Zimmermann'schen<sup>(3)</sup> darzulegen. Während unseren Einspannungskoeffizienten die Zimmermann'schen Spannziffern entsprechen, findet sich bei Zimmermann kein Gegenstück zu unseren Stützungskoeffizienten. Die von Zimmermann an Stelle unserer Grundgleichung benutzte Beziehung entspricht der Gleichung, welche aus unserer Grundgleichung durch Einführen von  $f(0) = f(l) = \infty$  hervorgeht. Sieht man von symmetrischen Tragwerken ab, so sind sowohl dem Zimmermann'schen wie auch dem hier dargestellten Verfahren nur Tragwerke zugänglich, welche kein geschlossenes Stabpolygon enthalten.

Darüberhinaus werden die unserem Verfahren zugänglichen Tragwerke noch eingeschränkt durch die Bedingung, dass sie keine Verbindungen der dritten Art enthalten dürfen.

Die dem Zimmermann'schen Verfahren zugänglichen Tragwerke dagegen werden eingeschränkt durch die wesentlich engere Bedingung, dass an allen Knoten die Verschiebungen der dort miteinander verbundenen Stabenden verschwinden müssen ( $f = \infty$ ).



4. Beispiele. a) Es soll die Knickbedingung für das in Fig. 2 dargestellte Tragwerk aufgestellt werden. Zur Unterscheidung der den verschiedenen Stäben entsprechenden Grössen  $l$ ,  $\lambda$ ,  $e$ ,  $f$  verwenden wir Indizes, welche den in Fig. 2 den Stablängen beigegebenen Indizes entsprechen.

Unmittelbar angegeben werden können die folgenden Koeffizienten:

$$e_1(0) = 0, \quad f_1(0) = \infty, \quad f_1(l_1) = \infty;$$

$$f_2(0) = \infty, \quad e_2(l_2) = 0, \quad f_2'(l_2) = 0;$$

$$e_3(0) = \infty, \quad f_3(0) = \infty, \quad f_3(l_3) = \infty.$$

Mit diesen Werten nehmen die Grundgleichungen (16) und (17) für die drei Stäbe die folgenden Formen an:

$$\frac{1}{\lambda_1^3} (\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1) e_1(l_1) - \frac{1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 = 0,$$

$$e_2(0) \cos \lambda_2 - \lambda_2 \sin \lambda_2 = 0,$$

$$-\frac{1}{12} e_3(l_3) - \frac{1}{3} = 0.$$

Setzt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte für  $e_1(l_1)$ ,  $e_2(l_2)$ ,  $e_3(l_3)$  in die Übergangsgleichung

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) + \frac{1}{l_3'} e_3(l_3) = 0$$

ein, so erhält man die Knickbedingung

$$\frac{1}{l_1'} \frac{\lambda_1^2 \sin \lambda_1}{\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1} + \frac{1}{l_2'} \lambda_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - \frac{4}{l_3'} = 0.$$

b) Es soll die Knickbedingung für das gegensymmetrische Ausknicken des in Fig. 3 dargestellten Dreieckrahmens aufgestellt werden, dessen einander gleichen Stäbe durch gleichgrosse Druckkräfte  $N = \frac{P}{\sqrt{3}}$  beansprucht werden. Aus Symmetriegründen kann man sich auf die Betrachtung der einen Rahmehälfte beschränken, wodurch das Tragwerk unserem Verfahren zugänglich wird. Es ist

$$e_1(0) = 0, \quad f_1(0) = \infty, \quad f_1(l_1) = \infty;$$

$$f_2(0) = \infty, \quad e_2(l_2) = 0, \quad f_2(l_2) = \infty.$$

Die Grundgleichungen lauten

$$\frac{1}{\lambda_1^3} (\lambda_1 \cos \lambda_1 - \sin \lambda_1) e_1(l_1) - \frac{1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{\lambda_2^3} (\lambda_2 \cos \lambda_2 - \sin \lambda_2) e_2(0) + \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 = 0,$$

und die Übergangsgleichung ist

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) = 0.$$

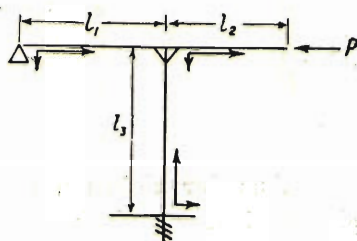


Fig. 2.

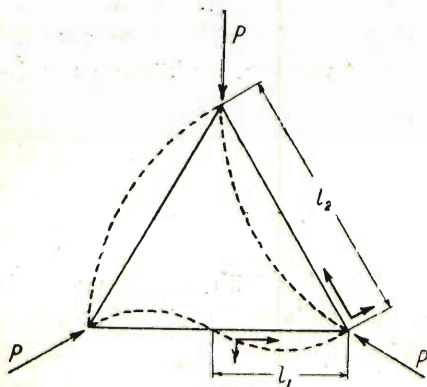


Fig. 3.

Mit  $\lambda = \lambda_2 = 2\lambda_1$  und  $l_2' = 2l_1'$  nimmt die Knickbedingung die Form an

$$\frac{\sin \lambda}{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda} + \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\lambda \cos \frac{\lambda}{2} - 2 \sin \frac{\lambda}{2}} = 0,$$

oder

$$\lambda \left( \operatorname{ctg} \lambda + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) = 3.$$

Aus der kleinsten Wurzel  $\lambda = 1.23\pi$  dieser Gleichung ergibt sich die Knicksicherheit des Dreieckrahmens zu

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{Nl'} = \frac{1.51\pi^2}{Nl'},$$

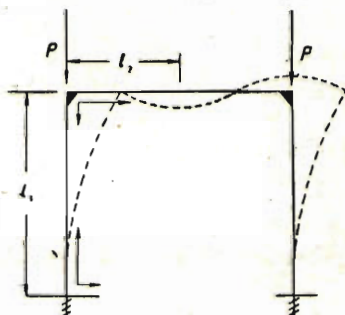


Fig. 4.

d. h. die Knicksicherheit des Rahmens übertrifft diejenige des einzelnen beiderseits gelenkig gelagert gedachten Rahmenstabs um 51%. Der Vergleich der obigen kurzen Rechnung mit der im Zimmermann'schen Buch<sup>(3)</sup> auf S. 63 ff. wiedergegebenen lässt die Überlegenheit des hier mitgeteilten Verfahrens erkennen.

c) Es soll die Knickbedingung für das in Fig. 4 dargestellte symmetrische Tragwerk unter Annahme gegensymmetrischer Knickform aufgestellt werden. Es können unmittelbar angegeben werden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} e_1(0) &= \infty, f_1(0) = \infty; \\ f_2(0) &= \infty, e_2(l_2) = (0), f_2(l_2) = \infty. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die auf den Riegel übertragenen Horizontalkräfte liefert unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse  $Q_1(l_1) = 0$ , also  $f_1(l_1) = 0$ . Die Grundgleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda_1} e_1(l_1) \sin \lambda_1 + \cos \lambda_1 &= 0, \\ \frac{1}{3} e_2(0) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung der aus diesen Gleichungen folgenden Werte von  $e_1(l_1)$  und  $e_2(0)$  in die Übergangsgleichung

$$\frac{1}{l_1'} e_1(l_1) - \frac{1}{l_2'} e_2(0) = 0$$

erhält man die Knickbedingung:

$$\lambda_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + \frac{3l_1'}{l_2'} = 0.$$



## LITERATURVERZEICHNIS

- (1a) R. v. Mises: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. **3**, 406 (1928).
- (1b) R. v. Mises u. J. Ratzersdorfer: Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken, Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. **6**, 181 (1926).
- (2) W. Prager: Die Berechnung der Eigenschwingungszahlen ebener und räumlicher Stabwerke, Zeitschrift f. techn. Physik **10**, 275 (1929), vergl. auch:  
K. Hohenemser u. W. Prager: Dynamik der Stabwerke, Berlin (Springer), 1933.
- (3) H. Zimmermann: Knickfestigkeit der Stabverbindungen, Berlin (Ernst & Sohn), 1925, vergl. auch das ausführliche Verzeichnis der zahlreichen einschlägigen Einzelveröffentlichungen des Verfassers auf S. 88.
- (4) F. W. Waltking: Zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen ebener Stabwerke, Ingenieurarchiv **2**, 247 (1931).

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ РАМНЫХ СИСТЕМ

В. ПРАГЕР

(Математический институт университета в Истамбуле)

**1. Введение.** В настоящей работе разработан метод установления условия устойчивости для определенного класса плоских рамных систем. Этот метод хотя и является менее объемлющим, чем прием, предложенный Р. Мизесом и И. Ратцерсдорфером,<sup>(1)</sup> однако, в подходящих случаях он обладает большими удобствами при установлении условия устойчивости.

Излагаемый ниже метод был получен путем перенесения метода, предложенного автором<sup>(2)</sup> для составления *частотного уравнения* для плоской рамной системы, в область математически родственной проблемы *установления условия устойчивости для рамных систем*.

Лишь впоследствии была установлена связь метода автора с методом, предложенным Г. Циммерманом,<sup>(3)</sup> так что первый может рассматриваться как развитие последнего.

**2. Основное уравнение.** Исследуем коэффициент запаса устойчивости  $\sigma$  первоначально прямого, призматического бруска длиной  $l$ , который подвергается действию сжимающей силы  $N$ , действующей вдоль оси. Мы относим положение и смещения точек бруска к неизменной прямоугольной системе координат  $x, y$ , начало которой совпадает с одним из концов бруска, а ось направлена по оси бруса. Если точки оси бруска получают на границе потери устойчивости под влиянием сжимающей силы  $\sigma N$  бесконечно малые отклонения  $\eta$  в направлении оси  $y$ , то функция  $\eta(x)$ , как известно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{\sigma N}{EI} \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0 \quad (1)$$